DER STAHLBAU

DER STAHLBAU 1940

DER STAHLBAU

Beilage zur Zeitschrift

DIE BAUTECHNIK

Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Schriftleitung:

Professor Dr.=Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule
Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule

13. Jahrgang

1940

Mit 340 Textabbildungen

Berlin 1940
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn

Printed in Germany.

Inhalts-Verzeichnis des 13. Jahrganges, 1940.

Sachverzeichnis.

Verfasserverzeichnis.

Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68

DER STAHLBAU

Schriftleitung:
Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule
Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599
Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61
Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage zur Zeitschrift **DIE BAUTECHNIK** Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

13. Jahrgang — BERLIN, 19. Januar 1940 — Heft 1/2

Zur Feuerwiderstandsfähigkeit rechteckiger Stützen.[1]
(Durchwärmungsvorgang.)

Von Dr.-Ing. **Wilhelm Moheit**, Bitterfeld.

Unter den zahlreichen Arbeiten auf wärmetechnischem Gebiete, die der Klarstellung der Wärmeübertragung und des Wärmedurchganges an festen Körpern dienen, befaßten sich bis heute nur wenige mit der Klärung der theoretischen Verhältnisse an technisch wichtigen Baugliedern. Seit einigen Jahren finden im Baufach beim Entwurf neben statischen und festigkeitstechnischen auch brand- und schalltechnische Gesichtspunkte in stärkerem Maße Beachtung. Erst größere Brandschäden lenkten die Aufmerksamkeit insbesondere auf Fragen der Feuersicherheit, nachdem man festgestellt hatte, daß sich Baustoffe und Bauelemente bei hohen Temperaturen oft anders verhielten, als man es bisher anzunehmen gewohnt war. Zahlreiche Brandversuche an Baugliedern und vollständigen Bauten schlossen sich in der Folgezeit an. Die Versuchsergebnisse liegen größtenteils im Schrifttum zerstreut und sind bisher noch nicht genügend zusammengefaßt worden. Empirisch aufgestellte Faustformeln wurden vielfach wieder als unzulänglich nachgewiesen. Nur bei der sehr lang ausgedehnten Wand verfügt man heute über ausreichende theoretische Unterlagen und ebensolches Versuchsmaterial[2]). Dagegen mangelt es bei den schon zahlreich vorliegenden Versuchen über Stützen an einer geeigneten Auswertung[3]) [4]). Würde man von der theoretischen Seite her die Dinge schon beherrschen, so wäre man bald in die Lage versetzt, die für die gebräuchlichsten Stützen maßgebenden Wärmeleit- und Wärmeübergangszahlen zu bestimmen, um dann an Hand begründeter Näherungsformeln die Tragfähigkeit von Stützen im Brandfalle abschätzen zu können.

Nachstehende Ausführungen befassen sich mit der Durchwärmung einer Stütze bei beliebiger Außenraumtemperatur. Bisher behalf man sich dergestalt, daß man derartige Überlegungen auf vorhandene Lösungen bei der Wand zurückführte. Eine genaue Berechnung der Durchwärmung eines Prismas scheiterte meistens daran, daß man hier bei der Auflösung der partiellen Differentialgleichung im Gegensatz zum eindimensionalen Fall der Wand auf Besselsche Funktionen stößt, deren Handhabung für den Ingenieur im allgemeinen etwas ungewohnt ist. In solchen Fällen hilft man sich oftmals zweckmäßig, indem man mit Differenzen rechnet. Das Rechnen mit Differenzen liefert keine absolut richtigen Werte. Doch ist die Genauigkeit oftmals ausreichend, wenn man bedenkt, daß jede Genauigkeitssteigerung in mathematischer Hinsicht wenig Zweck hat, solange die physikalischen Annahmen mehr oder minder von der Wirklichkeit abweichen. So scheint das Rechnen mit Differenzen bei nachstehender Untersuchung schon dadurch gerechtfertigt, daß die Konstanten, wie Wärmeübergangszahl, -leitzahl und spezifische Wärme unserer Baustoffe, nur angenähert bekannt und ferner innerhalb größerer Temperaturgrenzen starken Schwankungen unterworfen sind.

E. Schmidt[5]) berechnete auf diese Weise schon eine sich abkühlende Wand und fand gute Übereinstimmung mit Lösungen, die nach der Methode der Fourierschen Reihen gefunden wurden. Diese Arbeit bildet den Ausgangspunkt zu der folgenden Berechnung eines rechteckigen Prismas. Handelt es sich um nicht stationäre Wärmevorgänge und fließt die Wärme nur in einer Richtung, so ist der Temperaturverlauf nicht geradlinig. An der Stelle x tritt — wie in Bild 1 gezeigt — ein Wärmestrom $-\lambda F \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}$ aus, der im allgemeinen von dem an der Stelle $x + dx$ in die Scheibe eintretenden Wärmestrom $-\lambda F\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \cdot dx\right)$ verschieden ist. λ bedeutet hierbei eine Stoffkonstante und wird Wärmeleitzahl genannt. Der Unterschied der oben angegebenen Ausdrücke: $\lambda F \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \cdot dx$ liefert eine Erhöhung der Temperatur der Scheibe. Bei einem spezifischen Gewicht γ und der spezifischen Wärme c der Scheibe erhöht sich im Verlauf eines Zeitraumes t die Temperatur ϑ nach der Beziehung:

$$c \gamma F dx \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \lambda F dx \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}.$$

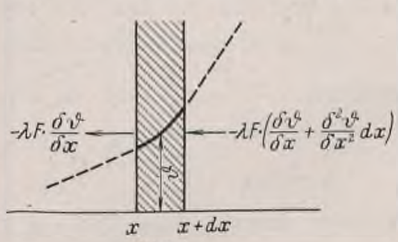


Bild 1.

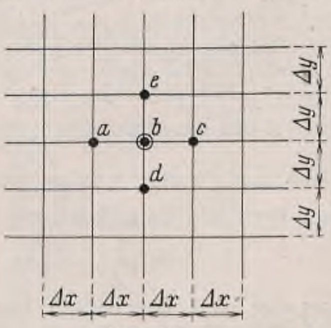


Bild 2.

Hieraus erhält man die Differentialgleichung nicht stationärer Wärmevorgänge bei einer Scheibe zu $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}$, worin der Kürze halber $\frac{\lambda}{c \gamma} = a$ gesetzt wird. Diese Stoffkonstante a wird als Temperaturleitzahl bezeichnet.

Strömt nun die Wärme nicht nur in einer Richtung, so sind die Wärmeeinströmungen aller drei Koordinatenrichtungen zu addieren und man gewinnt dabei die Differentialgleichung

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}\right).$$

Sie ist eine partielle Differentialgleichung mit der Zeit und den drei Koordinaten des Raumes als unabhängige und mit der Temperatur als abhängige Veränderliche. Ferner ist sie linear, d. h. vom 1. Grad, und von der 2. Ordnung.

Bei sehr langen prismatischen Körpern ist einleuchtend, daß ein Wärmestrom in Richtung der Längsachse nicht auftritt. Derartige Körper sind daher mit Hilfe der Differentialgleichung

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}\right)$$

als ein zweidimensionales Problem zu behandeln.

Um nicht diese Differentialgleichung exakt lösen zu brauchen, deren Auflösung die Kenntnis von Besselschen Funktionen, wie schon bemerkt, voraussetzt, werden die Differentialausdrücke durch die entsprechenden Differenzenausdrücke ersetzt. Zu diesem Zweck wird über den Querschnitt des Prismas ein Netz gelegt (vgl. Bild 2), wobei Δx und Δy der Netzabstand ist. Wie Δx und Δy, so ist Δt eine kleine, aber endliche Größe. Die Netzpunkte versieht man entweder mit Buchstaben oder Ziffern. In Anlehnung an die von E. Schmidt benutzte Schreibweise wird hier z. B. mit $\vartheta_{n,k}$ die Temperatur an der Stelle n zur Zeit $k \Delta t$ bezeichnet. Betrachten wir ein Temperaturfeld zur Zeit $k \Delta t$, so erhält

---

[1]) Die Anregung zu dieser Ausarbeitung verdanke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt.

[2]) Busch, Feuereinwirkung auf nicht brennbare Baustoffe und Baukonstruktionen. Berlin-Charlottenburg 1938, Zementverlag.

[3]) Klöppel, Brandversuche mit verschiedenartig ummantelten Stahlstützen, Vortrag auf der XXIV. wissenschaftlichen Tagung des Reichsvereins Deutscher Feuerwehringenieure 1936. Als Sonderdruck erschienen.

[4]) Fire Tests of Building Columns, Underwriters' Laboratories, Chicago 1917 bis 1919.

[5]) E. Schmidt, Über die Anwendung der Differenzenrechnung auf technische Anheiz- und Abkühlungsprobleme. Beiträge zur technischen Mechanik und technischen Physik (Föppl-Festschrift). Berlin 1924, Springer; ebenso: Einführung in die technische Thermodynamik. Berlin 1936, Springer.

man in bekannter Weise z. B. für den Punkt b in Bild 2 an Stelle der beiden zweiten partiellen Ableitungen die entsprechenden Differenzenausdrücke zu:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \longrightarrow \frac{1}{\Delta x^2}(\vartheta_{a,k} - 2\,\vartheta_{b,k} + \vartheta_{c,k})$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \longrightarrow \frac{1}{\Delta y^2}(\vartheta_{d,k} - 2\,\vartheta_{b,k} + \vartheta_{e,k}).$$

Für die Änderung der Temperatur des Punktes b innerhalb des Zeitintervalls $k \ldots k+1$ ist entsprechend zu setzen:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \longrightarrow \frac{1}{\Delta t}(\vartheta_{b,k+1} - \vartheta_{b,k}).$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die Differentialgleichung gelangt man zur Rekursionsformel:

$$\vartheta_{b,k+1} - \vartheta_{b,k} = \frac{a\,\Delta t}{\Delta x^2}(\vartheta_{a,k} - 2\,\vartheta_{b,k} + \vartheta_{c,k}) + \frac{a\,\Delta t}{\Delta y^2}(\vartheta_{d,k} - 2\,\vartheta_{b,k} + \vartheta_{e,k}).$$

Mit Hilfe dieser Gleichung ist es nun möglich, wenn die Temperaturverteilung zur Zeit $k\,\Delta t$ durch die Werte: $\vartheta_{1,k}$; $\vartheta_{2,k}$; $\vartheta_{3,k}$; ... gegeben ist, Punkt für Punkt die Temperaturen für einen um Δt weiter vorgerückten Zeitpunkt, also $\vartheta_{1,k+1}$; $\vartheta_{2,k+1}$; $\vartheta_{3,k+1}$; ... zu berechnen. Hieran anschließend kann dann der gesamte Verlauf der Aufwärmung oder Abkühlung einer Stütze festgelegt werden.

Im nachstehenden sollen aber die Betrachtungen nur auf die quadratische Stütze beschränkt werden. Insbesondere wird an Hand eines Zahlenbeispiels gezeigt, mit welch einfachen Hilfsmitteln es möglich ist, die Temperaturfelder zu berechnen. Es sei aber hier schon bemerkt, daß die Anwendung dieses Verfahrens auch auf andere Randbedingungen, wie z. B. beliebiger Verlauf der Heizraumtemperatur, beliebige Querschnittsform der Stütze usw., anwendbar ist.

Im Falle einer quadratischen Stütze wird $\Delta x = \Delta y$ gewählt. Um die Untersuchung weiterhin möglichst einfach zu gestalten, wird $\frac{a\,\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{a\,\Delta t}{\Delta y^2} = \frac{1}{4}$ angenommen. Dies ist zulässig, ohne dadurch auch nur einige Möglichkeiten von vornherein auszuschalten; denn es ist nur a zunächst eine gegebene Konstante, während man Δt und Δx bzw. Δy dementsprechend abstimmen kann. Bei rechteckigen Stützen wird es anfangs ein wenig schwieriger, da das Verhältnis von $\Delta x : \Delta y$ eingeführt und die numerische Größe von $\frac{a\,\Delta t}{\Delta x^2}$ anders gewählt werden muß. Der Grund, warum man am zweckmäßigsten $\frac{a\,\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{1}{4}$ setzt, ist der, weil damit die Rekursionsformel die einfache Form annimmt:

$$\vartheta_{b,k+1} = \frac{1}{4}(\vartheta_{a,k} + \vartheta_{c,k} + \vartheta_{d,k} + \vartheta_{e,k}),$$

was eine nicht unerhebliche Vereinfachung darstellt, deren Wert später nochmals näher gezeigt wird.

Es werden nun Zahlengrößen für die Werte a, Δt und Δx eingeführt. Die Stütze sei aus Beton; hierbei ist zu setzen:

$\lambda = 1{,}0$ kcal/m h Grad,
$c = 0{,}25$ kcal/kg Grad,
$\gamma = 2000$ kg/m³.

Schließlich wird angenommen, daß sich diese Werte im Verlauf der Aufheizung oder Abkühlung nicht ändern. Sie liefern $a = \frac{\lambda}{c\,\gamma} = 0{,}002$ m²/h. $36{,}5 \times 36{,}5$ cm² sei der Querschnitt der Stütze; er wird nach Bild 3 mit einer Netzteilung $\Delta x = \Delta y = l/10$ versehen. Die Größe des Zeitintervalls ergibt sich somit zu 0,1666 Stunden, das sind 10 Minuten.

Die bisherigen Ausführungen bezogen sich auf die Temperaturverteilung im Innern der Stütze. Es bleibt nun noch die Frage offen, wie sich der Wärmeübergang vom Heizraum zum Stützenrand vollzieht. Für den Wärmeübergang zwischen Wand und Heizraum ist die Wärmeübergangszahl α maßgebend. Kann die Wärmeleitfähigkeit λ und die spezifische Wärme c hinreichend genau bestimmt werden, so ist dies bei der Wärmeübergangszahl α erheblich schwieriger, weil sie je nach den Einflüssen, die mitspielen, starken Schwankungen unterworfen ist. Auf die maßgebendsten Einflüsse, wie Strahlung, Konvektion, Größe und Rauhigkeit der Flächen, Höhe der Temperaturen, soll hier nicht näher eingegangen werden[2]. Es sei aber nochmals in diesem Zusammenhang darauf hingewiesen, daß diese Empfindlichkeit schon allein das Rechnen mit Differenzen im vollen Maße rechtfertigt, und daß jede übertriebene Genauigkeitssteigerung praktisch ohne Wert bleibt. Mit Hilfe der Differenzenrechnung hat man es aber sogar noch in der Hand, eine Veränderlichkeit der Wärmeübergangszahl berücksichtigen zu können. Ein derartiger Versuch würde wahrscheinlich die an sich schon schwierige exakte Auflösung der Differentialgleichung mit Besselschen Funktionen unmöglich gestalten.

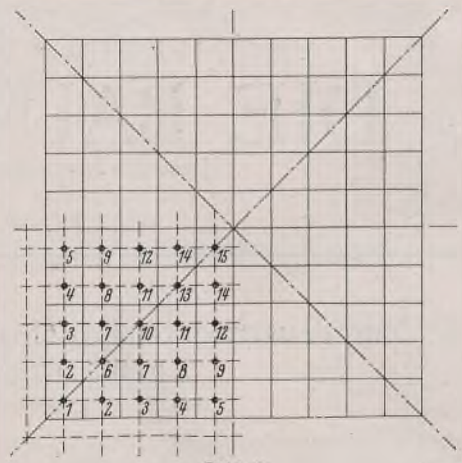


Bild 3.

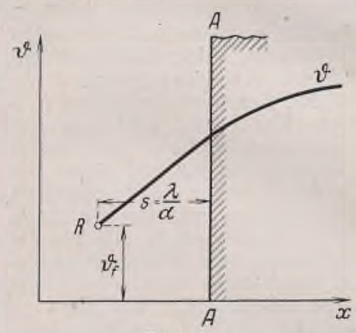


Bild 4.

Ist ϑ_f die Heizraumtemperatur und ϑ_0 die Oberflächentemperatur, so besteht nach Bild 4 an der Oberfläche folgende Beziehung:

$$\lambda\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right) = \alpha(\vartheta_0 - \vartheta_f).$$

Diese Beziehung besagt, daß die Tangente der Temperaturkurve an der Stelle A—A durch den sogenannten Richtpunkt R geht, dessen Abstand von der Körperoberfläche durch $s = \frac{\lambda}{\alpha}$ und dessen Höhe durch ϑ_f festgelegt sind.

In unserem Zahlenbeispiel wird $\alpha = 5{,}0$ angenommen. Somit beträgt $s = \frac{\lambda}{\alpha} = 0{,}2$ m. Als Heizraumtemperatur wird ein mit der Zeit veränderlicher Temperaturverlauf, und zwar die Einheitstemperaturkurve nach DIN 4102, Blatt 3, Ausgabe August 1934, zugrunde gelegt (vgl. Bild 5), was bei Anwendung der Differenzenrechnung keinerlei Schwierigkeiten verursacht. Es muß nur, wie in Bild 5 zum Ausdruck gebracht, die

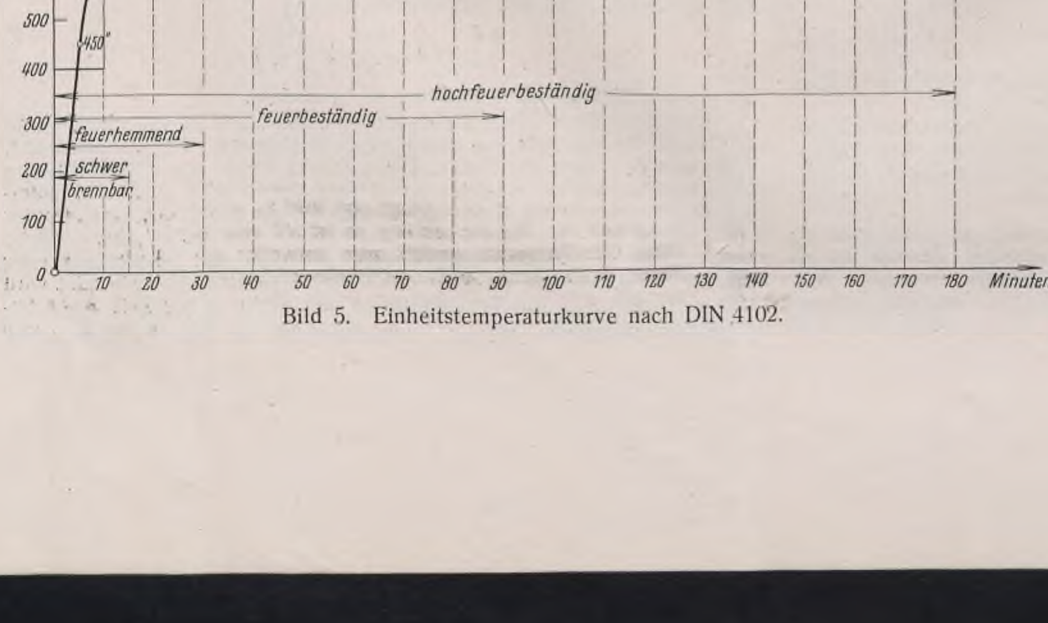


Bild 5. Einheitstemperaturkurve nach DIN 4102.

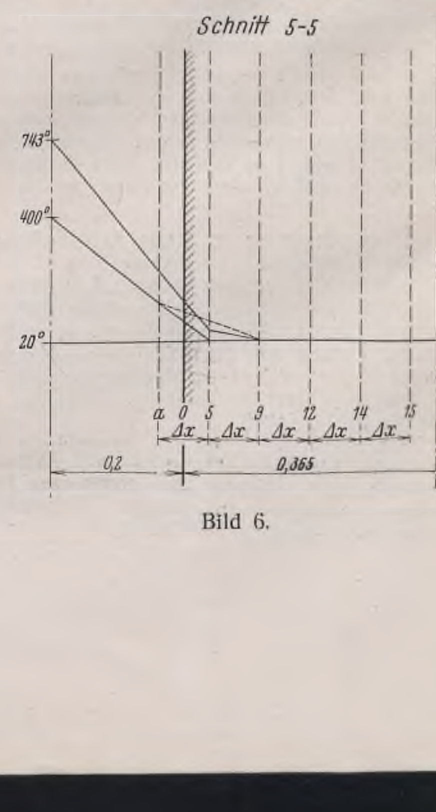


Bild 6.

stetige Kurve in eine Treppenkurve abgewandelt werden, damit innerhalb des betrachteten Zeitintervalls mit einer konstanten Temperatur gerechnet werden kann. Infolge des veränderlichen Temperaturverlaufs verschiebt sich lediglich der Richtpunkt R parallel zur Wand. Würde sich gleichzeitig auch α ändern, so läßt sich dies in der Weise berücksichtigen, daß der Richtpunkt auf einer Kurve wandert.

Zu Beginn habe die Stütze eine Anfangstemperatur von 20° C. Der Richtpunkt liegt ebenfalls bei 20° C. Das Temperaturfeld ist vollkommen eben (vgl. Bild 6, welches den Schnitt 5—5 der Stütze wiedergibt). Während der ersten 10 Minuten des Versuchs steigt nach Bild 5 die Heizraumtemperatur auf 400° C. Das Temperaturfeld bleibt eben bis auf die Oberflächentemperaturen $\vartheta_{0,1\ldots5}$ und die Temperaturen $\vartheta_{a,1\ldots5}$, welche die Erwärmung der äußersten außerhalb der Stütze liegenden Hilfspunkte darstellen. Der allgemeine Ausdruck lautet für die Oberflächentemperatur:

$$\vartheta_0 = \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\vartheta_f - \vartheta_{1\ldots5}}{s + \frac{\Delta x}{2}} + \vartheta_{1\ldots5}$$

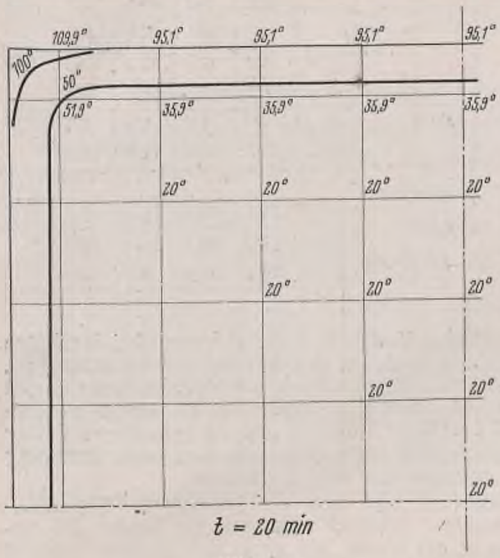


Bild 7a.

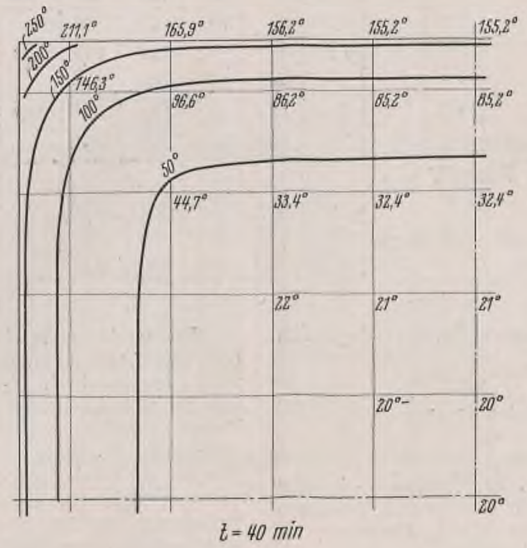


Bild 7b.

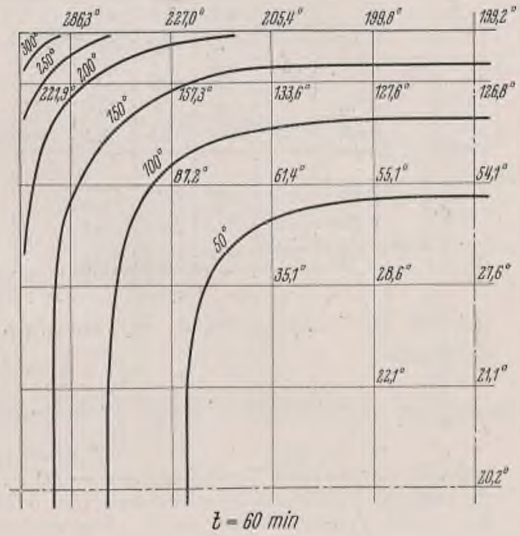


Bild 7c.

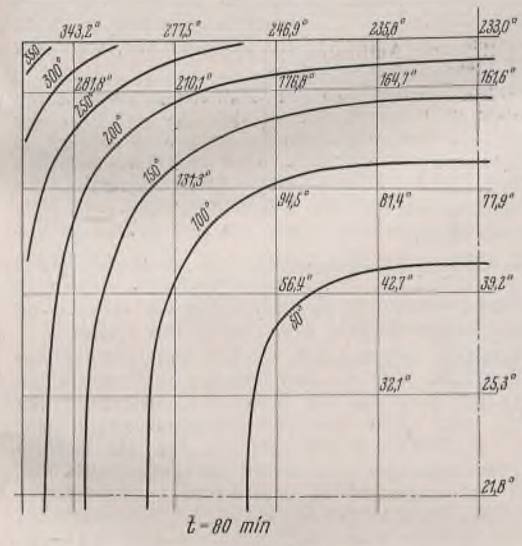


Bild 7d.

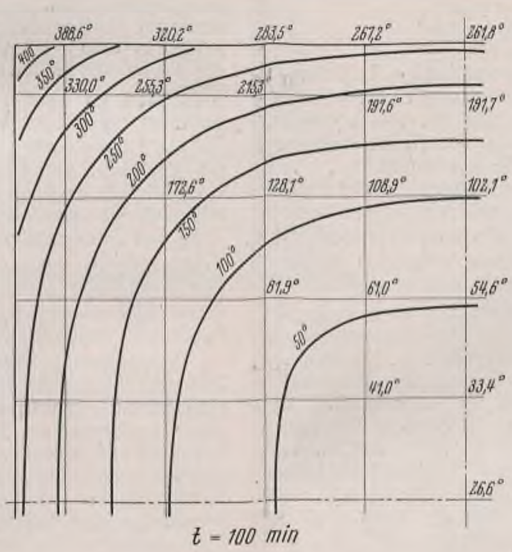


Bild 7e.

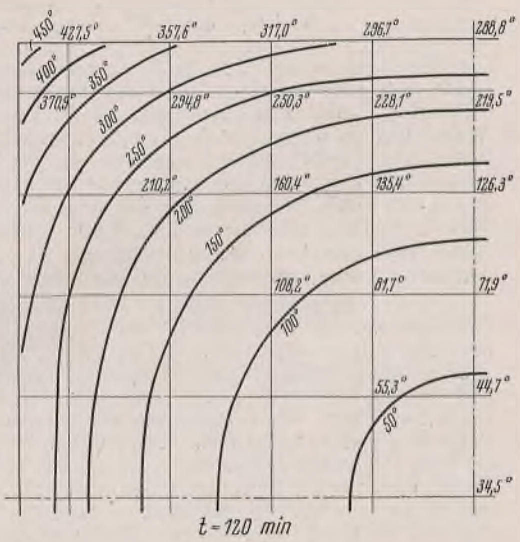


Bild 7f.

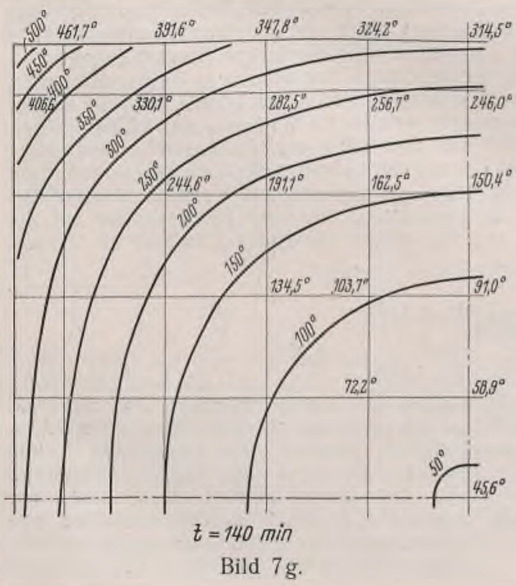


Bild 7g.

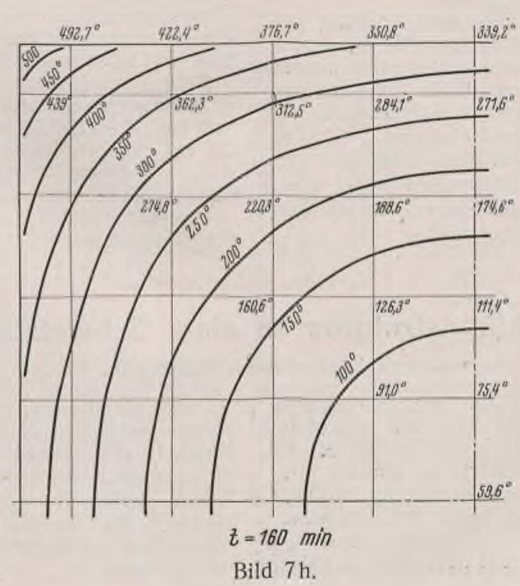


Bild 7h.

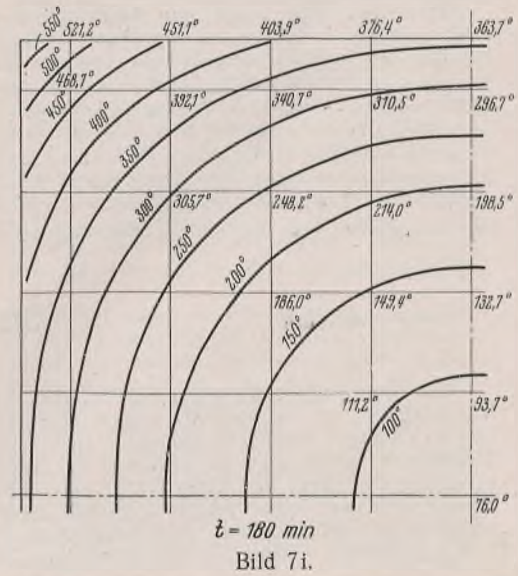


Bild 7i.

Tafel 1.

						26,6	
					33,4	26,6	26,6
						30,0	
				61,0	41,0	33,4	33,4
					47,2	38,9	
			128,1	81,9	61,0	54,6	54,6
				94,6	71,6	62,8	
		255,3	172,6	128,1	108,9	102,1	102,1
			191,7	144,7	122,2	114,3	
447		330,0	255,3	215,3	197,6	191,7	191,7
		351,2	275,6	233,1	213,1	205,8	
R: 1038 °C		408,7	329,4	300,7	282,3	275,5	
s = 0,2 m		447,0	384,6	351,3	336,4	331,7	
100 … 110 Minuten		466,2	403,1	367,6	351,1	344,8	

Tafel 2.

						30,0	
					38,9	30,0	30,0
						34,5	
				71,6	47,2	38,9	38,9
					55,3	44,7	
			144,7	94,6	71,6	62,8	62,8
				108,2	81,7	71,9	
		275,6	191,7	144,7	122,2	114,3	114,3
			210,2	160,4	135,9	126,3	
466,2		351,2	275,6	233,1	213,1	205,8	205,8
		370,9	294,8	250,3	228,1	219,5	
R: 1046 °C		427,5	357,6	317,0	296,7	288,8	
s = 0,2 m		466,2	403,1	367,6	351,1	344,8	
110 … 120 Minuten		483,7	420,3	383,5	364,9	357,7	

Tafel 3.

						34,5	
					44,7	34,5	34,5
						39,6	
				81,7	55,3	44,7	44,7
					63,2	51,6	
			160,4	108,2	81,7	71,9	71,9
				121,1	92,8	81,2	
		294,8	210,2	160,4	135,9	126,3	126,3
			227,6	176,2	149,1	138,4	
483,7		370,9	294,8	250,3	228,1	219,5	219,5
		389,3	312,9	266,7	242,7	232,9	
R: 1054 °C		444,9	375,1	332,6	310,7	301,7	
s = 0,2 m		483,7	420,3	383,5	364,9	357,7	
120 … 130 Minuten		500,3	436,7	398,2	378,2	370,1	

und für die Temperaturen ϑ_a der außerhalb des Randes liegenden Netzpunkte:

$$\vartheta_a = \Delta x \cdot \frac{\vartheta_f - \vartheta_{1 \ldots 5}}{s + \frac{\Delta x}{2}} + \vartheta_{1 \ldots 5}.$$

Während der zweiten Versuchsetappe — 10 . . . 20 Minuten — beträgt die mittlere Heizraumtemperatur nach Bild 5 743 ° C. Da nun innerhalb der ersten Versuchsetappe die ϑ_a-Temperaturen etwas anstiegen, so ändern sich jetzt demzufolge die nächst benachbarten Punkte auf Grund der Rekursionsformel:

$$\vartheta_{b,k+1} = \frac{1}{4}(\vartheta_{a,k} + \vartheta_{c,k} + \vartheta_{d,k} + \vartheta_{e,k}).$$

Die Gleichung besagt, daß die Temperatur im betrachteten Zeitintervall gleich dem arithmetischen Mittel der Temperaturen der vier nächst benachbarten Punkte des zuvorliegenden Zeitintervalls ist, was völlig der Anschauung entspricht, da die Temperaturen einem Ausgleich zustreben. Von diesem Einfluß werden zunächst nur die Temperaturen $\vartheta_1 \ldots \vartheta_5$ betroffen, die übrigen bleiben vorerst noch unverändert. Die Punkte $\vartheta_1 \ldots \vartheta_5$ muß man sich nun mit dem Richtpunkt verbunden denken (Bild 6), wodurch die ϑ_0- und ϑ_a-Werte nach oben schon angeführten Gleichungen bestimmt werden können. Jetzt geht man zum nächsten Zeitintervall über, wo sich die gleiche Arbeit wie zuvor wiederholt.

Die Rekursionsformel gestattet ferner die Anwendung einer einfachen Tabellenrechnung. Die Tafeln 1 bis 3 geben z. B. die Zahlenrechnung bei den Zeitintervallen 100 . . . 110, 110 . . . 120, 120 . . . 130 Minuten wieder. Infolge Symmetrie der Temperaturverteilung zu beiden Diagonalen und beiden Mittelsenkrechten brauchen nur für den achten Teil der Querschnittsfläche die Temperaturfelder berechnet zu werden. Die rechts steigenden Zahlen stellen die Temperaturen beim $k-1^{\text{ten}}$ Zeitintervall, die links steigenden Zahlen die Temperaturen beim k^{ten}, also betrachteten Zeitintervall für die betreffende Stelle des Stützenquerschnitts (vgl. auch Bild 3) dar. Außerhalb des stark umrandeten Teils der Tafel sind die ϑ_0- und ϑ_a-Werte aufgetragen. Die Tabellenrechnung zeigt also, auf welch einfache Rechenarbeit die Untersuchung hinausläuft, die rein mechanisch auch von weniger geschulten Arbeitskräften ohne besondere Mühe durchgeführt werden kann.

E. Schmidt hat ferner, um Rechenarbeit völlig auszuschalten, ein zeichnerisches Verfahren bei der Wand angegeben. Er teilt die Platte, bei der der zeitliche und örtliche Temperaturverlauf bestimmt werden soll, in eine Anzahl gleich dicker Schichten und stellt die Temperaturen durch einen geknickten Linienzug dar. Ist die Temperaturverteilung zur Zeit $k \Delta t$ gegeben, so ermittelt sich die Temperaturverteilung zur Zeit $(k+1)\Delta t$, indem man $\vartheta_{n-1,k}$ mit $\vartheta_{n+1,k}$ geradlinig verbindet. Der Schnittpunkt, den diese Gerade mit der n^{ten} Schnittgeraden bildet, stellt die gesuchte Temperatur $\vartheta_{n,k+1}$ dar. Durch Wiederholung dieses Verfahrens gewinnt man die neue Temperaturverteilung.

Ein ähnliches zeichnerisches Verfahren ließe sich auch bei der Stütze entwickeln. Doch erkennt man sogleich, daß dies hier unzweckmäßig ist, weil man sowohl in x- als auch in y-Richtung mit einer größeren Anzahl von Schnitten arbeiten müßte, da bei Stützen nicht einfach gekrümmte Temperaturfelder wie bei der Wand, sondern doppelt gekrümmte Felder vorliegen. Es steht deshalb außer Zweifel, daß hier eine Rechnung wie die in Tafel 1 bis 3 gezeigte den Vorzug verdient.

Um sich ein anschauliches Bild von der jeweiligen Temperaturverteilung machen zu können, zeichnet man sich am besten die entsprechenden Kurvenbilder in der Weise, wie es in den Bildern 7a bis 7i geschehen ist, wo ein Viertel des Stützenquerschnitts gezeigt wird. Sie geben deutlich das langsame Vordringen der Wärme zum Stützenkern zu erkennen. Die anfangs hyperbelähnlichen Kurven nehmen schließlich nach der Stützenmitte hin Kreisform an. Besonders augenscheinlich ist auch das schnellere Voreilen der Wärme an den Stützenecken, weil hier die Wärmeströme zweier Flächen sich treffen.

Eines ist aber unwahrscheinlich, daß die Oberflächentemperaturen praktisch so unterschiedlich sein sollen, wie es sich hier mit Hilfe der Differenzenrechnung ergibt. Es wird sich vielmehr am ganzen Außenrand die gleiche Oberflächentemperatur einstellen. Daß sich hier derartige Unterschiede ergeben, liegt in der Differenzenrechnung begründet, vor allem darin, daß zur Berücksichtigung der Randbedingungen das Netz über den Querschnittsrand verlängert und sogar mit den gedachten ϑ_a-Temperaturen gerechnet wurde. Es fällt daher den Temperaturen in den Randzonen keine Genauigkeit zu; es ist aber anzunehmen, daß sich dieser Einfluß nur auf kleine Randzonen je nach Größe der Netzteilung beschränkt und das übrige Temperaturfeld davon unberührt bleibt.

Vorstehende Ausführungen zeigen, daß es bei Verwendung der Differenzenrechnung möglich ist, sich mit den üblichen mathematischen Hilfsmitteln ein Bild über den zeitlichen und örtlichen Temperaturverlauf einer quadratischen Stütze bei einem Heizraumtemperaturverlauf nach DIN 4102 zu verschaffen. Außerdem wurde gezeigt, daß die Berücksichtigung beliebiger Randbedingungen im Hinblick auf Querschnittsform, Stoffkonstanten, äußeren Temperaturverlauf usw. keine nennenswerten Schwierigkeiten bereitet. Würde man die Rechnung bei systematischer Veränderung der einzelnen Stoffwerte und gegebenenfalls auch der Randbedingungen wiederholen, so wäre eine geeignete Grundlage geschaffen, um das schon reichhaltig vorliegende Versuchsmaterial im In- und Ausland nutzbringend auszuwerten. — Genannt seien besonders die großangelegten Versuche des Deutschen Stahlbau-Verbandes, Berlin[3]), und die etwas älteren amerikanischen Versuche[4]). Eine erschöpfende Zusammenfassung aller sonstigen wertvollen Brandversuche wurde von Busch[2]) gegeben. — Auf diese Weise wäre es möglich, auch bei Stützen in Verbundbauweise zu genaueren Stoffwerten zu gelangen. Schließlich könnte dann die Brücke zum angestrebten Ziel geschlagen werden, für Stützen — also für Bauglieder, die für die Standfestigkeit von Gebäuden von überragender Bedeutung sind, — mit hinreichender Genauigkeit beim Brandfall die Temperaturen im Stützenkörper, ohne kostspielige und zeitraubende Versuche durchführen zu müssen, im voraus zu bestimmen, um somit Rückschlüsse auf die Tragfähigkeit der Stütze und des ganzen Gebäudes ausführen zu können.

Stahlkonstruktion zu einer Schmelzhütte.

Von Direktor **Hermann Maushake**, VDI.

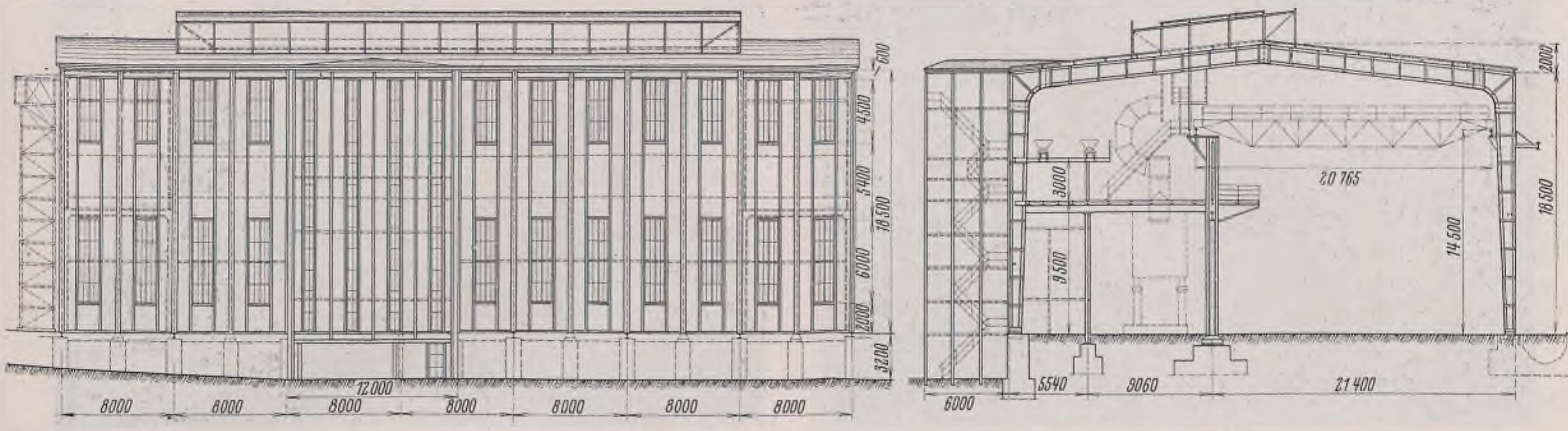
Für eine solche Erzeugungsstätte, wie für die hier vorliegende Schmelzhütte, ist ein Stahlbau wegen seiner baulichen und wirtschaftlichen Vorzüge besonders günstig. Denn diese Bauweise bietet die Möglichkeit, einen Bau zu schaffen, der hinsichtlich Einrichtung, Beschickung der Öfen, Belüftung, Temperaturausgleich, Belichtung, späterer Erweiterung usw. jedem Anspruch gerecht werden kann. Mit dem Stahlwerkstoff ist fast jede Form eines Baugliedes ohne besondere Schwierigkeit herzustellen. Diese Vorteile haben sich hierbei besonders bewährt.

Bei einem solchen Hüttenbau ist darauf zu sehen, daß das Baugerippe schlichte vollwandige Glieder hat, insbesondere gitterwerksartige Konstruktionen ausgeschaltet werden. Als Traggerippe wurde ein Zweigelenkrahmen gewählt, der bei rd. 35 m Stützweite 20,5 m hoch ist. Die Breite der Hütte beträgt 36 m und ihre Länge 56 m, die sich in sieben Felder mit 8 m Rahmenabstand aufteilt. Der freitragende Rahmen war für diese Anlage am zweckentsprechendsten.

Dieser schöne Bau mit seinem flach geneigten Dach hat nur einen an die eine Längsseite verlegten und bis zum Dach hochgeführten 6 × 12 m großen Anbau, in dem der Treppenaufgang und die Aufzüge zu den Bühnen untergebracht sind (s. Übersicht, Bild 1). Bühnen bestehen in 9,5 und 12,5 m Höhe, und zwar an der Seite, wo die Öfen aufgestellt sind. Die untere 9,5 m-Bühne ist auf Hüttenlänge etwa 14,5 m breit durchgeführt und hat in den Endfeldern 3,4 m weite Auskragung. Durch die hohe Belastung von insgesamt 5,66 t/m² ergaben sich hierfür schwere Bühnenkonstruktionen. Die Bühne besteht aus einem 8 mm dicken glatten Blechbelag auf Betonkappen zwischen Stahlträgern. Die Unterzüge sind Peiner Träger 60. Die obere 7 m breite Bühne dient zum Heranschaffen des Erzes von den Aufzügen und zum Abstürzen dieses Erzes auf die 9,5 m-Bühne und hat hierfür entsprechende Öffnungen erhalten.

Die Verbindung dieser Wand mit dem Zweigelenkbinder ist nur führend hergerichtet.

Es ist verständlich, daß durch diese einseitige Lagerung erhebliche Kippkräfte für die Stützen auftreten. Um die Fundamentabmessung möglichst klein zu halten, wurden die Stützen nicht im Fundament eingespannt, sondern gelenkig gelagert und an den Unterzügen in 9,5 m Bühnenhöhe abgestützt. In dieser Höhe wird der auftretende Schub durch den Unterzug auf den Zweigelenkrahmen übertragen. Bei dieser auskragenden Ausbildung der Stützen war besonders die Durchbiegung zu beachten. Sie ist für die ungünstigste Belastung am Stützenkopf zu 6,3 mm senkrecht und 8,7 mm waagerecht infolge Kranbelastung ermittelt. Der Stützenquerschnitt ist ein IP 70 mit je einem I 40 als Flanschverstärkung. Die insgesamt auftretende senkrechte Belastung beträgt 140 t für die



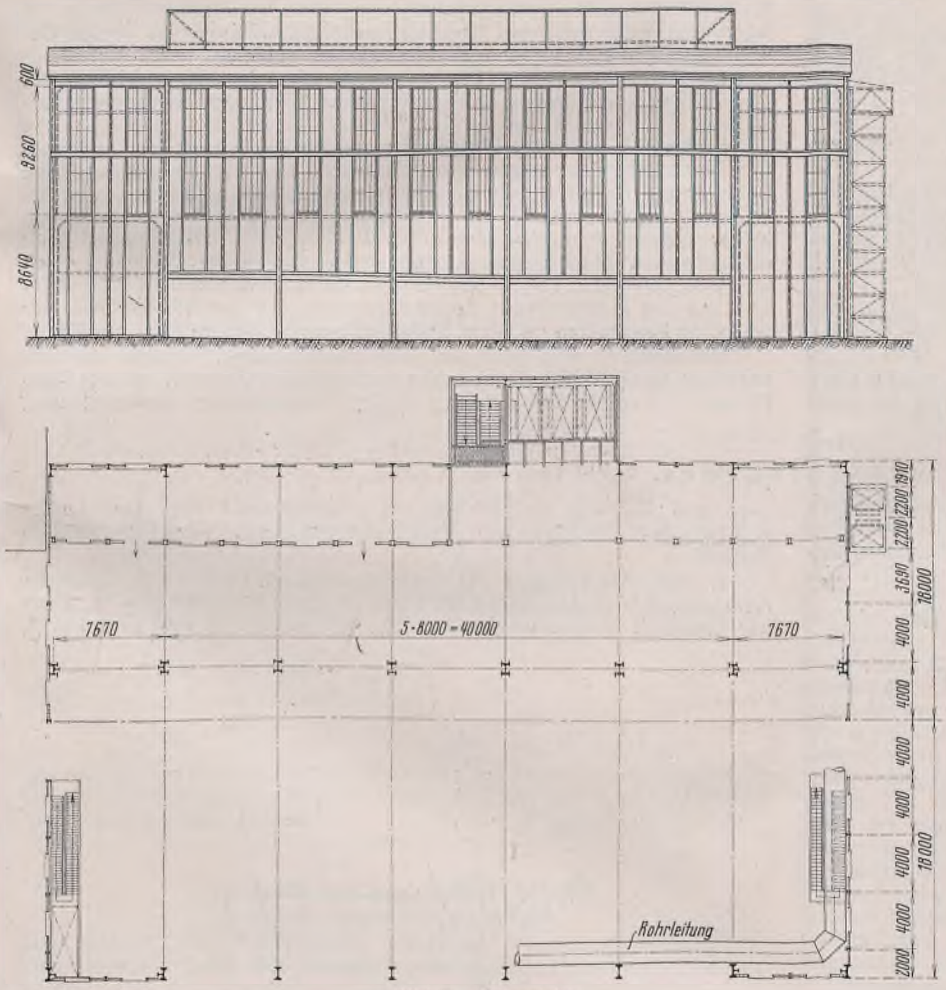


Bild 1. Übersicht.

mittleren Stützen und 186 t für die der Endfelder, wozu noch der Schub am Stützenkopf kommt.

Oberhalb dieser inneren Kranbahn ist der in etwa 16,8 m Höhe durch die ganze Hütte gehende Bedienungssteg angebracht, der von den Ofenbühnen zu erreichen ist. Dieser Bedienungssteg ermöglicht das Besteigen der Krane, und gleichzeitig besteht Verbindung mit den inneren vor den Stirnwänden liegenden Laufgängen, die als Windträger zur Stirnwandversteifung ausgebildet sind.

Auf eine spätere Erweiterung über die Stirnseiten hinaus ist Rücksicht genommen. Die Endbinder besitzen die gleichen Abmessungen wie die übrigen Binder. Eine Erweiterung kann vor sich gehen, indem der ganze Bau stirnseitig oder nur die Kranbahn verlängert wird. Das Fachwerk der Stirnwände ist so ausgebildet, daß eine Veränderung der Wandkonstruktion ohne Schwierigkeit möglich ist und Kranschürzen als Verkleidung der Öffnungen in den Stirnwänden nachträglich angebracht werden können.

Die Zweigelenkrahmen haben 1,35 m Querschnitthöhe und sind als Blechträger, bestehend aus einem Stegblech 1350 · 15 mm mit Gurtwinkeln 150 · 150 · 14 mm, mit Gurtplatten 330 · 12 mm bzw. 19 mm Dicke in den Ecken hergestellt. Um eine gefälligere Form zu bekommen, sind die Stiele nach dem Fußpunkt zu auf 0,9 m verjüngt worden. Ein IP-Trägerrost bildet das Auflager. Die Dachdecke besteht aus Bimsbetonplatten mit doppellagiger Pappe auf durchgehenden Pfetten.

Die Umfassungswände sind Fachwerkkonstruktionen und halbsteinig vermauert. Dieses Fachwerk wurde aufgeteilt, indem nur Stiele von außen sichtbar geblieben sind und erforderliche Riegel innenseitig hinter die Wand verlegt wurden. Dadurch ist für den ganzen Bau die aufstrebende Gliederung gewahrt. Dementsprechend sind auch die Fenster vorgesehen.

Der Ofenseite gegenüber ist die Längswand bis auf die Endfelder unten 4 m hoch offen geblieben. Wenn hierauf Rücksicht genommen wird, ergibt sich das Verhältnis der Belichtungsflächen zur Grundrißfläche zu rd. 40%, was zu einem befriedigenden Ergebnis führte. Außer den Türen zum Treppenaufgang besitzt jede Stirnseite ein Tor 4 · 5 m, und ferner ist hierbei zu beachten, daß die eine vorerwähnte Längswand unten offen ist.

Im freien Teil vor den Bühnen und Öfen entlang befinden sich in 14,5 m Höhe zwei Krane zu je 10 t Tragfähigkeit mit Führerkorb und 20,7 m Stützweite. Die Kranbahn an der Außenwand stützt sich in üblicher Art auf Konsole am Stiel der Zweigelenkrahmen ab. Die Bedienung der Öfen erfordert, daß die Krankatze für die Ofenbeschickung über die Ofenöffnung hinausstehen muß. Da die Stützen nicht näher an die Öfen herangestellt werden konnten, ist mithin die einseitige Verlagerung der inneren Kranbahn zur Stützenachse bedingt. Zum Abschluß der oberen Bühne wurde noch eine Fachwerkabschlußwand eingebaut, die auch diese Kranbahnstützen in 1,45 m Abstand auskragend belastet.

Da bei einer solchen Erzeugungsstätte besondere Sorgfalt auf gute Entlüftung zu legen ist, wurde ein besonderer Entlüftungsaufbau in einfacher zweckentsprechender Art hergestellt. Er erstreckt sich mit 40 m Länge über die fünf mittleren Binderfelder. Seine Höhe ist 2,5 m und die Breite 11,5 m. Die Form dieses Aufbaues paßt sich der des Unterbaues gut an. Die Konstruktion ist aus Fachwerk gebildet, halbsteinig ausgemauert, und die Dachdeckenausführung ist gleich der unteren. Es interessiert auch, wie die eigentliche Entlüftung vor sich geht, da die Umfassungswände ausgemauert sind. Hier ist ein anderer Weg beschritten worden, da sonst in der Regel in die Außenwände eines Entlüftungs-Aufbaues entweder Jalousien oder Lüftungsklappen eingesetzt werden.

Bei dieser Entlüftung sind Öffnungen in der Dachdecke hergerichtet und Pfettenfelder hierfür freigelegt. Um nun zu verhindern, daß Regen oder Schnee eindringen kann, wurden die Öffnungen in den beiden Dachdecken so hergerichtet, daß die Öffnung der unteren Decke durch das darüberliegende Dachstück geschützt blieb, oder entgegengesetzt. Für eine gute Wasserabführung ist gesorgt. Daß der Entlüfter nicht symmetrisch angeordnet wurde, bedingt die Ofenlage.

Auch die Fenster sind reichlich mit Entlüftungsflügeln versehen.

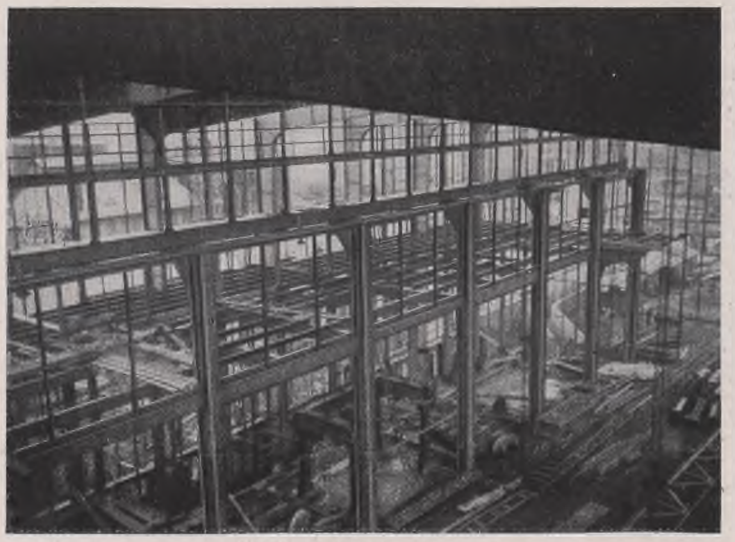


Bild 2. Blick in die Halle.

Seitens des Auftraggebers wurde streng darauf gesehen, daß außer dem Dachverband nirgends Schrägstäbe als Versteifung in den Wänden angeordnet wurden, und vor allen Dingen waren hiervon die Belichtungsflächen vollkommen frei zu halten. Gebäudeversteifungen durch einfache Verstrebungen sind zwar wirtschaftlich und sehr wirksam, sie wirken jedoch unruhig und sind oft beim Einbau von Fenstern, Entlüftungen und Toren hinderlich.

Während in der Querrichtung die Standsicherheit durch die Rahmenkonstruktion gegeben ist, wurde sie in Längsrichtung dadurch hergestellt, daß in jedem 8 m-Endfeld der Längswände in Verbindung mit den Stielen der Zweigelenkbinder Rahmen eingebaut wurden, welche den Windanfall auf die Stirnwände aufnehmen und den Fundamenten zuleiten.

Bei vielen Bauten wird oft nicht genügend Wert darauf gelegt, daß Fußkonstruktionen tragender Glieder, die mitunter erhebliche Abmessungen aufweisen, unterhalb des Fußbodens angeordnet werden. Solche Fußkonstruktionen, die oberhalb des Fußbodens verbleiben, sind für den Betrieb störend. Deshalb sind für den hier vorliegenden Fall die Lager dieser Konstruktion so tief verlegt, daß der Hüttenflur hiervon vollkommen frei ist. Jeder Trägerrost zum Auflager ist so eingebettet, daß das Gelenk des Rahmens mit Fußboden-Oberkante zusammenfällt, wodurch eine einwandfreie Beweglichkeit gewährleistet ist.

Außenseitig war auch noch eine Einschienenbahn in 13 m Höhe aufzunehmen, desgl. im Innern Gasleitungen usw.

Aufenthaltsräume befinden sich unterhalb der unteren Bühne sowie auch stirnseitig in 5 m Höhe mit Treppenzugängen für die Aufsicht.

Aus Fracht- und Aufstellungsgründen wurden die Rahmenbinder je in vier Teilen zur Baustelle gebracht, und zwar die fertigen Stiele und der Riegel in zwei Teilen. Das Gewicht eines Rahmens beträgt etwa 33,5 t. Das gesamte Liefergewicht ist etwa 845 t, wovon 510 t auf das



Bild 3. Stahlkonstruktion nach beendeter Aufstellung.

eigentliche Baugerippe mit Kranbahn entfallen, während das übrige Gewicht von 335 t den Bühnenkonstruktionen zukommt. Bei dem umbauten Raum von rd. 41 500 m^3 ergibt das 20,3 bzw. 12,3 kg/m^3. Die Bilder 2 u. 3 zeigen die Stahlkonstruktion nach beendeter Aufstellung.

Es besteht ein guter Überblick innerhalb der Hütte, und alle Bauteile vermitteln einen angenehmen Eindruck. Das trifft besonders auf die Rahmenkonstruktion zu, die bei dieser großen Höhe und Spannweite die Überzeugung erweckt, daß sie in ihrer geschmeidig wirkenden Form von keiner anderen Bauweise übertroffen werden kann. Das Bauwerk umschließt eine würdige Erzeugungsstätte und hinterläßt dem Beschauer einen fesselnden Eindruck. Das zu erreichen, ist immer erwünscht. Es muß daher auch auf das nutzbringende Zusammenwirken des auf den Stahlbau eingestellten Architekten mit dem Stahlbauingenieur hingewiesen werden.

Insbesondere wird auch das gute Einvernehmen während der Abwicklung dieses Auftrages zwischen Auftraggeber und den mit der Ausführung betrauten Wilke-Werken A.-G., Braunschweig, hervorgehoben.

Verschiedenes.

Einige Formeln zur Ermittlung räumlicher Verschiebungen. Es sollen Formeln entwickelt werden, welche das Williotsche Verfahren auf den Raum übertragen. An sich handelt es sich um bekannte Tatsachen. Trotzdem dürfte wohl die folgende Zusammenstellung von Interesse sein.

Bild 1 zeigt den Grundriß und eine Ansicht des zu untersuchenden Systems. Es besteht aus aneinandergereihten Scheiben (0—1—2...) von konstanter Höhe, welche auf der Grundrißebene senkrecht stehen und durch vertikale Scharniergelenke miteinander verbunden werden. Die Scheibengurte sind im unverformten Zustand parallel zur Grundrißebene. Äußere Lasten mögen nur in den Knotenpunkten angreifen. Die Formeln werden zunächst für den Fall aufgestellt, daß der Pfosten 0 nach Lage und Richtung festgehalten ist. Anschließend folgt eine Untersuchung der Einflüsse von Verschiebungen bzw. Verdrehungen des Pfostens 0.

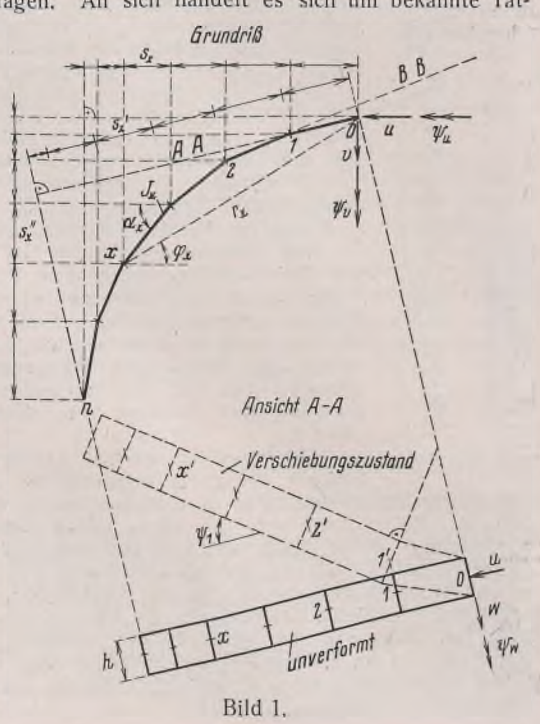


Bild 1.

1. Verschiebungen bei festgehaltenem Pfosten 0. Unter der Annahme, daß im Abschnitt 0 bis 1 die positiven Momente (positiv, wenn im Untergurt Zug erzeugt wird) M_0, M_1 vorhanden sind (Bild 1 u. 2),

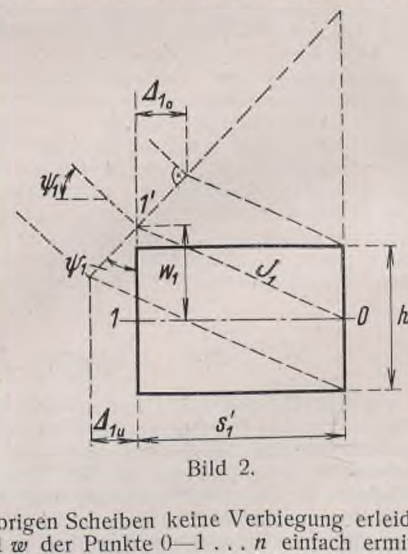


Bild 2.

während die übrigen Scheiben keine Verbiegung erleiden, lassen sich die Werte u, v und w der Punkte 0—1 . . . n einfach ermitteln. Denkt man sich einen Schnitt A—A (Bild 1 u. 2) geführt und verfolgt in der Schnittebene die durch die Verbiegung der Scheibe 0—1 hervorgerufenen Verschiebungen, so ergibt sich

$$(1)\quad \begin{cases} u_0 = v_0 = w_0 = 0 \\ w_1 = -\dfrac{s_1'^2 (2\,M_0 + M_1)}{6\,EJ_1} \\ \psi_1 = \dfrac{s_1' (M_0 + M_1)}{2\,EJ_1} \\ \Delta_{1o} = -\dfrac{\psi_1 h}{2} \qquad \Delta_{1u} = +\dfrac{\psi_1 h}{2} \\ w_x = w_1 - \psi_1 \sum_2^x s' \qquad [\text{für } x = 2, 3, 4 \ldots] \end{cases}$$

und schließlich

$$(2)\quad \begin{cases} u_0 = v_0 = w_0 = 0 \\ w_1 = -\dfrac{s_1'^2 (2\,M_0 + M_1)}{6\,EJ_1} \\ w_x = w_1 - \psi_1 \sum_2^x s' \\ u_{1o} = u_{xo} = -\dfrac{\psi_1 h}{2} \cdot \cos \alpha_1 \\ u_{1u} = u_{xu} = +\dfrac{\psi_1 h}{2} \cdot \cos \alpha_1 \\ v_{1o} = v_{xo} = -\dfrac{\psi_1 h}{2} \cdot \sin \alpha_1 \\ v_{1u} = v_{xu} = +\dfrac{\psi_1 h}{2} \cdot \sin \alpha_1 \qquad [\text{für } x = 2, 3, 4 \ldots]. \end{cases}$$

Hält man nun den Pfosten 1 fest und läßt nur auf die Scheibe 1—2 die Momente M_1 bzw. M_2 wirken, so ergibt sich als Einfluß dieser Scheibe auf die Verformung des Tragwerks:

$$(3)\quad \begin{cases} u_0 = v_0 = w_0 = 0 \\ u_1 = v_1 = w_1 = 0. \end{cases}$$

Mit 1 als Anfangspunkt und unter Zuhilfenahme eines Schnitts B—B können die analogen Gleichungen aufgestellt werden.

In der gleichen Weise wird der Einfluß der übrigen Scheiben auf die Verschiebungen u, v, w ermittelt.

2. Einfluß von Lagen- und Richtungsänderungen des Pfostens 0 auf die Verschiebungen. Verschiebungen u_0, v_0, w_0 des Pfostens 0 werden in voller Größe auch von den übrigen Knotenpunkten mitgemacht.

Für $\psi_u = 1$ (gegen den Pfeil gesehen ist eine Drehung im Uhrzeigersinn positiv; vgl. Bild 1) ergibt sich:

$$(4)\quad \begin{cases} w_0 = 0 \qquad w_1 = +s_1'' \qquad w_x = \sum_1^x s'' \\ u_{0o} = u_{0u} = u_{xo} = u_{xu} = 0 \\ v_{0o} = v_{xo} = +\dfrac{h}{2} \qquad v_{0u} = v_{xu} = -\dfrac{h}{2} \\ \qquad [\text{für } x = 1, 2, 3 \ldots]. \end{cases}$$

Für $\psi_v = 1$ (vgl. Bild 1) erhält man:

$$(5)\quad \begin{cases} w_0 = 0 \qquad w_x = -\sum_1^x s \\ u_{xo} = -\dfrac{h}{2} \qquad u_{xu} = +\dfrac{h}{2} \\ v_{xo} = v_{xu} = 0 \qquad [\text{für } x = 1, 2, 3 \ldots]. \end{cases}$$

$\psi_w = 1$ ergibt:

$$(6)\quad \begin{cases} u_0 = v_0 = w_0 = w_x = 0 \\ u_{xo} = u_{xu} = -r_x \cdot \sin \varphi_x \\ v_{xo} = v_{xu} = +r_x \cdot \cos \varphi_x \qquad [\text{für } x = 1, 2, 3 \ldots]. \end{cases}$$

Damit sind alle Gleichungen zur Berechnung der Verschiebungen gegeben. Verallgemeinerte Annahmen über Lage und Form der Scheiben können leicht berücksichtigt werden.

Dr. J. Schier.

Zuschrift an die Schriftleitung

(Ohne Verantwortung der Schriftleitung)

zum Aufsatz **„Das Prinzip der virtuellen Verrückungen und die Variationsprinzipien der Elastizitätstheorie“**, Stahlbau 1938, Heft 24, S. 185.

I.

Zu dem im Stahlbau 1939, Heft 4, S. 32, veröffentlichten Meinungsaustausch über den obengenannten Aufsatz möchte ich folgendes bemerken:

Die Grundursache der Meinungsverschiedenheit ist meines Erachtens darin zu suchen, daß der Fall des statischen Gleichgewichts, bei dem die Bewegung gleich Null ist, nicht richtig als ein labiler Spezialfall einer Bewegung erkannt wird.

Man stelle sich einen Dachbinder vor, der unter der Dachlast zum Gleichgewicht, zur Ruhe also, gekommen ist. Nun fällt Schnee. Unter der zusätzlichen Schneelast biegt sich der Dachbinder weiter durch, dabei legen alle Kräfte Wege zurück, bis beim Aufhören des Schneefalls wieder die Bewegungslosigkeit des Gleichgewichts eintritt. Da Schnee aus lauter winzigen Flöckchen besteht, kann man sagen, daß jedes einzelne Schneeflöckchen den Binder aus seinem Ruhezustand herausgebracht und zu einer Bewegung veranlaßt hat. Damit ist der Beweis erbracht, daß der Gleichgewichtszustand labil ist.

Im allgemeinen ist eine Kraft ohne Bewegung nicht denkbar; das wird sofort einleuchten, wenn man eine Kraft messen oder wägen will. Das ist nämlich nicht möglich, ohne daß man die Kraft eine Bewegung machen läßt. Nur in dem Spezialfalle des Gleichgewichts gibt es Kräfte ohne Bewegung, aber jede geringste Störung des Gleichgewichts macht sich wieder als Bewegung bemerkbar.

Bei langsam wachsenden Lasten sind nun die Bewegungszeiten der belastenden und der widerstehenden Kräfte gleich, sie können deshalb aus den Gleichungen gekürzt werden. Es bleiben dann für alle Punkte der Bewegung zwischen dem unbelasteten und dem Gleichgewichtszustand die bekannten Arbeitsgleichungen übrig.

Bei plötzlich aufprallenden Lasten sind die Geschwindigkeiten der belastenden und widerstehenden Kräfte nicht gleich. Es entstehen Schwingungen. Hier dürfen nicht Arbeitsgleichungen angewendet werden, sondern es müssen, weil ja die verschieden großen Zeiten nicht aus den Gleichungen gekürzt werden können, Leistungsgleichungen aufgestellt werden. Denn eine Bewegung kann nur durch eine mechanische Leistung verursacht oder aufgehalten werden.

Allerdings fehlen meines Wissens nach Versuchsresultate über die Widerstandsleistung des Stahles bei aufprallenden Lasten. Zerreißversuche macht man ja immer mit langsam schwellender Beanspruchung, wobei, wie gesagt, nur die Arbeit: Spannung mal Dehnung beobachtet wird. Versuchsketten über die Zeiten der Dehnung bei Lasten verschiedener Geschwindigkeit würden wahrscheinlich recht interessante Aufschlüsse bringen und dem Konstrukteur neue Möglichkeiten zur besseren Ausnutzung des Materials und mehr Sicherheit gegen Schwingungen der Bauwerke geben als alle heutigen Methoden der „statischen“ Berechnung, die die Hauptsache bei der Bewegung, die Zeit, vernachlässigen.

Solange man aber Statik, das ist Kraft ohne Weg, mit Elastizität, das ist Widerstandsleistung der Materie, also Kraft mal Weg durch Zeit, in dieselbe Gleichung bringen will, werden sich Unstimmigkeiten nicht vermeiden lassen.

W. Stübner, Köln-Bayenthal.

Erwiderung.

Zu Absatz 1 und 2. — Der Schneefall ist ein vorzügliches und anschauliches Beispiel für eine stetig von Null anwachsende Belastung, die so allmählich erfolgt, daß die Beschleunigungsglieder in den Ansatz für die potentielle Energie vernachlässigt werden dürfen. Warum aber der Gleichgewichtszustand beim Aufhören des Schneefalls labil ist, ist mir unerfindlich. Eine Gleichgewichtslage heißt stabil, wenn das System nach einer kleinen Störung von selbst in diese Lage zurückkehrt, sobald die Ursache der Störung beseitigt ist. Die Gleichgewichtslage heißt labil, wenn das System durch die kleinste Störung in eine Lage gebracht wird, aus der es nach Beseitigung der störenden Ursache nicht wieder von selbst in die ursprüngliche Gleichgewichtslage zurückkehrt.

Zu Absatz 3. — Man kann Kräfte nicht dadurch messen, daß man ihnen eine Bewegung erteilt. Man kann das Vorhandensein von Kräften nur erkennen an den Beschleunigungen, die sie den ihrer Wirkung unterworfenen Körpern erteilen, also an der Änderung der Geschwindigkeit dieser Körper nach Größe und Richtung. Man mißt die Kräfte, indem man diese Beschleunigungen mißt.

Zu Absatz 4. — Bei schneller genau wie bei langsamer Änderung der Kräfte sind die „Bewegungszeiten der belastenden und der widerstehenden Kräfte“ immer einander gleich, wenn man beide Zeiten im gleichen Maßstab und vom gleichen Zeitnullpunkt aus mißt und beide Kraftgruppen im gleichen Zeitpunkt untersucht. Was den von uns betrachteten Fall langsam wachsender Belastung vereinfacht, ist nicht eine andernfalls unmögliche Kürzung der Gleichung durch einen allen Gliedern gemeinsamen Zeitfaktor, sondern die nur in diesem Fall berechtigte Vernachlässigung der von den Beschleunigungskomponenten herrührenden Summanden in dem Ausdruck für die potentielle Energie. Die Gleichung des Prinzips der virtuellen Verrückungen in ihrer allgemein für langsame Belastungsvorgänge gültigen Form vereinfacht sich unter den von mir genau umrissenen, einschränkenden Voraussetzungen zu der bekannten Arbeitsgleichung nicht wegen der Kürzung durch einen Zeitfaktor, sondern wegen der Kürzung durch einen dimensionslosen Faktor. Dieser wird bei allen Summanden gleich nicht wegen der Langsamkeit der Belastung, sondern wegen der Kleinheit der Verschiebungen, der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes und der Proportionalität zwischen den äußeren Kräften und den Verschiebungswegen ihrer Angriffspunkte.

Zu Absatz 5. — Was man sich unter „Geschwindigkeiten der Kräfte“ vorstellen soll, ist mir unklar. Bei rascher Änderung der Belastung bleibt das Prinzip der virtuellen Verrückungen genau so gültig wie in dem von mir behandelten Fall. Es sind lediglich in dem Ausdruck für die potentielle Energie, die von den Beschleunigungen herrührenden Summanden hinzuzufügen. In jedem klassischen Werk über Mechanik sind die entsprechenden Gleichungen zu finden (vgl. z. B. Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik, S. 24 ff. Leipzig 1897; — Hamel, Elementare Mechanik, S. 469 ff. Leipzig und Berlin 1912; — Planck, Allgemeine Mechanik, S. 166 ff. Leipzig 1916; — Planck, Mechanik deformierbarer Körper, S. 25 ff und S. 65 ff. Leipzig 1919.) Das Prinzip der virtuellen Verrückungen liefert in jedem Falle, bei langsamer und bei rascher Änderung der Belastung eine Gleichung zwischen Größen von der

Dimension einer Arbeit, nicht einer Leistung. Vom mathematisch strengen Standpunkte aus ist es vielleicht vorzuziehen, diese Gleichungen noch durch ein Zeitdifferential zu dividieren und damit das Prinzip zu einem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten umzugestalten (s. Voß, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, IV, Bd. 1, S. 67). Dann erhält man Gleichungen zwischen Größen von der Dimension einer Leistung, aber in beiden Fällen, bei langsamer wie bei rascher Änderung der Belastung.

Wodurch eine gleichförmige Bewegung, also eine Bewegung mit nach Größe und Richtung konstanter Geschwindigkeit erzeugt wird, wissen wir im allgemeinen nicht. Wir können nur die Ursache einer Änderung der Größe oder der Richtung der Geschwindigkeit angeben, und die ist nicht eine Leistung, auch keine Arbeit, sondern eine Kraft.

Die Definitionen der Statik als „Kraft ohne Weg" und der Elastizität als „Widerstandsleistung der Materie, also Kraft mal Weg durch Zeit" sind so eigenartig, daß ich mich nicht dazu äußern möchte. Wenn ich den Sinn dieses Satzes richtig verstehe, wendet er sich dagegen, Summanden verschiedener Dimension $\left(\text{Kraft} + \frac{\text{Kraft} \times \text{Weg}}{\text{Zeit}}\right)$ in einer Gleichung zu vereinigen, also inkommensurable Größen zu addieren. Ein solcher Versuch ist mir allerdings bis heute in der Literatur nicht begegnet.

Dr. A. Schleusner, Berlin.

II.

Herr Dr. Schleusner stellt fest, daß meine Bemerkungen der Schulphysik widersprechen. Das war leicht zu merken.

Der Kernpunkt des Widerspruches liegt in der Definition der „Kraft". Die Hypothese von der Kraft als Ursache einer Beschleunigung wurde vor über 300 Jahren auf Grund von Fallversuchen aufgestellt. Galiläi stellte damals fest, daß die Fallbeschleunigung eines Körpers konstant ist. Weil nun auch das Gewicht des Versuchskörpers, seine Anziehungskraft zur Erde, konstant bleibt, setzte er Kraft gleich Beschleunigung. Das war eine Vermutung, die bisher noch nicht bewiesen ist.

Um diese Vermutung glaubhaft zu machen, stellte er folgende Hypothese auf. Er dachte sich die dauernd gleichförmig wirkende Anziehungskraft als eine ununterbrochene Kette von unendlich kurzen Impulsen auf den Fallkörper wirkend. Ferner nahm er an, daß die Wirkung eines jeden dieser Impulse durch die „Trägheit der Materie" weitergeführt werde. Das läßt sich zeichnerisch folgendermaßen darstellen:

Das Falldiagramm ist bekanntlich ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete von der Zeit, dessen andere von der Fallgeschwindigkeit gebildet wird (s. Bild). Die Dreieckfläche stellt den Fallweg dar. Jeder Impuls der Anziehungskraft ist diesem Dreieck ähnlich, denn der erste Impuls wirkt ja ohne Trägheit, muß also allein die Diagrammfläche des ersten Zeitabschnittes ausfüllen. Die ununterbrochene Kette der Impulse ist im Bilde durch die Kette der schwarzen Dreiecke am Rande dargestellt. Die senkrecht unter den schwarzen Dreiecken liegenden Flächenstreifen stellen dann die Wirkung der Trägheit der Materie dar.



Während nun der Fallweg, der durch einen Impuls erzeugt wird, durch den Flächeninhalt $^1/_2\,v\,t$ dargestellt ist, wird der Fallweg, der in der gleichen Zeit durch das Weiterwirken des Impulses infolge der „Trägheit" erzeugt wird, durch den Flächeninhalt $v\,t$ dargestellt. Das aber kann man auch von der gutmütigsten Trägheit nicht verlangen, daß sie das Doppelte leisten soll, was der aktive Impuls leistete.

Wenn wir das Falldiagramm im ganzen betrachten und uns vorstellen, daß die Impulse nach der Voraussetzung unendlich klein sein sollen, so bleibt die Wirkung der Trägheit fast ganz allein als Erzeugende des Fallweges übrig.

Diese Feststellungen können wohl als ausreichende Widerlegungen der Hypothese von der „Kraft" als Bewegungsursache angesehen werden. Wenn die Schulwissenschaft nicht weiß, wie eine gleichförmige Bewegung zustande kommt, was Herr Dr. Schleusner offen zugibt, dann ist das meines Erachtens ein deutlicher Hinweis, hier eine Untersuchung zu fordern, um Abhilfe zu schaffen.

Der Hauptunterschied zwischen einer Fallbewegung und einer Bewegung auf waagerechter Ebene besteht darin, daß die erstgenannte sofort und ohne Anstoß von selbst geschieht, wenn sie nicht verhindert wird, während die andere nur gezwungen geschieht, wenn nämlich ein bewegter Körper einen andern mitnimmt. Die Schulphysik will beide Bewegungsarten auf dieselbe Formel bringen.

Die „Kraft" ist auch als Ursache einer Bewegung auf waagerechter Ebene unzureichend, wie an einem Beispiel gezeigt werden soll.

Eine Kugel soll auf einer waagerechten Ebene rollen, sie soll durch den waagerechten Druck der Hand bewegt werden. Wenn wir der Einfachheit halber annehmen, daß der Widerstand konstant bleibt, nimmt die Geschwindigkeit geradlinig zu. Wenn die Kugel beispielsweise nach der ersten Sekunde die Geschwindigkeit von 1 m/sek hatte, so hat sie nach der zweiten Sekunde die Geschwindigkeit von 2 m sek. Nach der zehnten Sekunde müßte der Besitzer der Hand den Weltrekord der Kurzstreckenläufer überbieten, nach der zwanzigsten Sekunde sämtliche Schnellzüge überholen, und das alles, um einen ganz geringen Druck auf die Kugel auszuüben. Das Beispiel zeigt, daß es nicht die „Kraft" der Hand ist, sondern die „Leistung" der Beine oder vielmehr des ganzen Körpers, die die Kugel gleichförmig beschleunigt.

Um einen Körper auf einer waagerechten Ebene zu bewegen, braucht man immer eine bewegte Kraft, eine Kraft mal Geschwindigkeit, eine „Leistung". Ebenso braucht man eine Leistung, um einen bewegten Körper aufzuhalten.

Die potentielle Energie, die Herr Dr. Schl. anführt, kann auch nur dann eine Bewegung verursachen, wenn der Körper, der sie innehat, eine Bewegung macht, die diese Energie entspannt. Zum Beispiel muß eine gespannte Feder oder ein Dampfdruck sich entspannen, ein gehobenes Gewicht muß absinken, Wasser oder elektrischer „Strom" muß strömen, wenn dadurch eine Bewegung eines Körpers veranlaßt werden soll. Auch hier haben wir also die Leistung als Erzeugerin der Bewegung.

Den Stahlbauer interessieren nun hauptsächlich die Bewegungen in lotrechter Richtung infolge von Belastungen. Lasten sind Kräfte, die sich mit Fallgeschwindigkeit bewegen, wenn sie nicht daran gehindert werden, es sind also Leistungen. Sie können in ihrer Abwärtsbewegung durch Körper gehindert werden, die einer Formveränderung einen sogenannten „elastischen" Widerstand entgegensetzen und ihrerseits auf der Erde aufruhen. Der elastische Widerstand geschieht immer mit einer Bewegung. Die Lastbewegung wird zur Ruhe gebracht, wenn der Gleichgewichtszustand erreicht wird. In diesem Spezialfalle bleiben von den Leistungen nur die „Kräfte" übrig. Der Gleichgewichtszustand kann aber durch die allergeringste Störung wieder in den Bewegungsfall verwandelt werden. Das habe ich mit „labil" bezeichnet, was vielleicht nicht ganz korrekt ist, ich hoffe aber, daß jeder verstehen wird, was gemeint ist.

Eine „Widerstandsleistung der Materie", die man nach diesen Betrachtungen zugeben muß, ist natürlich nicht mit einer „Trägheit der Materie" zu vereinbaren. Aber auch die Atomschwingungen sind nicht mit einer Trägheit zu vereinbaren. Man sollte die mittelalterlichen Hypothesen einer genaueren Prüfung unterziehen.

Bei langsam wachsenden Lasten geht nun der Bewegungszustand allmählich und ohne Schwankungen in den Gleichgewichtszustand über. Bei plötzlich aufprallenden Lasten dagegen kommt es erst zu Schwingungen um den Gleichgewichtszustand, ehe Ruhe eintritt. Ich habe das damit erklärt, daß die Widerstandsleistung der Materie mit einer andern Geschwindigkeit geschieht wie die Lastleistung. Herr Dr. Schl. behauptet, daß die Bewegungszeiten immer gleich sind. Das hätte ich nicht erwartet, ich hätte zum Beispiel nicht geglaubt, daß Holz in derselben Zeit auf dieselbe Falleistung eines Körpers reagiert wie Stahl. Es wäre wünschenswert, die vorhandenen Versuchsresultate bekanntzugeben, damit der Konstrukteur sich bei Bauten, die Schwingungen befürchten lassen, darnach richten kann.

Auf alle Fälle sollte man, wenn man elastische Wirkungen berücksichtigen muß, nicht mit „Kräften", sondern mit „Leistungen" rechnen, dann braucht man keine virtuellen Verrückungen anzunehmen, sondern kann die wirklichen Wege in die Rechnungen einsetzen. Stübner.

Erwiderung.

Zum vorletzten Absatz der Erwiderung Stübners. — In den „Bemerkungen" Stübners ist von „Bewegungszeiten" die Rede. In der „Erwiderung" wird statt dessen von „Reaktionsgeschwindigkeiten" gesprochen. Daß die Reaktionsgeschwindigkeiten gleich sind, hatte ich nicht behauptet, wohl aber, daß die Bewegungszeiten gleich sind (vgl. Absatz 4 von Stübners „Bemerkungen" und meine Ausführungen zu diesem Absatz).

Zum letzten Absatz der „Erwiderung" Stübners. — Das Prinzip der virtuellen Verrückungen und das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie sind äquivalent. Um das Minimum der potentiellen Energie festzustellen, muß man im allgemeinen einen Variationsansatz machen. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen gibt lediglich im allgemeinen die einfachste Möglichkeit, den mathematischen Ausdruck für die erste Variation der potentiellen Energie zu finden. In dem Ausdruck für die potentielle Energie, die zum Minimum werden soll, stehen stets die wirklichen Wege. In meiner hier zur Diskussion stehenden Arbeit (Stahlbau 1938, Heft 24) habe ich das ausführlich dargestellt.

Zu den übrigen Ausführungen in der „Erwiderung" Stübners, die die „mittelalterlichen" Grundlagen der gesamten heutigen Physik umstürzen möchten, will ich lieber nichts sagen. Mir will scheinen, daß Herr Stübner weder Galilei noch die heutigen mittelalterlichen Physiker an Klarheit übertrifft. Dr. A. Schleusner, Berlin.

Wir schließen hiermit die Aussprache. Die Schriftleitung.

Herr Oberingenieur Alfons Schroeter, Berlin, teilt mit, daß er die von Herrn Professor Wanke, Prag, in Heft 23/24, 1939, durchgeführte Berechnung der Durchbiegung von Trägern mit absatzweise veränderlichem Trägheitsmoment in ähnlicher Weise schon im „Bauingenieur" 1928, Heft 47, und 1929, Heft 42, behandelt hat. Die Schriftleitung.

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt.
Verlag: Wilhelm Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W 9.
Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

DER STAHLBAU

Schriftleitung:
Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule
Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599
Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61
Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage zur Zeitschrift **DIE BAUTECHNIK** Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

13. Jahrgang | BERLIN, 2. Februar 1940 | Heft 3/4

Beitrag zur Berechnung kontinuierlicher Trägerroste.

Von Dipl.-Ing. **Wilh. Bültmann**, Hamburg.

Es wird ein Verfahren angegeben, nach welchem die symmetrischen Trägerroste, die auf drei Stützreihen gelagert sind und in der Mitte eines jeden der gleichen Felder durch gleiche Querscheiben bzw. Querträger verbunden sind, einfach und exakt berechnet werden können.

Einleitung.

Trägerroste werden in letzter Zeit ihrer lastverteilenden Wirkung wegen mit Vorliebe für die Ausbildung von Balkenbrücken verwendet. Allerdings darf in diesem Zusammenhang einmal darauf hingewiesen werden, daß erst die Lastverteilung geschlossener Körper vollkommen, also erheblich größer ist. Die Erkenntnis hat letzten Endes im Flugzeugbau dazu beigetragen, Flügel und Rümpfe moderner Maschinen zu beplanken. Dieser Vorzug könnte auch für Brücken mit obenliegender Fahrbahn nutzbar gemacht werden, wenn außer der oben meistens vorhandenen Abdeckung mit Buckelblechen usw. ein unterer Verband angeordnet würde.

Die Wirkung der der Lastverteilung dienenden Querscheiben kann zumindest allgemein und für den zweiseitig gelagerten Trägerrost als bekannt vorausgesetzt werden, da über dieses Tragwerk schon wiederholt veröffentlicht wurde [1] [2] [3].

So hat H. Holzwarth für eine Anzahl einfacher symmetrischer Flächentragwerke Formeln der Einflußlinienordinaten der Lagerdrücke in Tabellen zusammengefaßt. Die Formeln sind einmalig und nur für das betreffende Rostsystem zu verwenden. F. Leonhardt will die Rechnung durch Modellmessungen umgehen. F. Geiger glaubt das Problem der Rostwirkung für kontinuierliche Rostbrücken mittels Federkonstante exakt gelöst zu haben. Das angegebene Verfahren ist jedoch auch nur eine Näherung, da der gegenseitige Einfluß der Querträger nicht berücksichtigt wurde.

In dieser Arbeit soll ein Weg gezeigt werden, nach dem für den symmetrischen kontinuierlichen Trägerrost auf drei Stützreihen mit gleichen Querscheiben in den Feldmitten die genauen Querverteilungszahlen ohne Mühe angeschrieben werden können.

Querverteilungszahlen.

Die Querverteilungszahlen des Trägers (Querträger) auf 3, 4 und 5 elastischen Stützen sollen hier nochmals in allgemeiner, übersichtlich erscheinender Form angeführt werden.

Den Formeln liegen folgende Annahmen bzw. Voraussetzungen zugrunde:

Die elastische Formänderung der Stützen entspreche jeweils $P\alpha$, wobei P der Stützdruck ist und α von den Abmessungen und Querschnitten der Stützen sowie deren Elastizitätszahl abhängt (s. unten). Das Trägheitsmoment des Querträgers sei konstant. Die Verbindung des Querträgers mit den Stützen sei gelenkig. Falls der Querträger mit den Stützen biegesteif verbunden ist, werden die entsprechenden Biege- und Torsionswiderstände der Stützen unendlich klein, also gleich Null angenommen, so daß eine frei drehbare Lagerung vorausgesetzt werden kann.

1. Der Träger auf 3 elastischen Stützen (Bild 1).

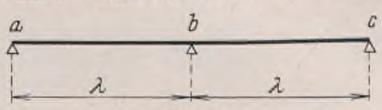


Bild 1.

Querverteilungszahlen für die elastische Randstütze a:

$$q_{aa} = 1 - \frac{1{,}5}{N} \qquad q_{ba} = \frac{3}{N} \qquad q_{ca} = -\frac{1{,}5}{N}.$$

Querverteilungszahlen für die elastische Stütze b:

$$q_{ab} = \frac{3}{N} \qquad q_{bb} = 1 - \frac{6}{N} \qquad q_{cb} = \frac{3}{N},$$

worin $N = c + 9$.

2. Der Träger auf 4 elastischen Stützen (Bild 2).

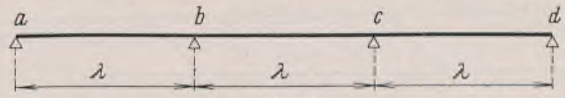


Bild 2.

Querverteilungszahlen für die elastische Randstütze a:

$$q_{aa} = 1 - \frac{3}{N_1} - \frac{1}{N_2} \qquad q_{ba} = \frac{3}{N_1} + \frac{3}{N_2}$$

$$q_{ca} = \frac{3}{N_1} - \frac{3}{N_2} \qquad q_{da} = -\frac{3}{N_1} + \frac{1}{N_2}.$$

Querverteilungszahlen für die elastische Stütze b:

$$q_{ab} = \frac{3}{N_1} + \frac{3}{N_2} \qquad q_{bb} = 1 - \frac{3}{N_1} - \frac{9}{N_2}$$

$$q_{cb} = -\frac{3}{N_1} + \frac{9}{N_2} \qquad q_{db} = \frac{3}{N_1} - \frac{3}{N_2},$$

worin $N_1 = 5c + 12$ und $N_2 = c + 20$.

3. Der Träger auf 5 elastischen Stützen (Bild 3).

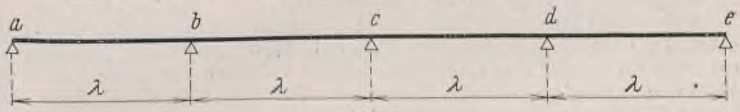


Bild 3.

Querverteilungszahlen der elastischen Randstütze a:

$$q_{aa} = 1 - \frac{6c + 54}{N_1} - \frac{1{,}5}{N_2}$$

$$q_{ba} = \frac{15c + 36}{N_1} + \frac{3}{N_2}$$

$$q_{ca} = -\frac{18c - 36}{N_1}$$

$$q_{da} = \frac{15c + 36}{N_1} - \frac{3}{N_2}$$

$$q_{ea} = -\frac{6c + 54}{N_1} + \frac{1{,}5}{N_2}.$$

Querverteilungszahlen für die elastische Stütze b:

$$q_{ab} = \frac{15c + 36}{N_1} + \frac{3}{N_2}$$

$$q_{bb} = 1 - \frac{48c + 54}{N_1} - \frac{6}{N_2}$$

$$q_{cb} = \frac{66c + 36}{N_1}$$

$$q_{db} = -\frac{48c + 54}{N_1} + \frac{6}{N_2}$$

$$q_{eb} = \frac{15c + 36}{N_1} - \frac{3}{N_2}.$$

Querverteilungszahlen für die elastische Stütze c:

$$q_{ac} = -\frac{18c - 36}{N_1}$$

$$q_{bc} = \frac{66c + 36}{N_1}$$

$$q_{cc} = 1 - \frac{96c + 144}{N_1}$$

[1] H. Holzwarth, Die symmetrisch ausgebildete Rostbrücke mit drei und vier Hauptträgern. Stahlbau 1936, S. 124.

[2] F. Leonhardt, Die vereinfachte Berechnung zweiseitig gelagerter Trägerroste. Bautechn. 1938, S. 535, erweiterter Sonderdruck, Berlin 1939, Wilh. Ernst & Sohn.

[3] F. Geiger, Kontinuierliche Rostträgerbrücken. Stahlbau 1938, S. 78.

Es ist

$$N_1 = (8\,c + 9)(16\,c + 24) - (11\,c + 6)^2$$

oder

$$N_1 = 7\,c^2 + 204\,c + 180$$

$$N_2 = 2\,c + 15$$

$$c = \frac{\beta}{\alpha}, \text{ worin } \beta = \frac{\lambda^3}{E\,J_q}.$$

Würden die elastischen Stützen durch Träger auf 2 Stützen gebildet und ist der Querträger in deren Mitten angeschlossen, dann ist $\alpha = \frac{L^3}{48\,E\,J}$ Durchbiegung des Trägers unter $P = 1$.

Für den einseitig eingespannten und einseitig frei drehbar gelagerten Träger ist bei gleichen Bedingungen $\alpha = \frac{7\,L^3}{768\,E\,J}$ wiederum die Durchbiegung unter $P = 1$.

Der symmetrische kontinuierliche Trägerrost auf drei Stützreihen mit je einer Querscheibe in den Feldmitten.

Bild 4 zeigt den Trägerrost, für den die genauen Querverteilungszahlen an Hand der oben angeschriebenen Gleichungen angegeben werden sollen. Der Trägerrost ist durchlaufend auf drei Stützreihen. Die beiden

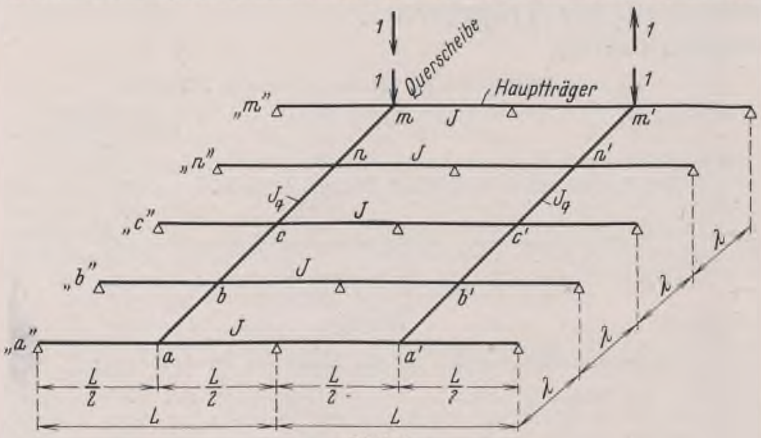


Bild 4.

Feldweiten seien gleich. Die Trägheitsmomente J der Hauptträger werden zunächst gleich und konstant angenommen. Das Trägheitsmoment der Querscheiben sei ebenfalls konstant. Die Entfernung der Hauptträger voneinander betrage λ. Für einen so ausgebildeten Trägerrost lassen sich die genauen Querverteilungszahlen sehr leicht errechnen. Die Anzahl der Hauptträger, für die nur entsprechende allgemeine Formeln, wie oben für 3, 4 und 5 Hauptträger, aufzustellen sind, ist bedeutungslos.

Allgemein ist zunächst zu beachten:

Steht eine Einzellast P über einem Querträger des angezeigten Trägerrostes, dann kann im Gegensatz zu [2]), S. 542, dieser Querträger dem Trägerrost nach einfachem statischen Grundgesetz natürlich nur diese Last vermitteln, und zwar so, daß die Summe der Verbund- bzw. Knotenkräfte an diesem Querträger gleich dieser Last P ist. Die Summe der Verbundkräfte am anderen, von außen unbelasteten Querträger ist dementsprechend immer gleich Null, weil dieser vom Rost gelöste, nur mit seinen Knotenkräften belastete Querträger im Gleichgewicht sein muß.

Wird der Trägerrost z. B. in a durch eine Last $P = 1$ belastet, dann sind die Lastanteile der einzelnen Hauptträger die Querverteilungszahlen bzw. Ordinaten der Quereinflußlinien des Trägers a. Die Querverteilungszahlen ergeben sich für dieses Rostsystem unter Ausnutzung der Symmetrie über den α-Wert mittels Gruppenlasten.

Wird der Rost in m und m' je mit $P = 1$ belastet, dann vermitteln die Querscheiben den Hauptträgern in entsprechenden Punkten gleiche Lastanteile, so daß jede Trägerhälfte für sich als einseitig eingespannter und einseitig frei drehbar gelagerter Träger behandelt werden kann. Für diesen Träger ist aber der α-Wert, der mit α_1 bezeichnet werden soll,

$$\alpha_1 = \frac{7\,L}{768\,E\,J}.$$

Die mit diesem α_1-Wert errechneten Querverteilungszahlen seien mit $q_{n\,m_1}$ bezeichnet.

Wird nun in m mit $P = 1$ und in m' mit $P = -1$ belastet, dann vermitteln die Querscheiben den Hauptträgern in den symmetrisch gelegenen Punkten offenbar wieder gleiche, aber entgegengesetzte Lastanteile, so daß die Momente über den mittleren Stützen Null werden. Bei dieser Belastung kann mithin jedes Feld wiederum für sich betrachtet und die Hauptträger als Träger auf zwei Stützen behandelt werden. Der α-Wert ist für diesen Fall

$$\alpha_2 = \frac{L^3}{48\,E\,J}.$$

Die mit diesem α_2-Wert errechneten Querverteilungszahlen seien mit $q_{n\,m_2}$ bezeichnet.

Die tatsächlichen Querverteilungszahlen ergeben sich nun durch Überlagerung der beiden Lastfälle zu

$$q_{n\,m} = \frac{q_{n\,m_1} + q_{n\,m_2}}{2}$$

für die Querscheibe $a\,m$ und ihr zugeordnet

$$q_{n'\,m} = \frac{q_{n\,m_1} - q_{n\,m_2}}{2}$$

an der Querscheibe $a'\,m'$.

Eine weitere allgemeine Aufstellung der Querverteilungszahlen als $f(c)$ an Hand der oben angeschriebenen Gleichungen für 3, 4 und 5 elastische Stützen ist umständlich und bringt kaum wesentliche Vorteile.

Obige Betrachtungen gelten natürlich auch für unterschiedliche Hauptträgerentfernungen und ungleiche, sowie über die Trägerlänge variable Trägheitsmomente, wenn nur Symmetrie zur Achse der Mittelstützen gewahrt ist. Die Gleichungen der Querverteilungszahlen sind für solche Fälle erneut zu ermitteln.

Der kontinuierliche Trägerrost mit vier Hauptträgern.

Der Trägerrost nach Bild 5 wird zur weiteren Behandlung des Rostproblems untersucht. Die Hauptträger laufen über zwei Felder mit den

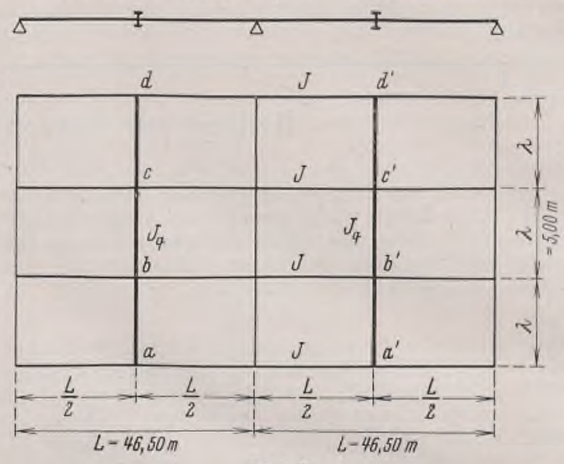


Bild 5.

Weiten $L = 46{,}50$ m und den Abständen $\lambda = 5$ m. Das Verhältnis der Trägheitsmomente ist

$$\frac{J}{J_q} = 6{,}39.$$

Nach den obigen Ausführungen ist nun

$$c_1 = \frac{\beta}{\alpha_1} = \frac{768\,\lambda^3\,J}{7\,L^3\,J_q}$$

$$c_1 = \frac{768 \cdot 5{,}00^3 \cdot 6{,}39}{7 \cdot 46{,}50^3} = 0{,}8994.$$

Mit $N_1 = 16{,}4970$ und $N_2 = 20{,}8994$

ist: $q_{a\,a_1} = 0{,}770\,30$, $q_{b\,a_1} = 0{,}325\,39$, $q_{c\,a_1} = 0{,}038\,31$, $q_{d\,a_1} = -0{,}134\,00$.

Mit

$$c_2 = \frac{\beta}{\alpha_2} = \frac{48\,\lambda^3\,J}{L^3\,J_q} \qquad c_2 = \frac{48 \cdot 5{,}00^3 \cdot 6{,}39}{46{,}5^3} = 0{,}3935$$

und $N_1 = 13{,}9675$

und $N_2 = 20{,}3935$

ist: $q_{a\,a_2} = 0.7362$,

$q_{b\,a_2} = 0{,}3619$,

$q_{c\,a_2} = 0{,}0677$,

$q_{d\,a_2} = -0{,}1658$.

Die tatsächlichen Querverteilungszahlen sind nun:

$$q_{a\,a} = \frac{0{,}7703 + 0{,}7362}{2} = 0{,}7533$$

$$q_{b\,a} = 0{,}3436$$

$$q_{c\,a} = 0{,}0530$$

$$q_{d\,a} = -0{,}1499$$

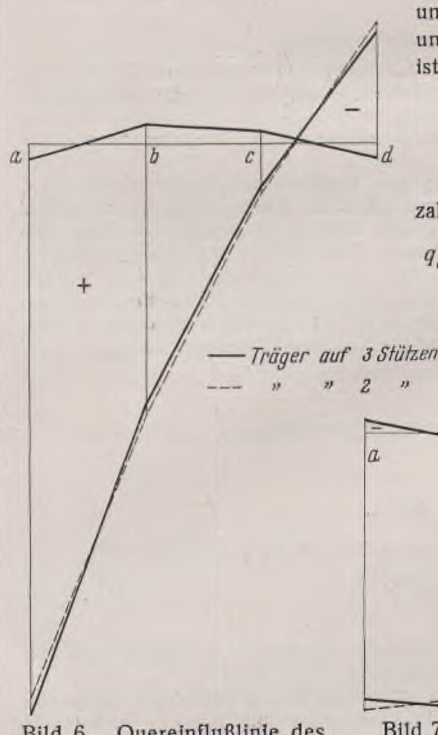


Bild 6. Quereinflußlinie des Randträgers a (4 Hauptträger).

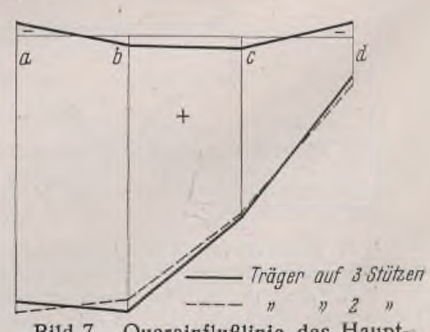


Bild 7. Quereinflußlinie des Hauptträgers b (4 Hauptträger).

$$q_{a'a} = \frac{0,7703 - 0,7362}{2} = 0,0171$$

$$q_{b'a} = -0,0183 \qquad q_{c'a} = -0,0147 \qquad q_{d'a} = +0,0159.$$

Die Querverteilungszahlen des Trägers b ergeben sich mit:

$$q_{ab_1} = 0,3254 \qquad q_{bb_1} = 0,3875 \qquad q_{cb_1} = 0,2488 \qquad q_{db_1} = 0,0383$$

und

$$q_{ab_2} = 0,3619 \qquad q_{bb_2} = 0,3439 \qquad q_{cb_2} = 0,2265 \qquad q_{db_2} = 0,0677$$

zu

$$q_{ab} = \frac{0,3254 + 0,3619}{2} = 0,3436$$

$$q_{bb} = 0,3657 \qquad q_{cb} = 0,2377 \qquad q_{db} = 0,0530$$

$$q_{a'b} = \frac{0,3254 - 0,3619}{2} = -0,0183$$

$$q_{b'b} = +0,0109 \qquad q_{c'b} = +0,0112 \qquad q_{d'b} = -0,0147.$$

In den Bildern 6 u. 7 sind mittels der Querverteilungszahlen die Quereinflußlinien der Träger a und b über dem Rostquerschnitt aufgetragen worden. Die Einflußlinien sind zwischen den einzelnen Trägern geradlinig gezeichnet, da die Ausbildung der die Lasten auf die Hauptträger übertragenden Konstruktionsteile (Zwischenquerträger, Fahrbahnplatte bei Brücken) diese Annahme zumeist rechtfertigt. Zum Vergleich sind weiterhin die Querverteilungszahlen für den Trägerrost auf zwei Stützreihen mit der Stützweite L aufgetragen. Der Unterschied ist klar erkenntlich. Ein Vergleich mit den Ergebnissen der Arbeit nach [3]) ist leider nicht möglich, da die in dem dortigen Beispiel errechneten Werte zum Teil falsch sind, wie die Gegenüberstellung der einander zugeordneten Querverteilungszahlen zeigt. Es muß sein mit den Zeichen dieser Arbeit $q_{ab} = q_{ba}$ und der Symmetrie wegen auch $q_{db} = q_{ca}$, was hier erfüllt ist.

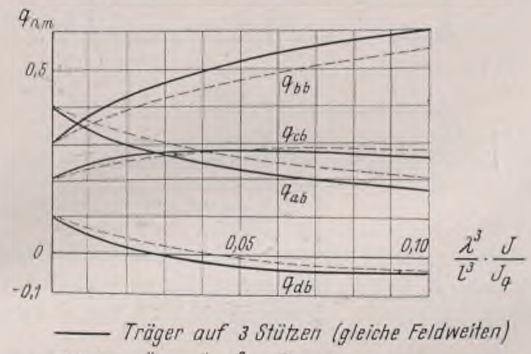


Bild 9. Querverteilungszahlen des Hauptträgers b (4 Hauptträger).

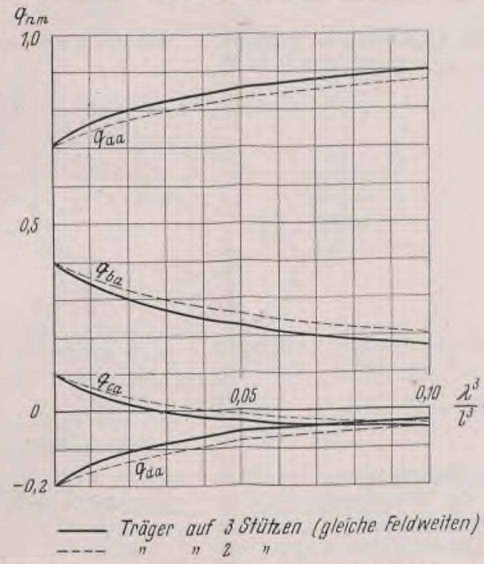


Bild 8. Querverteilungszahlen des Randträgers a (4 Hauptträger).

Ein anschauliches Bild geben die in Bild 8 u. 9 über $\frac{\lambda^3 J}{l^3 J_q}$ aufgetragenen Querverteilungszahlen des Randhauptträgers a und Hauptträgers b des Rostes mit vier Hauptträgern. Zum Vergleich wurden wiederum die Querverteilungszahlen des Trägerrostes auf zwei Stützreihen eingetragen. Für den Abszissenwert Null ergeben sich die Querverteilungszahlen bei starrem Querträger, während im Unendlichen $J_q = 0$ oder $J = \infty$ die Querverteilungszahlen $q_{aa} = 1$ und $q_{bb} = 1$ werden. Die zugehörigen Querverteilungszahlen am gegenüberliegenden Querträger sind in Bild 10 u. 11 zur Ergänzung dargestellt worden. Für den starren Querträger $\frac{\lambda^3 J}{l^3 J_q} = 0$ sind die Werte Null.

Im Bereich praktischer Steifigkeitszahlen nehmen sie endliche Werte an, die mit der Anzahl der zum Rost vereinigten Hauptträger ansteigen, wie Bild 12, in dem die Querverteilungszahlen q_{aa} und $q_{a'a}$ der Randträger von Rosten mit 3, 4 und 5 Hauptträgern dargestellt sind, zeigt. Mit zunehmender Steifigkeit klingen die $q_{a'a}$ schneller ab als die $q_{b'b}$. Bild 12 zeigt außerdem noch, daß die q_{aa} mehrstäbiger Roste sehr bald nahezu gleich sind.

Auswertung der Quereinflußlinien.

Sind beide Felder symmetrisch zur Achse der mittleren Stützenreihe belastet, dann wird man sich zur Ermittlung der statischen Größen der Querverteilungszahlen q_{nm1} bedienen und erhält über die durchlaufenden Träger auf 3 und 5 starren Stützen gemäß den Ausführungen nach[2]) (S. 540) exakte Werte. Für antimetrische Belastung liefert q_{nm_2} diese Werte. Bei beliebiger Belastung lassen sich die statischen Größen wiederum über Träger auf 3 und 5 starren Stützen ermitteln, wobei allerdings der Anteil der $q_{n'm}$ zusätzlich zu berücksichtigen ist, sofern man genaue statische Größen ermitteln will.

Schluß.

Nach den obigen Ausführungen können unter Ausnutzung der Symmetrie für die angezeigten Trägerroste die genauen Querverteilungszahlen sehr einfach und leicht errechnet werden. Wenn auch der Einfluß bei dieser Art Durchlaufträger nicht allzu bedeutend ist, so kann dieses Ergebnis jedoch nicht verallgemeinert werden und die Querverteilungszahlen an unbelasteten Querträgern einfach vernachlässigt werden, da z. B. beim zweiseitig gelagerten Trägerrost mit Querträgern in den Trägerdritteln diese Werte 30% der Querverteilungszahlen des belasteten Querträgers betragen können, und zwar, das sei hier ausdrücklich betont, im Bereiche praktischen Steifigkeitsgrades.

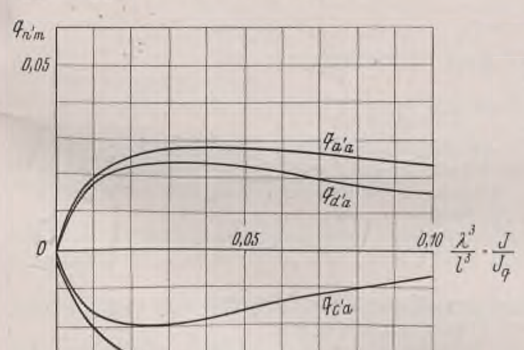


Bild 10. Querverteilungszahlen des Randträgers a am unbelasteten Querträger (4 Hauptträger).

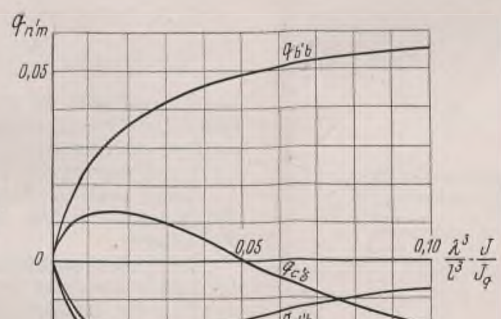


Bild 11. Querverteilungszahlen des Hauptträgers b am unbelasteten Querträger (4 Hauptträger).

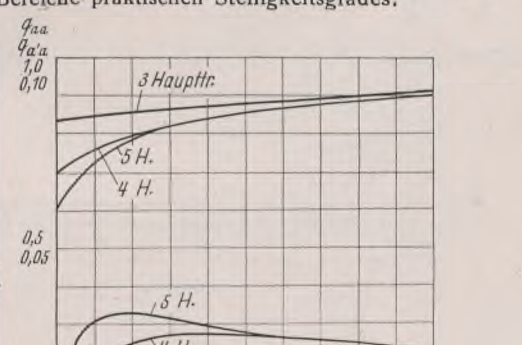


Bild 12. Querverteilungszahlen q_{aa} und $q_{a'a}$ der Randträger von symmetrischen Rosten mit 3, 4 und 5 Hauptträgern.

Die Kopplung oder gegenseitige Beeinflussung lastverteilender Querscheiben.

Von Studienrat Dr.-Ing. **Friedrich Geiger**, Erfurt.

Als Ergänzung meiner Veröffentlichungen in Stahlbau 1938, Heft 10, 11 u. 26, ferner 1939, Heft 18, und Bautechn. 1939, Heft 29, S. 418, soll im folgenden ein einfaches Verfahren gezeigt werden, das den Einfluß der Nachbarscheiben berücksichtigt. An durchgeführten Beispielen wird die Genauigkeit mit der sonst üblichen Rechnung der Baustatik verglichen.

Einleitung.

In der Literatur findet man bisher nur ein einziges Verfahren, das die gegenseitige Beeinflussung oder Kopplung mehrerer lastverteilender Querscheiben behandelt, das in dem Aufsatz: „Lastverteilende Querverbindungen", erschienen in Bauing. 1927/28 und in Z. öst. Ing.- u. Archit.-Ver. 1928, von Faltus veröffentlicht wurde.

Faltus macht den Versuch, die Zunahme der Querverteilung gegenüber einem Querträger annähernd mit einem „ideellen Querträger" zu erfassen. Man gibt der belasteten Querscheibe eine höhere Steifigkeit. An die Stelle sämtlicher Querscheiben, die jede das Trägheitsmoment J_Q haben, tritt eine einzelne Querscheibe mit einem ideellen Trägheitsmoment

$$J_{\text{ideell}} = i\, J_Q,$$

das so bemessen sein muß, daß die Querverteilung gleich wird der Summe aller einzeln wirkenden Querscheiben.

Faltus ermittelt den Faktor i aus der Biegelinie zu

$$i = \frac{\Sigma \zeta_{mr}}{\zeta_{mm}}$$

zum Beispiel für das in Bild 1 dargestellte Rostsystem.

Diese Faltusschen Werte sind zu groß, weil schon nach Hinzufügen eines zweiten Querträgers die Biegelinie so verändert wird, daß einem dritten Querträger nicht das dem Durchbiegungswert entsprechende Maß der Querverteilung zufällt.

Die in jüngster Zeit durchgeführten Versuche von Leonhardt an Modellträgerrosten im Institut für die Materialprüfungen des Bauwesens an der Technischen Hochschule in Stuttgart, veröffentlicht in Bautechn. 1938, Heft 40/41, sowie die schon früher im Prüfraum Gaber der Technischen Hochschule Karlsruhe durchgeführten Versuche bestätigen diese Annahme. Die bei diesen Versuchen ermittelten i-Werte sind wesentlich kleiner als die Faltusschen Werte der Biegelinie.

Allein für die Praxis mit den verschiedensten Rostsystemen genügen die Versuche nicht. Es erscheint um so mehr angezeigt, den Einfluß der Kopplung auch rechnerisch angeben zu können.

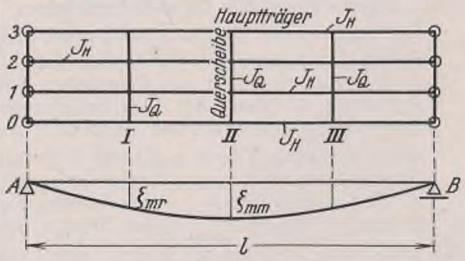


Bild 1.

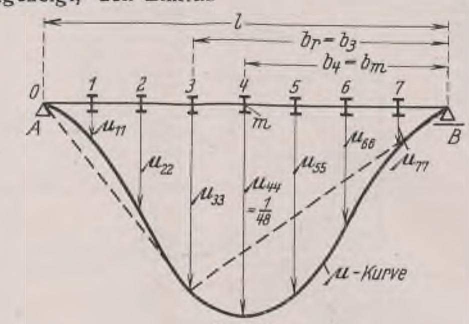


Bild 2.

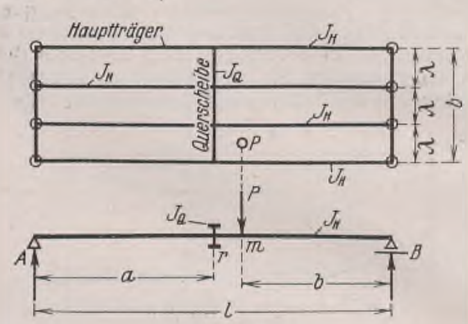


Bild 2a.

Vorgang.

Geht man also nicht wie Faltus von der Biegelinie aus, sondern von der von mir entwickelten μ-Kurve, die die Federkonstante oder Bettungszahl ausdrückt, so erhält man eine sogenannte ideelle Bettungszahl, in der das gleichzeitige Mitwirken aller Querscheiben ausgedrückt werden kann.

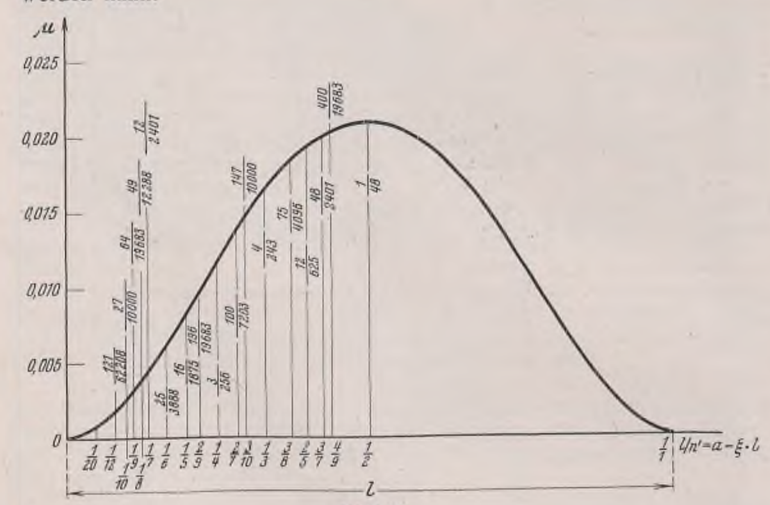


Bild 3.

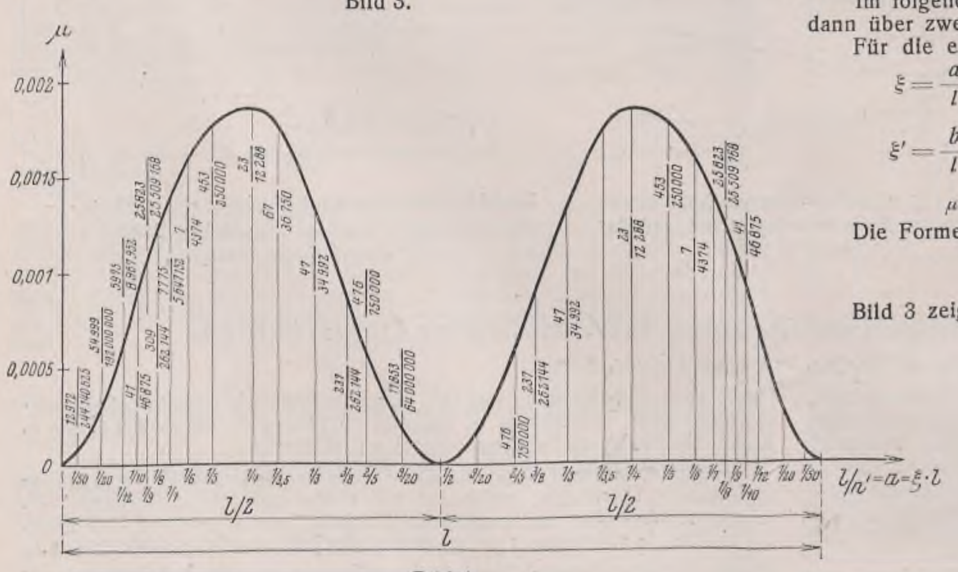


Bild 4.

Bezeichnet man mit μ_{21} den Bettungszahleinfluß — gleich Kopplungsglied — an der Stelle 2 durch eine Querscheibe an der Stelle 1, so erhält man allgemein für eine betrachtete Lastverteilungsstelle m:

$$\mu_{m_{\text{ideell}}} = \mu_{m_m} + \mu_{m_1} + \mu_{m_2} + \mu_{m_3} + \ldots \mu_{m_n} \ldots$$

oder

$$\text{(1)} \qquad \mu_{m_{\text{ideell}}} = \mu_{m_m} + \sum_{r=1}^{r=n} \mu_{m_r},$$

wenn mit n die Anzahl der vorhandenen Querscheiben bezeichnet wird; r = beliebige Querscheibenstelle.

Das Glied μ_{m_m} ist der μ-Wert des Querscheibenortes m aus der μ-Kurve.

Die Kopplungsglieder μ_{m_1}, μ_{m_2} usw. erhält man ebenfalls aus der μ-Kurve mit der folgenden Reduktionsformel zu

$$\text{(2)} \qquad \mu_{m_r} = \mu_{r_r} \cdot \frac{b_m}{b_r}.$$

Hierin ist b_m der Abstand der betrachteten Querscheibenstelle, gemessen vom rechten Auflager B, und b_r der Abstand der zu koppelnden Querscheibe vom rechten Auflager B. Entsprechend wird von A ausgegangen.

In Bild 2 ist die μ-Kurve für ein Beispiel eines Trägers auf zwei Stützen mit sieben Querscheiben gezeichnet.

Für die mittlere Querscheibe, also $m = 4$ und $n = 7$ Querscheiben, ist der ideelle μ-Wert

$$\mu_{m_{\text{ideell}}} = \mu_{4_{\text{ideell}}} = \mu_{44} + \mu_{45} + \mu_{42} + \mu_{46} + \mu_{41} + \mu_{47}.$$

Die einzelnen μ-Glieder bestimmen sich wie folgt:

$$\mu_{44} = \frac{1}{48}$$

$\mu_{43} = \mu_{45}$ aus Symmetrie, ebenso $\mu_{42} = \mu_{46}$ und $\mu_{41} = \mu_{47}$

$$\mu_{43} = \mu_{33} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{8}} = \frac{75}{4096} \cdot \frac{8}{10} = \frac{15}{1024}.$$

Die μ-Kurve.

Die μ-Kurve ist der geometrische Ort der Durchbiegungen für veränderliche Querscheibenabstände a, also jener Durchbiegungen, die stets am Orte der Last $P = 1$ entstehen. Während die Biegelinie eines Trägers die Durchbiegung für eine bestimmte feste Laststelle ist.

Trägt man in einem rechtwinkligen Koordinatensystem als Abszisse die Querscheibenorte und als Ordinate die μ-Werte auf, so erhält man die μ-Kurve.

Im folgenden werden die μ-Kurven für einen Rost über eine Öffnung, dann über zwei und drei Öffnungen angegeben.

Für die entwickelten Berechnungsformeln sei noch angegeben, daß

$\xi = \frac{a}{l}$ der Abstand des betrachteten Querscheibenortes vom linken Auflager A ist und

$\xi' = \frac{b}{l}$ der Abstand vom rechten Auflager B.

μ-Kurve des Trägers auf zwei Stützen.

Die Formel für den μ-Wert lautet:

$$\mu = \frac{1}{3} \cdot \xi^2 \, \xi'^2.$$

Bild 3 zeigt den graphischen Verlauf.

μ-Kurve des Trägers auf drei Stützen.

Hierzu Bild 4.

$$\mu = \frac{1}{3} \cdot \xi^2 \, \xi'^2 - \frac{3}{16} \cdot \xi^2 + \frac{1}{2} \cdot \xi^4 - \frac{1}{3} \cdot \xi^6.$$

μ-Kurve des Trägers auf vier Stützen.

Hierzu Bild 5.

Im Feld 1 lautet die Formel für den μ-Wert:

$$\mu_1 = \frac{1}{3} \cdot \xi^2 \, \xi'^2 - \frac{32}{135} \cdot \xi^2 + \frac{14}{15} \cdot \xi^4 - \frac{6}{5} \cdot \xi^6.$$

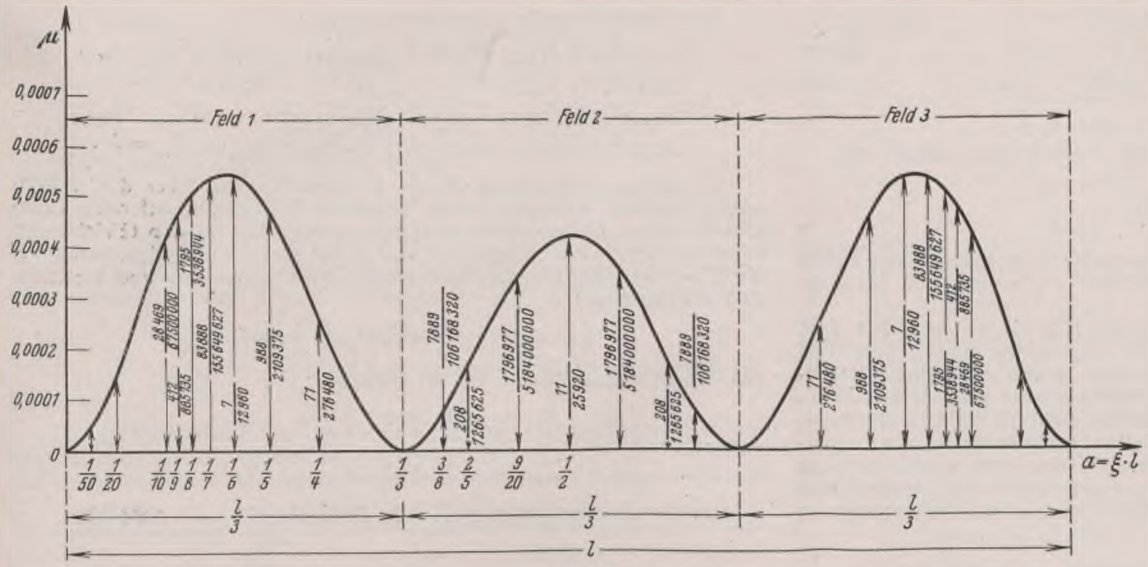


Bild 5.

Im Feld 2 lautet die Formel für den μ-Wert:

$$\mu_2 = \frac{1}{3} \cdot \xi^2 \xi'^2 - \frac{4}{405} + \frac{101}{405} \cdot \xi - \frac{284}{135} \cdot \xi^2 + \frac{101}{15} \cdot \xi^3 - \frac{163}{15} \cdot \xi^4 + 9 \cdot \xi^5 - 3 \cdot \xi^6$$

Man geht also in dem vorgezeichneten Weg von den bekannten μ-Werten aus. Zuerst ermittelt man den Wert für eine einzelne Querscheibe und vermehrt diesen um den Einfluß der noch vorhandenen anderen Querscheiben.

Für den Fall, daß man keine μ-Kurventafeln vorliegen hat, soll eine weitere Rechnungsmöglichkeit des ideellen μ-Wertes angegeben werden.

Die Kopplungsglieder werden aus den Formeln der μ-Werte entwickelt.

Der ideelle Gesamtwert lautet:

(1a) $$\mu_{m_{\text{ideell}}} = \sum_{r=1}^{r=n} \mu_{m_r}$$

n = Zahl der Querscheiben,
r = Querscheibenstelle.

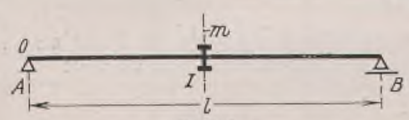


Bild 6.

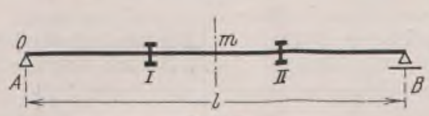


Bild 7.

Das Kopplungsglied:

a) für den Träger auf zwei Stützen mit der Biegezahlgleichung:

(2a) $$\mu_{m_r} = \frac{1}{3} \cdot \xi_m^2 \xi_r^2,$$

b) für den Träger auf drei Stützen:

(2b) $$\mu_{m_r} = \frac{1}{3} \cdot \xi_m^2 \xi_r^2 - \frac{3}{16} \cdot \xi_m^2 + \frac{1}{2} \cdot \xi_m^4 - \frac{1}{3} \cdot \xi_m^6.$$

Hierin ist:

$\xi_m = \frac{a_m}{l}$ festgehaltene betrachtete Querscheibenstelle.

$\xi_r\, l = b_r$ Abstand vom Auflager B.

Liegt z. B. ein Trägerrost mit einer Querscheibe in Rostmitte, wie Bild 2a zeigt, vor, bei dem eine Einzellast P zwischen Haupt- und Querträger steht, so erhält man für die Hauptträgerschnittstelle m die Federkonstante zu

$$\mu_{m_{\text{ideell}}} = \frac{1}{3} \left(\frac{a}{l}\right)^2 \left(\frac{b}{l}\right)^2.$$

Würde die Last direkt über dem Querträger stehen, so wäre für die Hauptträgerschnittstelle r die Federkonstante

$$\mu_r = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{48}.$$

Die Abstände a und b dürfen sich nie überschneiden, d. h. die Summe $a + b$ kann nie mehr sein als die Stützweite l.

Für die Genauigkeit der Erfassung der gegenseitigen Beeinflussung lastverteilender Querscheiben werden im folgenden zwei Vergleiche herangezogen. Die erste Gegenüberstellung erfolgt an einer mittleren Querverteilung mit den Ergebnissen an Modellträgerrosten von Leonhardt. Der zweite Vergleich geschieht an der Durchrechnung zweier Beispiele nach den allgemein üblichen Methoden der Baustatik. In beiden Fällen erhält man gute Ergebnisse. In einer besonderen Veröffentlichung werden weitere Rechnungsbeispiele an Trägerrosten durch Versuche bestätigt.

Für Träger auf mehr als drei Stützen, ebenso für ungleiche Feldweiten lassen sich ohne Schwierigkeit Formeln für die Erfassung der Kopplungsglieder angeben.

1. Vergleichsbeispiele einer mittleren Querverteilung mit den Versuchsergebnissen von Leonhardt.

Rost mit einer Querscheibe in Feldmitte (Bild 6).

Der Wert:

$$\mu_{m_{\text{ideell}}} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \underline{\frac{1}{48}}.$$

Der i-Faktor nach Faltus und Leonhardt:

$$i = \frac{\mu_{m_{\text{ideell}}}}{\mu_{m_m}} = \frac{\frac{1}{48}}{\frac{1}{48}} = \underline{1{,}0.}$$

Rost mit zwei Querscheiben in den Drittelpunkten (Bild 7).

Der Wert:

$$\mu_{m_{\text{ideell}}} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right) \cdot 2 = \underline{\frac{1}{54}}.$$

Der Faktor i:

$$i = \frac{\frac{1}{54}}{\frac{1}{48}} = \sim \underline{0{,}90}$$

gegenüber dem errechneten Wert von Faltus: $i = 1{,}874$
und dem Versuchswert von Leonhardt: $i = 1{,}0$.

Rost mit drei Querscheiben in den Viertelpunkten (Bild 8).

Der Wert:

$$\mu_{m_{\text{ideell}}} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \underline{\frac{1}{32}}.$$

Der Faktor i:

$$i = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{48}} = 1{,}5$$

gegenüber Faltus: $i = 2{,}376$
und Leonhardt: $i = 1{,}5$.

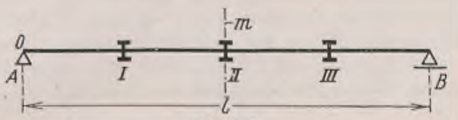


Bild 8.

Rost mit vier Querscheiben in den Fünftelpunkten (Bild 9).

Der Wert:

$$\mu_{m_{\text{ideell}}} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \underline{\frac{1}{30}}.$$

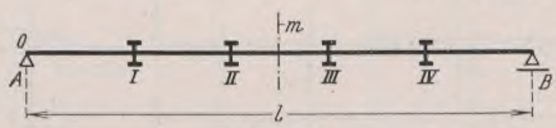


Bild 9.

Der Faktor i:

$$i = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{48}} = \underline{1{,}6}$$

gegenüber Faltus: $i = 3{,}10$
und Leonhardt: $i = 1{,}6$.

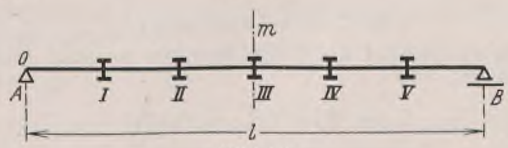


Bild 10.

Rost mit fünf Querscheiben in den Sechstelpunkten (Bild 10).

Der Wert:

$$\mu_{m_{\text{ideell}}} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{6}\right)^2 = \underline{\frac{152}{3456}} = \underline{\frac{19}{432}}.$$

Der Faktor i:

$$i = \frac{\frac{19}{432}}{\frac{1}{48}} = \underline{\underline{2,1}}$$

gegenüber Faltus: $i = 3,668$
und Leonhardt: $i = 2,0.$

Ergebnis.

Die Gegenüberstellung der gefundenen Werte mit denen von Faltus und den Versuchsergebnissen von Leonhardt ergibt mit den letzteren genaue Übereinstimmung.

Die vorliegenden Formeln sind geeignet für jeden speziellen Fall, insbesondere auch für kontinuierliche Trägerroste, die gegenseitige Beeinflussung lastverteilender Querscheiben in die Rechnung mit aufzunehmen. Gerade für Mehrfeldroste fehlen bisher die i-Werte.

In dem von mir vorgeschlagenen Rechnungsgang der Ermittlung der auf die Hauptträger eines Rostes entfallenden Lastanteile einer Querverteilung ist die jeweilige Kenntnis des i-Wertes nicht erforderlich, um dann mit einem ideellen Trägheitsmoment weiterzurechnen, sondern man geht mit dem ermittelten ideellen μ-Wert direkt in die Aufstellung der Quereinflußlinien hinein, aus denen man dann in bekannter Weise die Lastanteile erhält.

Für eine Reihe sich wiederholender Rostsysteme lassen sich sehr einfach nach dem Vorausgegangenen die ideellen μ-Werte angeben, z. B. für einen Trägerrost auf zwei Stützen mit drei Querscheiben (Bild 8) ist für die Querscheibe I:

$$\mu_{\mathrm{I}_{\text{ideell}}} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{128}}}$$

und die Querscheibe II:

$$\mu_{\mathrm{II}_{\text{ideell}}} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{32}}}.$$

2. Vergleichsbeispiele über den Einfluß des gleichzeitigen Mitwirkens aller lastverteilenden Querscheiben eines Rostes mit der genauen in der Baustatik üblichen Methode und dem von mir entwickelten Rechenverfahren.

Allgemeines.

Als Beispiele sollen zwei Rostbrücken angenommen werden, die häufig in der Praxis auftreten. Die eine Rostbrücke sei über eine Öffnung gespannt, die andere über zwei Öffnungen. Für das in der Baustatik genaue und übliche Verfahren werden die Elastizitätsgleichungen mit den Querscheibenmomenten als statisch Unbestimmte an den Kreuzungsstellen der Roststäbe angenommen. Die Auflösung dieser Gleichungen wird am schnellsten mit dem Belastungs-Umordnungs-Verfahren (B. U.) von Andree durchgeführt.

1. Beispiel.

Für eine Rostträgerbrücke auf zwei Stützen, bestehend aus vier Hauptträgern und zwei lastverteilenden Querscheiben (Bild 11), sind die Ordinaten der Quereinflußlinien zu ermitteln.

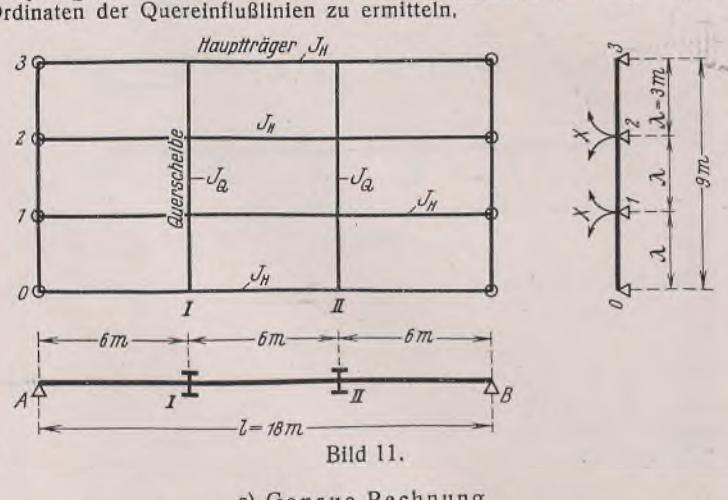


Bild 11.

a) Genaue Rechnung.

Das Trägheitsmoment der Hauptträger sei zehnmal größer als das der Querscheiben, also

$$J_H = 1 \quad \text{und} \quad J_Q = \frac{1}{10}.$$

Die statisch unbestimmten Größen werden mit $X_{\mathrm{I}1}$ zum Beispiel bezeichnet. Der eine Zeiger mit dem römischen Buchstaben gibt die Querscheibe und der andere mit dem arabischen Buchstaben den kreuzenden Hauptträger an. Das vorliegende Rostsystem enthält demnach folgende vier unbekannte Momente der Querscheiben in den Kreuzungspunkten: $X_{\mathrm{I}1}$, $X_{\mathrm{I}2}$, $X_{\mathrm{II}1}$ und $X_{\mathrm{II}2}$.

Die Elastizitätsgleichungen lauten damit:

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathrm{I}1,\mathrm{I}1} X_{\mathrm{I}1} + \delta_{\mathrm{I}1,\mathrm{I}2} X_{\mathrm{I}2} + \delta_{\mathrm{I}1,\mathrm{II}1} X_{\mathrm{II}1} + \delta_{\mathrm{I}1,\mathrm{II}2} X_{\mathrm{II}2} &= \delta_{0,\mathrm{I}1} \\
\delta_{\mathrm{I}2,\mathrm{I}1} X_{\mathrm{I}1} + \delta_{\mathrm{I}2,\mathrm{I}2} X_{\mathrm{I}2} + \delta_{\mathrm{I}2,\mathrm{II}1} X_{\mathrm{II}1} + \delta_{\mathrm{I}2,\mathrm{II}2} X_{\mathrm{II}2} &= \delta_{0,\mathrm{I}2} \\
\delta_{\mathrm{II}1,\mathrm{I}1} X_{\mathrm{I}1} + \delta_{\mathrm{II}1,\mathrm{I}2} X_{\mathrm{I}2} + \delta_{\mathrm{II}1,\mathrm{II}1} X_{\mathrm{II}1} + \delta_{\mathrm{II}1,\mathrm{II}2} X_{\mathrm{II}2} &= \delta_{0,\mathrm{II}1} \\
\delta_{\mathrm{II}2,\mathrm{I}1} X_{\mathrm{I}1} + \delta_{\mathrm{II}2,\mathrm{I}2} X_{\mathrm{I}2} + \delta_{\mathrm{II}2,\mathrm{II}1} X_{\mathrm{II}1} + \delta_{\mathrm{II}2,\mathrm{II}2} X_{\mathrm{II}2} &= \delta_{0,\mathrm{II}2}.
\end{aligned}$$

Die Belastungszustände $X = -1$ erstrecken sich über drei Hauptträger und den zwischen ihnen liegenden Teil der betreffenden Querscheibe, alles übrige ist dann spannungslos. Die in den Gleichungen enthaltenen Verschiebungsgrößen stellen bei gleichem Elastizitätsmodul E die EJ-fachen Konstanten der Elastizitätsgleichungen dar und ermitteln sich allgemein zu:

$$\delta_{\mathrm{I}1,\mathrm{I}2} = \int M_{\mathrm{I}1} M_{\mathrm{I}2} \cdot \frac{J_c}{J} \cdot dx,$$

aus den Momentenflächen für die Zustände:

$$X_{\mathrm{I}1} = -1 \quad \text{und} \quad X_{\mathrm{I}2} = -1,$$

entsprechend

$$X_{\mathrm{II}1} = -1 \quad \text{und} \quad X_{\mathrm{II}2} = -1.$$

System der Momentenflächen für die Zustände $X = -1$ (Bild 12).

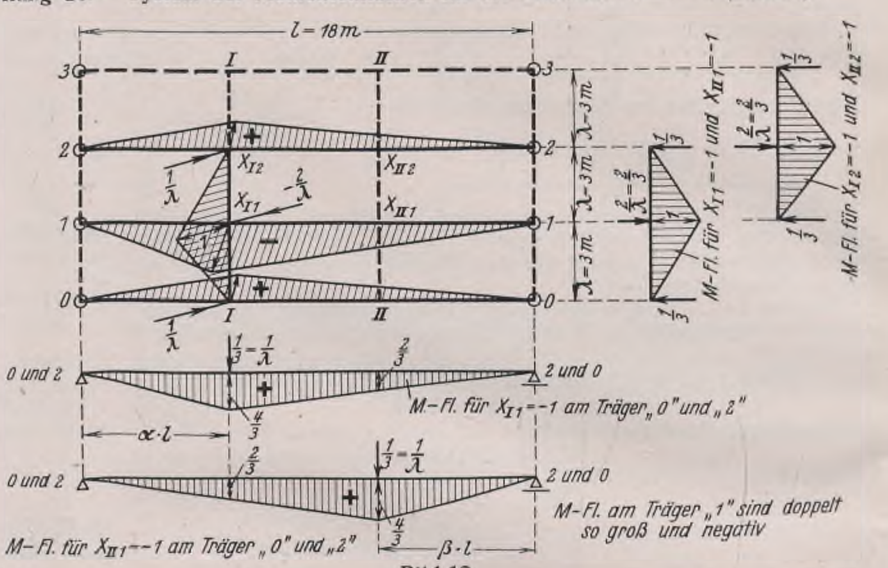


Bild 12.

Für die auf die Hauptträger entfallenden Anteile hat Pohl eine einfache Formel entwickelt, die hier mit angewendet werden soll:

$$\delta_{ik} = P_i P_k \cdot \frac{l^3}{6} \cdot \alpha \beta (1 - \alpha^2 - \beta^2).$$

Hierin ist $P_i = 1$ zu setzen. Mit αl ist der Lastabstand vom linken Auflager und mit βl der Lastabstand vom rechten Auflager der Momentenflächen zu verstehen.

Im folgenden werden die konstanten Beiwerte der Unbekannten in den Elastizitätsgleichungen ermittelt und daran anschließend die Belastungsglieder der auf der rechten Seite der Gleichungen stehenden Glieder.

Konstante Beiwerte der Unbekannten.

Die Anwendung der Pohlschen Formel liefert:

$$\delta_{\mathrm{I}1,\mathrm{I}1} = 2(-1)^2 \cdot \frac{\lambda}{3} \cdot \frac{J_H}{J_Q} + \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 \cdot \frac{l^3}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right]$$
$$+ 2\left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2 \cdot \frac{l^3}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right] = \frac{8}{81} \cdot \frac{l^3}{\lambda^2} + \frac{2}{3} \cdot \lambda \cdot \frac{J_H}{J_Q}.$$

Durch Einsetzen der Werte wird:

$$\delta_{\mathrm{I}1,\mathrm{I}1} = \frac{8}{81} \cdot \frac{18^3}{3^2} + \frac{2}{3} \cdot 3{,}0 \cdot 10 = 64 + 20 = \underline{84}.$$

Aus Symmetrie wird ferner:

$$\delta_{\mathrm{I}2,\mathrm{I}2} = \delta_{\mathrm{II}1,\mathrm{II}1} = \delta_{\mathrm{II}2,\mathrm{II}2} = \delta_{\mathrm{I}1,\mathrm{I}1} = \underline{84}.$$

Der Wert:

$$\delta_{\mathrm{I}1,\mathrm{I}2} = -\frac{16}{243} \cdot \frac{l^3}{\lambda^2} + \frac{\lambda}{6} \cdot \frac{J_H}{J_Q},$$

wie oben entwickelt.

$$\delta_{\mathrm{I}1,\mathrm{I}2} = -\frac{16}{243} \cdot \frac{18^3}{3^2} + \frac{3}{6} \cdot 10 = -42{,}67 + 5 = \underline{-37{,}67}.$$

Es ist ferner: $\delta_{\mathrm{I}1,\mathrm{I}2} = \delta_{\mathrm{II}1,\mathrm{II}2} = -\underline{37.67}.$

Die Werte:

$$\delta_{\mathrm{I}1,\mathrm{II}1} = \delta_{\mathrm{I}2,\mathrm{II}2} = \frac{21}{243} \cdot \frac{l^3}{\lambda^2} = \frac{21}{243} \cdot \frac{18^3}{3^2} = \underline{56}.$$

Die Werte:

$$\delta_{\text{I}1,\text{II}2} = \delta_{\text{I}2,\text{II}1} = -\frac{14}{243} \cdot \frac{l^3}{\lambda^2}$$

$$= -\frac{14}{243} \cdot \frac{18^3}{3^2} = -\underline{37{,}33}.$$

Die Gleichung von $X_{\text{I}1}$ hat die Form:

$$\delta_{\text{I}1,\text{I}1} X_{\text{I}1} + \delta_{\text{I}1,\text{I}2} X_{\text{I}2} + \delta_{\text{I}1,\text{II}1} X_{\text{II}1} + \delta_{\text{I}1,\text{II}2} X_{\text{II}2} = \delta_{0\text{I}1}$$

oder $\quad 84\, X_{\text{I}1} - 37{,}67\, X_{\text{I}2} + 56\, X_{\text{II}1} - 37{,}33\, X_{\text{II}2} = \delta_{0\text{I}1}$.

Die Gleichungen von den drei anderen Unbekannten können entbehrt werden, da nach dem B. U.-Verfahren weiter gerechnet wird.

Ermittlung der Belastungsglieder.

$\delta_{0\text{I}1}$ ist der von der äußeren Last erzeugte Formänderungswert im Sinne von $X_{\text{I}1}$.

Für die Quereinflußlinie der ersten Querscheibe I des äußeren Hauptträgers 0 ergibt sich folgende Lastengruppierung:

Lastfall	Punkt I0	Punkt I3	Punkt II0	Punkt II3
1	1/4	1/4	1/4	1/4
2	1/4	1/4	— 1/4	— 1/4
3	1/4	— 1/4	1/4	— 1/4
4	1/4	— 1/4	— 1/4	1/4
Σ	1,0	0	0	0

1. Belastungsfall.

Die Belastungsgrößen werden aus Bild 13 integriert mit Hilfe der bekannten Formeln von Müller-Breslau.

Allgemein ist:

$$\delta_{0\text{I}1} = \int M_0\, M_{\text{I}1}\, dx, \quad \text{somit}$$

$$\delta_{0\text{I}1} = \frac{1}{3} \cdot 6{,}0 \cdot \frac{4}{3} \cdot 1{,}5 + \frac{1}{3} \cdot 6{,}0 \cdot \frac{4}{2 \cdot 3} \cdot 1{,}5 +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot 6{,}0 \cdot 1{,}5 \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{2 \cdot 3}\right) = 4 + 2 + 9 = \underline{15}.$$

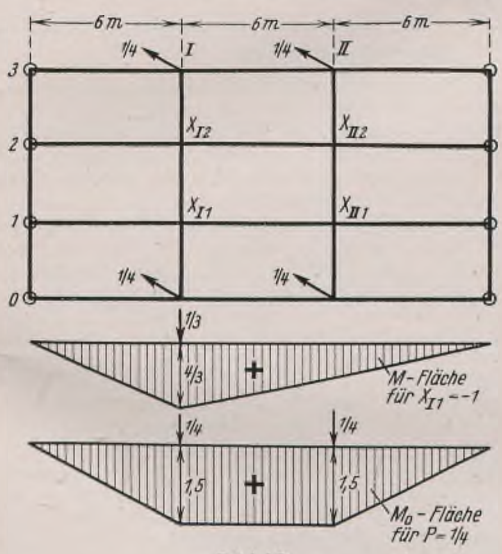


Bild 13.

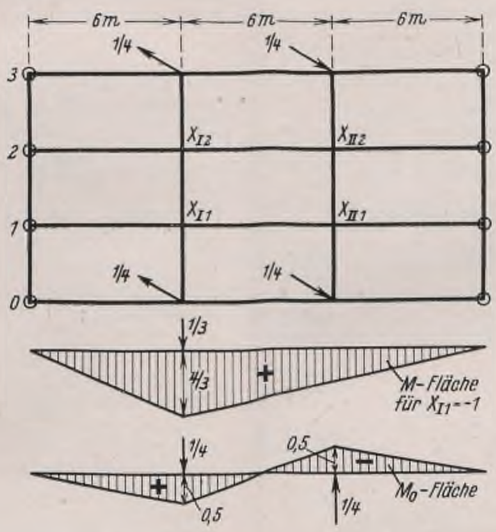


Bild 14.

Für den vorliegenden Belastungsfall ist:

$$X_{\text{I}1}^1 = X_{\text{I}2}^1 = X_{\text{II}1}^1 = X_{\text{II}2}^1,$$

folglich $\quad (84 - 37{,}67 + 56 - 37{,}33)\, X_{\text{I}1}^1 = 15$

oder $\quad X_{\text{I}1}^1 = \underline{0{,}231}.$

2. Belastungsfall (Bild 14).

$$\delta_{0\text{I}1} = \frac{1}{3} \cdot 6{,}0 \cdot \frac{4}{3} \cdot 0{,}5 - \frac{1}{3} \cdot 6{,}0 \cdot \frac{4}{6} \cdot 0{,}5 + \frac{1}{6} \cdot 6{,}0 \cdot 0{,}5 \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{6}\right)$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \underline{1{,}0}.$$

Es wird $\quad X_{\text{I}1}^2 = X_{\text{I}2}^2 = -X_{\text{II}1}^2 = -X_{\text{II}2}^2,$

folglich $\quad (84 - 37{,}67 - 56 + 37{,}33)\, X_{\text{I}1}^2 = 1{,}0$

oder $\quad X_{\text{I}1}^2 = \underline{0{,}0362}.$

3. Belastungsfall (Bild 15).

Die Momentenflächen sind hier gleich denen im Fall 1: Die Integration ergibt damit also auch den gleichen Wert wie in Fall 1, es wird

$$\delta_{0\text{I}1} = \underline{15{,}0}.$$

Es wird $\quad X_{\text{I}1}^3 = -X_{\text{I}2}^3 = X_{\text{II}1}^3 = -X_{\text{II}2}^3,$

folglich $\quad (84 + 37{,}67 + 56 + 37{,}33)\, X_{\text{I}1}^3 = 15{,}0$

oder $\quad X_{\text{I}1}^3 = \underline{0{,}069\,77}.$

4. Belastungsfall (Bild 16).

Die Momentenflächen wie bei Fall 2.

Es ist $\quad \delta_{0\text{I}1} = \underline{1{,}0}$ nach Fall 2

$$X_{\text{I}1}^4 = -X_{\text{I}2}^4 = -X_{\text{II}1}^4 = X_{\text{II}2}^4,$$

folglich wird

$$(84 + 37{,}67 - 56 - 37{,}33)\, X_{\text{I}1}^4 = 1{,}0 \quad \text{oder} \quad X_{\text{I}1}^4 = \underline{0{,}0353}.$$

Zusammenstellung der Unbekannten.

Belastungsfall	$X_{\text{I}1}$	$X_{\text{I}2}$	$X_{\text{II}1}$	$X_{\text{II}2}$
1	0,231 0	0,231 0	0,231 0	0,231 0
2	0,036 2	0,036 2	— 0,036 2	— 0,036 2
3	0,069 77	— 0,069 77	0,069 77	— 0,069 77
4	0,035 3	— 0,035 3	— 0,035 3	0,035 3
Σ	0,372 27	0,162 13	0,229 27	0,160 33

Ermittlung der Ordinaten der Quereinflußlinien.

Aus den ermittelten Querscheibenmomenten lassen sich die Ordinaten der Quereinflußlinien wie folgt errechnen:

für den äußersten Hauptträger 0 und die Querscheibe I:

$$\eta_0{}^0 = \quad 1 - \frac{X_{\text{I}1}}{\lambda} = 1 - \frac{0{,}372\,27}{3{,}0} = 1 - 0{,}124\,09 = \;.\;.\; \underline{0{,}875\,91}$$

$$\eta_1{}^0 = \quad 2 \cdot \frac{X_{\text{I}1}}{\lambda} - \frac{X_{\text{I}2}}{\lambda} = 2 \cdot \frac{0{,}372\,27}{3{,}0} - \frac{0{,}162\,13}{3{,}0} = \;.\; \underline{0{,}194\,137}$$

$$\eta_2{}^0 = +2 \cdot \frac{X_{\text{I}2}}{\lambda} - \frac{X_{\text{I}1}}{\lambda} = 2 \cdot \frac{0{,}162\,13}{3{,}0} - \frac{0{,}372\,27}{3{,}0} = \;.\; \underline{-0{,}016\,004}$$

$$\eta_3{}^0 = \quad -\frac{X_{\text{I}2}}{\lambda} = -\frac{0{,}162\,13}{3{,}0} = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \underline{-0{,}054\,043}$$

$$\Sigma\,\eta = 1{,}0.$$

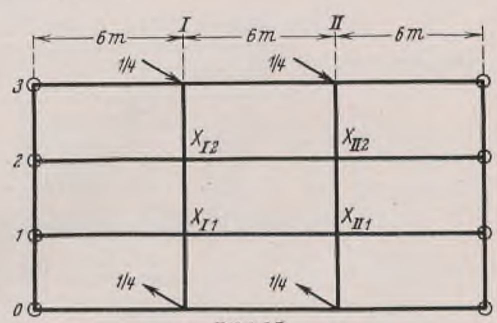


Bild 15.

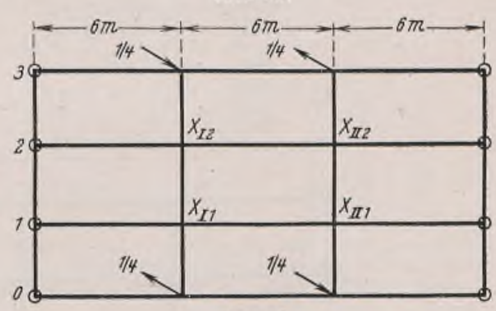


Bild 16.

Analog kann man noch aus $X_{\text{II}1}$ und $X_{\text{II}2}$ die Ordinaten der Querscheibe II ermitteln.

1. Vergleich. Vernachlässigung der zweiten Querscheibe.

Mit den gleichen Beiwerten, die Konstanten des Rostsystems sind, lautet die Gleichung von X:

$$\delta_{11} X_{11} + \delta_{12} X_{12} = \delta_{011} \quad \text{oder} \quad 84\, X_{11} - 37{,}67\, X_{12} = \delta_{011}.$$

Belastung des Hauptträgers 0 an der Querscheibe I:

Lastfall	Punkt 10	Punkt 13
1	1/2	1/2
2	1/2	— 1/2
Σ	1,0	0

1. Belastungsfall (Bild 17).

Die Integration ergibt:

$$\delta_{0\,11} = \frac{1}{3} \cdot 6{,}0 \cdot \frac{4}{3} \cdot 2{,}0 + \frac{1}{3} \cdot 12{,}0 \cdot \frac{4}{3} \cdot 2{,}0 = \frac{16}{3} + \frac{32}{3} = \underline{16{,}0}.$$

Es wird $X_{I1}^1 = X_{I2}^1$, somit

$$(84 - 37{,}67)\, X_{I1}^1 = 16{,}0 \quad \text{oder} \quad X_{I1}^1 = \underline{0{,}346}.$$

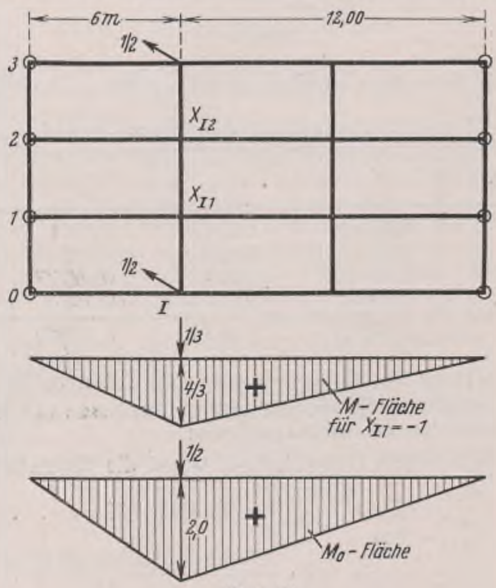


Bild 17.

2. Belastungsfall (Bild 18).

Die Momentenflächen sind gleich wie bei Fall 1.

Es wird $X_{I1}^2 = -X_{I2}^2$, folglich

$$(84 + 37{,}67)\, X_{I1}^2 = 16{,}0 \quad \text{oder} \quad X_{I1}^2 = \underline{0{,}1317}.$$

Zusammenstellung der Unbekannten.

Belastungsfall	X_{11}	X_{12}
1	0,346	0,346
2	0,1317	— 0,1317
Σ	0,4777	0,2143

Die Ordinaten der Quereinflußlinie des Hauptträgers 0:

$$\eta_0{}^0 = 1 - \frac{X_{11}}{\lambda} = 1 - \frac{0{,}4777}{3{,}0} = 1{,}0 - 0{,}159\,23 = \ldots \quad \underline{0{,}840\,77}$$

$$\eta_1{}^0 = 2 \cdot \frac{0{,}4777}{3{,}0} - \frac{0{,}2143}{3{,}0} = \ldots \quad \underline{0{,}247\,03}$$

$$\eta_2{}^0 = -\frac{0{,}4777}{3{,}0} + 2 \cdot \frac{0{,}2143}{3{,}0} = \ldots \quad \underline{-0{,}016\,37}$$

$$\eta_3{}^0 = -\frac{0{,}2143}{3{,}0} = \ldots \quad \underline{-0{,}071\,43}$$

$$\Sigma\,\eta = \underline{1{,}0}.$$

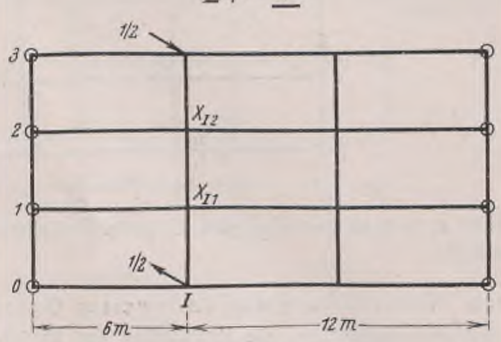


Bild 18.

2. Vergleich. Vollkommen starre Querverteilung.

Zum weiteren Vergleich werden noch die Ordinaten der Quereinflußlinie für vollkommen starre Querverteilung ermittelt.

Für konstantes Trägheitsmoment aller Hauptträger erhält man allgemein die Ordinate zu (Methode Engeßer 1889):

$$\eta_i = \frac{1}{m} \pm \frac{\lambda_i\, e}{\sum\limits_{i=1}^{i=m} \lambda_i^2}.$$

Mit m = vier Hauptträgern erhält man für den äußeren Hauptträger 0:

$$\eta_0{}^0 = \frac{1}{4} + \frac{1{,}5\,\lambda \cdot 1{,}5\,\lambda}{2\,(0{,}5^2\,\lambda^2 + 1{,}5^2\,\lambda^2)} = \frac{1}{4} + \frac{1{,}5^2\,\lambda^2}{5\,\lambda^2} = \ldots \quad \underline{0{,}70}$$

$$\eta_1{}^0 = \frac{1}{4} + \frac{1{,}5\,\lambda \cdot 0{,}5\,\lambda}{5\,\lambda^2} = 0{,}25 + 0{,}15 = \ldots \quad \underline{0{,}40}$$

$$\eta_2{}^0 = \frac{1}{4} - 0{,}15 = \ldots \quad \underline{0{,}10}$$

$$\eta_3{}^0 = \frac{1}{4} - 0{,}45 = \ldots \quad \underline{-0{,}20.}$$

Verlauf der Quereinflußlinien des Randhauptträgers 0 (Bild 19).

b) Vergleichsrechnung mit dem von mir vorgeschlagenen Rechenverfahren.

Konstanten des Rostsystems (Bild 1):

Rostlänge: $l = 18$ m,

Hauptträgerabstand: $\lambda = 3$ m,

Trägheitsmomentenverhältnis: $\frac{J_Q}{J_H} = \frac{1}{10}$.

μ-Wert (Bild 3):

$$\mu_{I_{\text{ideell}}} = \mu_{I\,I} - \mu_{I\,II} = \frac{4}{243} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{243} = \underline{\frac{2}{243}}.$$

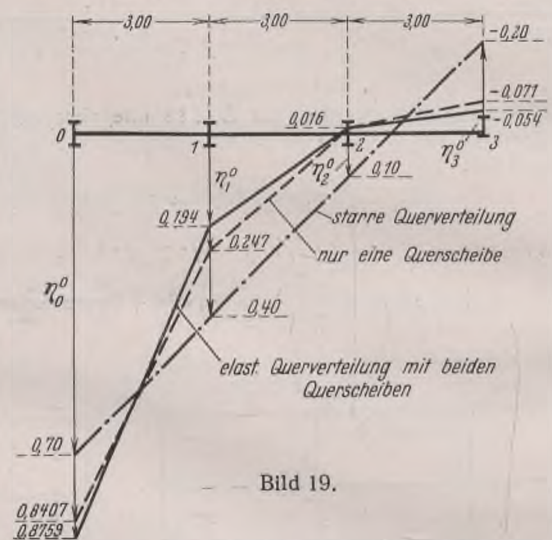


Bild 19.

K-Wert = Roststeifigkeit¹) der Querverteilungsstelle:

$$K = 6\,\mu \cdot \frac{J_Q}{J_H} \cdot \frac{l^3}{\lambda^2} = 6 \cdot \frac{2}{243} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{18^3}{3^2} = \underline{3{,}2.}$$

α-Werte:

$$\alpha_1 = 4 + K \cdot \frac{6}{\lambda} = 4 + 3{,}2 \cdot \frac{6}{3{,}0} = \underline{10{,}4}$$

$$\alpha_2 = 1 - K \cdot \frac{4}{\lambda} = 1 - 3{,}2 \cdot \frac{4}{3} = \underline{-3{,}266}$$

$$\alpha_1{}^2 = 10{,}4^2 = 108{,}160$$

$$\alpha_2{}^2 = (-3{,}266)^2 = \underline{10{,}666}$$

$$\alpha_1{}^2 - \alpha_2{}^2 = 97{,}494.$$

Die Querscheibenmomente in den Kreuzungspunkten:

$$X_{11} = K \cdot \frac{-\alpha_1}{\alpha_1{}^2 - \alpha_2{}^2} = 3{,}2 \cdot \frac{-10{,}4}{97{,}494} = \underline{-0{,}3414}\ \text{tm}$$

$$X_{12} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot X_{11} = -\frac{3{,}266}{10{,}4} \cdot 0{,}3414 = \underline{-0{,}1073\ \text{tm}}.$$

Die Ordinaten der Quereinflußlinie des Hauptträgers 0.

$$\eta_0{}^0 = 1 + \frac{X_{11}}{\lambda} = 1 - \frac{0{,}3414}{3{,}0} = \underline{0{,}8862}$$

$$\eta_1{}^0 = -2 \cdot \frac{X_{11}}{\lambda} + \frac{X_{12}}{\lambda} = \frac{2 \cdot 0{,}3414}{3{,}0} - \frac{0{,}1073}{3{,}0} = \underline{0{,}1919}$$

$$\eta_2{}^0 = -2 \cdot \frac{X_{12}}{\lambda} + \frac{X_{11}}{\lambda} = \frac{2 \cdot 0{,}1073}{3{,}0} - \frac{0{,}3414}{3{,}0} = \underline{-0{,}0424}$$

$$\eta_3{}^0 = \frac{X_{12}}{\lambda} = -\frac{0{,}1073}{3{,}0} = \underline{-0{,}0357.}$$

Kontrolle: $\Sigma\,\eta = \underline{1{,}0.}$

¹) Im Stahlbau 1938, Heft 10, von mir angegeben, soll im Gegensatz zu anderen Arbeiten darauf hinweisen, daß die Roststeifigkeit einer Querverteilungsstelle u. a. vom Hauptträgerabstand und nicht von der Rostbreite abhängig ist.

Die genauen Werte sind:

$$\eta_0{}^0 = 0{,}8759; \qquad \eta_1{}^0 = 0{,}1941$$
$$\eta_2{}^0 = -0{,}0160; \qquad \eta_3{}^0 = -0{,}0540.$$

Vergleich. Vernachlässigung der zweiten Querscheibe.

Für das Rostsystem ändert sich jetzt in den Konstanten der μ-Wert. Dieser wird nach der μ-Kurve (Bild 3):

$$\mu = \frac{4}{243} \quad \text{oder} \quad \mu_{1_{\text{ideell}}} = \sum_{r=1}^{r=n} \mu_{1_r} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 2 = \frac{2}{243}.$$

K-Wert:

$$K = 6\,\mu \cdot \frac{J_Q}{J_H} \cdot \frac{l^3}{\lambda^2} = 6 \cdot \frac{4}{243} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{18^3}{3^2} = \underline{6{,}4.}$$

α-Werte:

$$\alpha_1 = 4 + K \cdot \frac{6}{\lambda} = 4 + 6{,}4 \cdot \frac{6}{3{,}0} = \underline{16{,}8}$$
$$\alpha_2 = 1 - K \cdot \frac{4}{\lambda} = 1 - 6{,}4 \cdot \frac{4}{3{,}0} = \underline{-7{,}533}$$
$$\alpha_1{}^2 = 16{,}8^2 \qquad = 282{,}240$$
$$\alpha_2{}^2 = (-7{,}533)^2 = \underline{56{,}746}$$
$$\alpha_1{}^2 - \alpha_2{}^2 \qquad = 225{,}494.$$

Querscheibenmomente in den Kreuzungspunkten:

$$X_{11} = K \cdot \frac{-\alpha_1}{\alpha_1{}^2 - \alpha_2{}^2} = 6{,}4 \cdot \frac{-16{,}8}{225{,}494} = \underline{-0{,}476}\ \text{tm}$$
$$X_{12} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot X_{11} = -\frac{7{,}533}{16{,}8} \cdot 0{,}476 = \underline{-0{,}2139}\ \text{tm.}$$

Die Ordinaten der Quereinflußlinie des Hauptträgers 0.

$$\eta_0{}^0 = 1 + \frac{X_{11}}{\lambda} = 1 - \frac{0{,}476}{3{,}0} = \underline{0{,}8413,}$$

genauer Wert: $(\eta_0{}^0 = 0{,}840\,77)$,

$$\eta_1{}^0 = -2 \cdot \frac{X_{11}}{\lambda} + \frac{X_{12}}{\lambda} = \frac{2 \cdot 0{,}476}{3{,}0} - \frac{0{,}2139}{3{,}0} = \underline{0{,}2461,}$$

genauer Wert: $(\eta_1{}^0 = 0{,}2470)$,

$$\eta_2{}^0 = -2 \cdot \frac{X_{12}}{\lambda} + \frac{X_{11}}{\lambda} = \frac{2 \cdot 0{,}2139}{3{,}0} - \frac{0{,}476}{3{,}0} = \underline{-0{,}0161,}$$

genauer Wert: $(\eta_2{}^0 = -0{,}016\,37)$,

$$\eta_3{}^0 = \frac{X_{11}}{\lambda} = \frac{-0{,}2139}{3{,}0} = \underline{-0{,}0713,}$$

genauer Wert: $(\eta_3{}^0 = -0{,}0714)$.

Kontrolle: $\Sigma\,\eta = \underline{1{,}0}.$

Ergebnis.

Die geringen Unterschiede in der Gegenüberstellung sind unbedeutend klein und liegen im Bereiche der Zahl der Hauptträger, die vernachlässigt geworden, ebenfalls einen, wenn auch sehr geringen Einfluß haben.

Besonders hervorzuheben ist der weit geringere Arbeitsaufwand meines Verfahrens gegenüber dem allgemein üblichen Rechnen der Baustatik.

Das Beispiel zeigt ferner den Einfluß des Mitwirkens der zweiten Querscheibe, die danach nicht vernachlässigt werden darf.

Der Einfluß der starren Querverteilung gegenüber der elastischen ist in diesem Beispiel sehr bedeutend, da das Verhältnis der Trägheitsmomente zwischen Hauptträger und lastverteilender Querscheibe sehr groß ist. Die Unterschiede erkennt man deutlich in dem aufgezeichneten Verlauf der Quereinflußlinien. Weiter sieht man in diesem Verlauf, daß eine über den Brückenquerschnitt verteilte Last für den Randhauptträger 0 bei elastischer Querverteilung kleinere Lastanteile abgibt als bei vollkommen starrer Querverteilung. Diese Erkenntnis ist für jede Rostberechnung sehr wichtig. (Schluß folgt).

Die Berechnung zweistäbiger Rahmenecken mit zusammengesetztem Querschnitt.

Von Dr.-Ing. **Otto Steinhardt**, Stettin.

I. Allgemeines.

Für die theoretische Untersuchung des Spannungszustandes in einer zweistäbigen Rahmenecke mit annähernd konzentrisch geführten Rändern geht man zweckmäßig von der Theorie des gekrümmten Stabes [1] aus. Bliebe bei der Belastung die Querschnittsform unverändert, so ergäbe diese Theorie mit den üblichen Annahmen — die Einflüsse der Radialspannungen und der Schubspannungen bleiben unberücksichtigt — rasch einfache Ergebnisse. H. Bleich [2] hat jedoch vor einigen Jahren für Rahmenecken mit ⊤- bzw. I-förmigem Querschnitt auf die Bedeutung der Querschnittsverformung hingewiesen. Seine Untersuchungen wurden wahrscheinlich zum Teil veranlaßt durch Versuche an gekrümmten dünnwandigen Rohren, über die von Karman [3] berichtet hat. Es handelt sich hierbei immer um die Erscheinung, daß die einzelnen Fasern des Querschnitts infolge der in ihnen herrschenden Spannungen im Bereich der Rahmenecke durch die Krümmung bewirkte, radial gerichtete „Abtriebkräfte" erleiden. Wesentlich ist dann weiterhin, daß die durch diese Kräfte in der Ebene des Querschnitts erzeugten bezogenen Verschiebungen von der gleichen Größenordnung sind wie die Dehnungen, die als Folge der Rahmeneckmomente senkrecht zum Querschnitt hervorgerufen werden. Es ist klar, daß die erstgenannten Verschiebungen durch Vergrößerung bzw. Verkleinerung der Krümmungsradien der einzelnen Querschnittsfasern eine zusätzliche Dehnung senkrecht zum Querschnitt bewirken und daß die gesamte Normalspannungsverteilung im Bereich der Rahmenecke dadurch ihr Aussehen ändert.

Der erwähnten Abhandlung [2] wurde später vielleicht deshalb nicht allgemein genügende Beachtung geschenkt, weil die dort entwickelte Theorie zu abstrakt erschien und weil ihr insbesondere die Prüfung durch spezielle Messungen fehlte. Diesem Bedürfnis nach Versuchen ist in der letzten Zeit nachgekommen worden. Vor einigen Monaten verließ das Ingenieurlaboratorium der Technischen Hochschule Darmstadt ein Bericht, in dem die Ergebnisse von systematischen Versuchen an Rahmenecken mit Rechteckquerschnitt sowie an solchen mit I-förmigem Querschnitt mitgeteilt wurden [4].

Die Veröffentlichung von H. Bleich ergibt als Resultat für Rahmenecken mit ⊤- oder I-förmigem Querschnitt folgenden Berechnungsgang: Da die Flansche infolge der obenerwähnten Querschnittsverformung eine ungleichmäßige Spannungsverteilung aufweisen, sind sie auf kleinere Breiten so zu reduzieren, daß bei nun gleichmäßiger (gedachter) Spannungsverteilung die Gesamtspannungsfläche erhalten bleibt. Es ergibt sich also ein Reduktionsfaktor $\nu = \frac{b'}{b}$. Für den neuen (ideellen) Querschnitt ist dann die Theorie des gekrümmten Stabes [1] in seiner einfachen Form anwendbar (vgl. z. B. Stahlbau-Kalender 1938, S. 60). Zuletzt ist die zusätzliche Biegespannung in den Flanschen an der Einspannstelle über dem Steg durch einen Faktor μ zu berücksichtigen, wobei $\sigma_b = \mu\,\sigma_0$, wenn σ_0 die mittlere Flanschspannung für den reduzierten Querschnitt bedeutet.

Die Faktoren ν und μ ergeben sich nach der exakten Theorie zu umfangreichen Ausdrücken, die trigonometrische und hyperbolische Funktionen enthalten und die zwecks praktischer Anwendung entweder nur mit ziemlichem Rechenaufwand unter Benutzung von Funktionentafeln oder unter Verwendung von Tabellen bzw. von Diagrammen erhalten werden können. Hierbei sind die Faktoren ν und μ jeweils als Funktion eines Querschnittswerts α gegeben, der die Größen: Krümmungsradius r des Flansches, seine Dicke t und seine „freie Kraglänge l" zusammenfaßt. Für die Praxis wesentlich nützlicher jedoch sind die folgenden beiden Gebrauchsformeln, die ν und μ aus sehr einfachen algebraischen Beziehungen zu berechnen erlauben (Bild 1):

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} \nu = \dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{1}{2\,\pi\,\alpha^3} \\ (\text{für } 0{,}65 < \alpha < \infty;\ \text{wenn } \alpha < 0{,}65,\ \text{so } \nu = 1{,}0); \\ \mu = 1{,}73 - (1{,}73 - 1{,}08\,\alpha)^3 \\ (\text{für } 0{,}65 < \alpha < 1{,}6;\ \text{wenn } \alpha > 1{,}6,\ \text{so } \mu = 1{,}73); \\ \text{hierbei ist} \quad \alpha = 1{,}316 \cdot \dfrac{l}{\sqrt{t\,r}}. \end{cases}$$

Diese Gebrauchsformeln sind gut einprägsam und erlauben eine einfache Berechnung von Rahmenecken mit konzentrisch gekrümmten Flanschen bei einem größten Fehler von 3,7% für die Faktoren ν und μ gegenüber der sogenannten exakten Rechnung. Dieser Fehler reduziert sich natürlich für die endgültigen Spannungen auf einen bedeutend geringeren Prozentsatz. Wie die Spannungsverhältnisse für Rahmenecken mit ausspringender Ecke sowie bei Vorhandensein von Aussteifungen sich ändern, kann wahrscheinlich nur durch Versuche geklärt werden. Die Grundlage der Berechnung bleibt dann die gleiche, nur müßte die Gesetzmäßigkeit in den Abweichungen vom „Normalfall" mit konzentrisch gekrümmten Flanschen erkannt und ihre Größe dann durch entsprechende zusätzliche Koeffizienten berücksichtigt werden. Zum Schluß dieses Abschnitts sollen noch die Ergebnisse von drei Versuchen an Rahmeneckmodellen mit ⊤-förmigem Querschnitt mitgeteilt werden. Diese Versuche kann man als Ergänzung zu

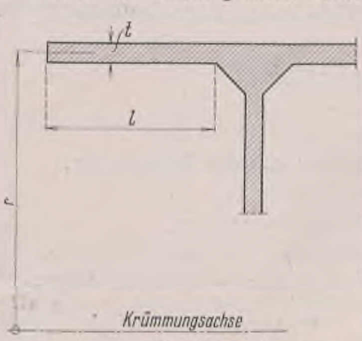


Bild 1.

den unter [4] erwähnten Versuchen betrachten. Insbesondere waren Versuchsanordnung und Versuchsdurchführung die gleichen. Bild 2 zeigt die Abmessungen der Körper und ihre Belastung, während Bild 3 die Messungsergebnisse in graphischer Darstellung wiedergibt.

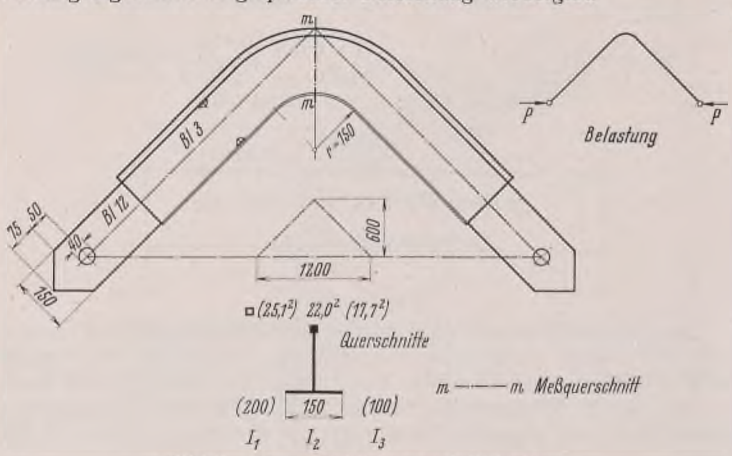


Bild 2. Versuchskörper und Belastung.

Die gute Übereinstimmung der gerechneten Spannungswerte mit den gemessenen läßt die Überzeugung gewinnen, daß die grundsätzlichen Annahmen der Theorie richtig sind. Denn bei den mit Absicht außerordentlich „weich" ausgebildeten inneren Flanschen konnte die Theorie einer sehr scharfen Kontrolle unterzogen werden. Als Meßgeräte wurden Tensometer mit 20 bzw. 10 mm Meßlänge verwendet, für die Messungen in der Flanschquerrichtung kam die Differenzen-Meßmethode mit Meßlängendifferenzen von 5 bis 2 mm zur Anwendung. Die Meßprobe: Gleichsetzung des inneren Moments aus dem „Spannungskörper" mit dem äußeren Belastungsmoment ergab einen größten Meßfehler von nur rd. 3,3%.

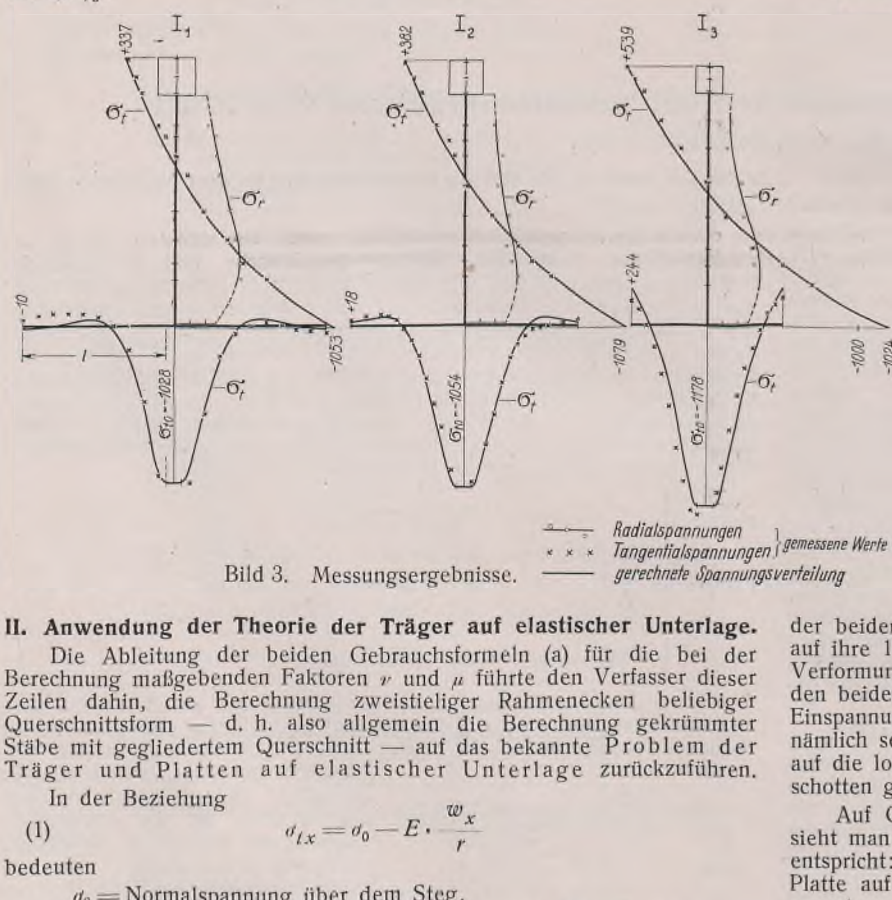


Bild 3. Messungsergebnisse.

ist man in der Lage, mit Hilfe der Gl. (2) die obenerwähnte Analogie zum Problem der Träger und Platten auf elastischer Unterlage festzustellen. Man kann nämlich die Gleichung der Biegelinie nun schreiben

(3a) $$EJ' \cdot \frac{d^4 w}{d x^4} = q - k\, w;$$

hierbei ist

(3b) $$q = \frac{t}{r} \cdot \sigma_0 \quad \text{und} \quad k = \frac{E\, t}{r^2}.$$

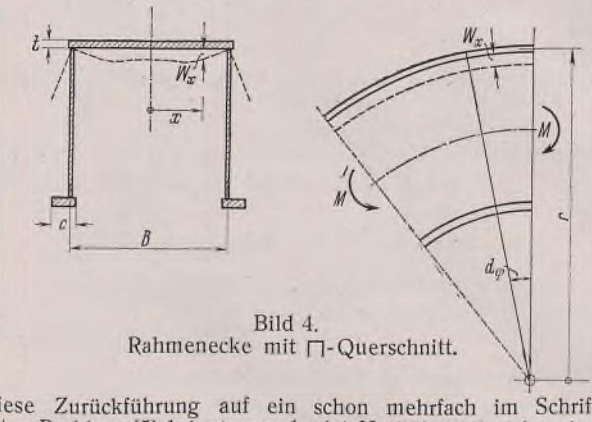


Bild 4.
Rahmenecke mit ⊓-Querschnitt.

Diese Zurückführung auf ein schon mehrfach im Schrifttum behandeltes Problem [5] bringt mancherlei Vorteile mit sich, wie das Vorhandensein von Zusammenstellungen häufig zu benutzender Ausdrücke und Koeffizienten in Tabellen, das räumliche Schalenproblem wird zu einem ebenen Plattenproblem u. a. m. Es entspricht nun z. B. dem oben besprochenen Fall eines T- bzw. I-förmigen Querschnitts analog das Problem der einseitig eingespannten Platte auf elastischer Unterlage, und es können hierbei die für die Rahmenecke wichtigen Faktoren ν und μ aus der Auflagerkraft V und dem Einspannungsmoment M_s der Platte sehr einfach abgeleitet werden [6].

Im folgenden soll die in Bild 4 dargestellte Querschnittsausbildung eingehender untersucht werden. Durch die in der Symmetrieebene wirkenden Biegemomente wird der hutförmige Querschnitt wie punktiert angedeutet verformt. Es ist hierbei angenommen, daß die „Biegesteifigkeit"

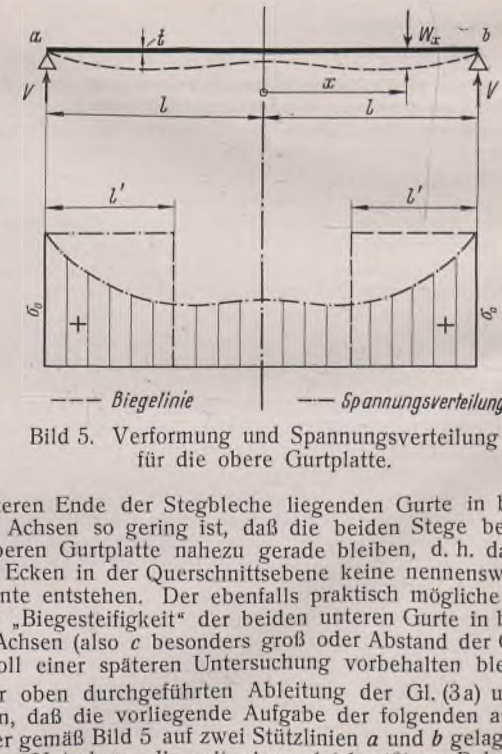


Bild 5. Verformung und Spannungsverteilung für die obere Gurtplatte.

II. Anwendung der Theorie der Träger auf elastischer Unterlage.

Die Ableitung der beiden Gebrauchsformeln (a) für die bei der Berechnung maßgebenden Faktoren ν und μ führte den Verfasser dieser Zeilen dahin, die Berechnung zweistieliger Rahmenecken beliebiger Querschnittsform — d. h. also allgemein die Berechnung gekrümmter Stäbe mit gegliedertem Querschnitt — auf das bekannte Problem der Träger und Platten auf elastischer Unterlage zurückzuführen.

In der Beziehung

(1) $$\sigma_{tx} = \sigma_0 - E \cdot \frac{w_x}{r}$$

bedeuten

σ_0 = Normalspannung über dem Steg,
σ_{tx} = Normalspannung im Abstande x von der Bezugsachse,
w_x = Auslenkung der Faser im Abstande x,
r = Krümmungsradius der Flanschmittelfläche.

Es wirkt dann auf einen Flanschstreifen von der Breite $r\, d\varphi = 1$ (s. Bild 4) an der Stelle x infolge der (Ring-)Spannung eine zum Krümmungsmittelpunkt hingerichtete Kraft

(2) $$p_x = \frac{t}{r}\left(\sigma_0 - E \cdot \frac{w_x}{r}\right).$$

Da die Differentialgleichung der Biegelinie des Balkens lautet

(3) $$EJ' \cdot \frac{d^4 w_x}{d x^4} = p_x,$$

der beiden am unteren Ende der Stegbleche liegenden Gurte in bezug auf ihre lotrechten Achsen so gering ist, daß die beiden Stege bei der Verformung der oberen Gurtplatte nahezu gerade bleiben, d. h. daß an den beiden oberen Ecken in der Querschnittsebene keine nennenswerten Einspannungsmomente entstehen. Der ebenfalls praktisch mögliche Fall, nämlich sehr große „Biegesteifigkeit" der beiden unteren Gurte in bezug auf die lotrechten Achsen (also c besonders groß oder Abstand der Querschotten gering), soll einer späteren Untersuchung vorbehalten bleiben.

Auf Grund der oben durchgeführten Ableitung der Gl. (3a) u. (3b) sieht man leicht ein, daß die vorliegende Aufgabe der folgenden analog entspricht: von einer gemäß Bild 5 auf zwei Stützlinien a und b gelagerten Platte auf elastischer Unterlage, die mit einer gleichmäßigen Belastung $q = \frac{t}{r} \cdot \sigma_0$ belastet ist, sind die Auflagerdrücke V sowie die Momentenlinie M_x zu bestimmen:

Denn aus der Auflagerkraft V ergibt sich leicht der Reduktionsfaktor ν für die sogenannte „mitwirkende Breite" und aus dem Moment M_x die zusätzliche Biegespannung der Gurtplatte in der Querrichtung. Es soll zunächst nur der Faktor ν ermittelt werden, wobei der Einfachheit halber die von a nach b gespannte Platte aus einzelnen auf Biegung beanspruchten Stäben von der Breite l und der Höhe t bestehend angesehen wird. Die letzte Annahme bedeutet, daß $\frac{m^2}{m^2 - 1} = 1$ gesetzt werden darf, wobei m die Poissonsche Zahl ist; die Berechtigung dieser Annahme ist in der obenerwähnten Arbeit [6] genauer begründet.

Gemäß Gl. (2) ist $V = \int_0^l p_x\, dx = \frac{t}{r} \int_0^l \left(\sigma_0 - \frac{E\, w_x}{r} \right) dx.$

Da $\sigma_{tx} = \sigma_0 - E \cdot \frac{w_x}{r}$ ist, ergibt sich

$$V = \frac{t}{r} \int_0^l \sigma_{tx}\, dx = \frac{t}{r} \cdot \sigma_0\, l' = q\, l', \tag{4}$$

wenn l' so angenommen wird, daß die Gesamtspannungsfläche dieselbe bleibt. Der gesuchte Reduktionsfaktor ist dann

$$\nu = \frac{l'}{l}.$$

Es ist also vor allem die Gleichung der Biegelinie $w = f(x)$ zu bestimmen. Setzt man in Gl. (3a) $L^4 = \frac{4\,EJ}{k}$, $\xi = \frac{x}{L}$, so lautet die Differentialgleichung des gemäß Bild 5 gelagerten Balkens auf elastischer Unterlage

$$\frac{d^4 w}{d\,\xi^4} + 4\left(y - \frac{q}{k}\right) = 0. \tag{5}$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung wird zweckmäßig in der Form

$$w = \frac{q}{k} + C_1 \cdot \mathfrak{Cof}\,\xi \cdot \cos\xi + C_2 \cdot \mathfrak{Sin}\,\xi \cdot \cos\xi + C_3 \cdot \mathfrak{Cof}\,\xi \cdot \sin\xi + C_4 \cdot \mathfrak{Sin}\,\xi \cdot \sin\xi \tag{6}$$

angeschrieben, wobei C_1 bis C_4 aus den Randwerten der Momente, Querkräfte, Stabachsenneigungen $\left(\vartheta = \frac{dw}{dx}\right)$ und Einsenkungen berechnet werden können.

Die Randbedingungen lauten:

für $x = \xi = 0$ ist $\vartheta(\xi) = 0$, $\frac{d^3 w}{d\,\xi^3} = Q'(\xi) = 0$;

für $x = l$, $\xi = \frac{l}{L}$ ist $w = 0$, $\frac{w\, d^2}{d\,\xi^2} = M'(\xi) = 0$.

Es ergibt sich

$$\left\{ \begin{aligned} & C_2 = C_3 = 0 \\ & C_1 = -\frac{\frac{q}{k} \cdot \mathfrak{Cof}\left(\frac{l}{L}\right) \cos\left(\frac{l}{L}\right)}{\mathfrak{Cof}^2\left(\frac{l}{L}\right) \cos^2\left(\frac{l}{L}\right) + \mathfrak{Sin}^2\left(\frac{l}{L}\right) \sin^2\left(\frac{l}{L}\right)} \\ & C_4 = -\frac{\frac{q}{k} \cdot \mathfrak{Sin}\left(\frac{l}{L}\right) \sin\left(\frac{l}{L}\right)}{\mathfrak{Cof}^2\left(\frac{l}{L}\right) \cos^2\left(\frac{l}{L}\right) + \mathfrak{Sin}^2\left(\frac{l}{L}\right) \sin^2\left(\frac{l}{L}\right)}. \end{aligned} \right. \tag{7}$$

Durch Einsetzen der Gl. (7) in Gl. (6) erhält man nach dreimaliger Differentiation und Umformung für die Querkraft bei a und b, die gleich ist der gesuchten Auflagerkraft V,

$$Q_{\xi = l/2} = V = \frac{qL}{2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{l}{L}\right) \cos\left(\frac{l}{L}\right) + \mathfrak{Sin}\left(\frac{l}{L}\right) \mathfrak{Cof}\left(\frac{l}{L}\right)}{\mathfrak{Cof}^2\left(\frac{l}{L}\right) \cos^2\left(\frac{l}{L}\right) + \mathfrak{Sin}^2\left(\frac{l}{L}\right) \sin^2\left(\frac{l}{L}\right)}. \tag{8}$$

Berücksichtigt man zuletzt Gl. (4), so erhält man aus

$$V = q\, l' = \nu\, q\, l$$

$$\nu = \frac{1}{2\,\alpha} \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \mathfrak{Sin}\,\alpha \cdot \mathfrak{Cof}\,\alpha}{\mathfrak{Cof}^2\,\alpha \cdot \cos^2\alpha + \mathfrak{Sin}^2\,\alpha \cdot \sin^2\alpha}, \tag{9}$$

wobei

$$\alpha = \frac{l}{L} = 1{,}316 \cdot \frac{l}{\sqrt{t\, r}}. \tag{9a}$$

Die Werte ν sind in folgender Tafel (Bild 6) in Abhängigkeit von dem Querschnittswert α graphisch dargestellt. Die Tafel enthält zudem noch die Werte ν, die sich für Rahmenecken mit T- und I-förmigem Querschnitt ergeben und die aus einer früheren Arbeit des Verfassers [6] übernommen wurden.

Man glaubt, beim Vergleich der beiden ν-Kurven zu erkennen, daß die T- und I-Querschnitte im Bereich der Rahmenecke sich bedeutend günstiger verhalten als die Π-Querschnitte. Es bleibt jedoch der wichtige Umstand beachtenswert, daß bei den erstgenannten Querschnittsformen die zusätzlichen Biegespannungen, die in der Querrichtung der Flansche wirken, gemäß Gl. (a) schon bei $\alpha = 0{,}8$ den Wert σ_0 betragen, um bei $\alpha = 1{,}60$ sogar den 1,73fachen Wert zu erreichen, der dann bei weiter steigendem α nahezu konstant bleibt. Bei dem Π-Querschnitt ist dagegen an der Stelle der größten Spannung σ_0 über den Stegen — für den hier untersuchten Fall — die Biegespannung immer gleich Null.

Gl. (9) haftet in bezug auf die praktische Anwendungsmöglichkeit der Nachteil an, daß die ν-Werte nur mit Benutzung von Tabellen oder Funktionstafeln erhalten werden können. Es besteht jedoch die Möglichkeit, mit Hilfe einfacher Reihenansätze und unter Verwendung der Methode von W. Ritz [7] den Ausdruck der Gl. (9) so zu vereinfachen, daß er praktisch brauchbarer ist.

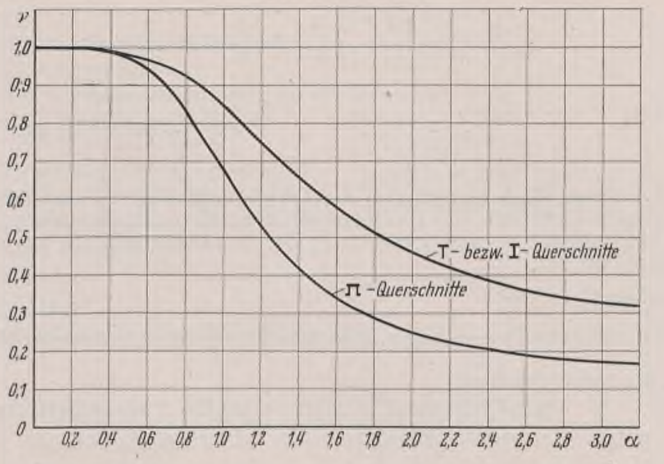


Bild 6. Reduktionsfaktor ν als Funktion von $\alpha = 1{,}316 \frac{l}{\sqrt{t \cdot r}}$.

III. Näherungsrechnung mit Hilfe der Methode von W. Ritz.

Infolge der Tatsache, daß das Problem der Formänderung eines Tragwerks als Grenzwertproblem aufgefaßt werden kann, ist es möglich, eine Methode zur Berechnung der Verschiebungen $w = f(x)$ abzuleiten. Dem „Prinzip der kleinsten Formänderungsarbeit" wird dabei als „Nebenbedingung" die Aussage hinzugefügt, daß bei der Belastung des elastischen Systems die Lastsenkungsarbeit gleich ist der inneren Arbeit, d. h. daß die Umsetzung der Arbeiten verlustfrei erfolgt. Man erhält dann für das Prinzip die Form

$$A_i = \text{Extremum} \quad \text{mit der Nebenbedingung } A_i = A_a. \tag{10}$$

Drückt man die Arbeiten A durch die Verschiebungen w aus, so wird A mit dem Index i eine homogene, quadratische Funktion und A mit dem Index a eine solche in linearer Form. Man kann nun nach dem Verfahren der Lagrangeschen Multiplikatoren die beiden Forderungen (10) in eine einzige umformen [8] und erhält dann das Prinzip in der Form

$$A = A_i - 2\,A_a = \text{Extremum}. \tag{11}$$

Zur näherungsweisen Auflösung des Problems eignet sich nun weiterhin die Methode von W. Ritz [7]. Man approximiert die Lösung Gl. [11] durch einen Ausdruck von der Form

$$w_x = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 + \ldots + a_n f_n, \tag{12}$$

wobei die Polynome so gewählt sind, daß sie die Randbedingungen befriedigen. Dann setzt man den Wert von w_n in den Ausdruck (11) für die Formänderungsarbeit ein und bestimmt die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots a_n$ so, daß A einen extremen Wert erhält. Da man in Gl. (11) ein gewöhnliches Grenzwertproblem hat, ist zu setzen

$$\frac{\partial A}{\partial a_1} = 0 \qquad \frac{\partial A}{\partial a_2} = 0 \ldots \qquad \frac{\partial A}{\partial a_n} = 0. \tag{13}$$

Man erhält somit für jede Annäherungsfunktion w_n ein System von gewöhnlichen, nicht homogenen, linearen Gleichungen, deren Determinante verschwindet.

Bei Berücksichtigung nur der beiden ersten Glieder der Gl. (12) soll die weitere Rechnung für das oben behandelte Beispiel (Bild 4) nun durchgeführt werden.

$$w = a \cdot \cos\left(\frac{\pi\, x}{2\, l}\right) + b \cdot \cos\left(\frac{3\,\pi\, x}{2\, l}\right). \tag{14}$$

Für die Platte auf elastischer Unterlage betragen die Arbeiten

$$\left\{ \begin{aligned} A_i &= \frac{1}{2} \int_0^l (EJ\, w''^2 + k\, w^2)\, dx \\ A_a &= \frac{1}{2} \int_0^l q\, w\, dx, \end{aligned} \right. \tag{15}$$

wobei $w'' = \frac{d^2 w}{d x^2}$.

Gemäß dem Ansatz (14) sind w und w'' in Gl. (15) einzuführen und letztere dann gemäß Gl. (11) zusammenzufassen. Es ergibt sich nach kurzer Zwischenrechnung

$$A = \frac{1}{2} \left\{ EJ \left[a^2 \left(\frac{\pi}{2\, l}\right)^4 \frac{l}{2} + b^2 \left(\frac{3\pi}{2\, l}\right)^4 \frac{l}{2} \right] + k \left[a^2 \cdot \frac{l}{2} + b^2 \cdot \frac{l}{2} \right] - 2\, q \left[a \cdot \frac{2\, l}{\pi} - b \cdot \frac{2\, l}{3\pi} \right] \right\} = \text{Extremum}. \tag{11a}$$

Man ermittelt nun aus den Bestimmungsgleichungen (13) die beiden Koeffizienten a und b.

$$\frac{\partial A}{\partial a} = a \cdot \frac{EJ}{2}\left(\frac{\pi}{2l}\right)^4 + k \cdot \frac{a}{2} - q \cdot \frac{2}{\pi} = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial b} = b \cdot \frac{EJ}{2}\left(\frac{3\pi}{2l}\right)^4 + k \cdot \frac{b}{2} + q \cdot \frac{2}{3\pi} = 0$$

$$(14a) \qquad a = \frac{4q}{\pi\left[EJ\left(\frac{\pi}{2l}\right)^4 + k\right]} \qquad b = \frac{-4q}{3\pi\left[EJ\left(\frac{3\pi}{2l}\right)^4 + k\right]}.$$

Da durch die beiden Gl. (14) u. (14a) die angenäherte elastische Linie der oberen Gurtplatte des ⊓-Querschnitts bestimmt ist, kann die „mitwirkende Breite" l' und somit auch der Reduktionsfaktor ν wie folgt ermittelt werden.

Nach Gl. (1) ist

$$\sigma_x = \sigma_0 - E \cdot \frac{w_x}{r}$$

und die halbe Gurtkraft

$$G = \int_0^l \left(\sigma_0 - E \cdot \frac{w_x}{r}\right) dx.$$

Hieraus ergibt sich

$$l' = \frac{1}{\sigma_0}\int_0^l \left(\sigma_0 - E \cdot \frac{w_x}{r}\right) dx.$$

Da $\nu = \frac{l'}{l}$ ist, so erhält man zuletzt unter Verwendung der Gl. (14) und (14a)

$$\nu = \frac{1}{l\sigma_0}\int_0^l \left[\sigma_0 - \frac{E}{r}\left(\frac{4q \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right)}{\pi\left[EJ\left(\frac{\pi}{2l}\right)^4 + k\right]} - \frac{4q \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2l}\right)}{3\pi\left[EJ\left(\frac{3\pi}{2l}\right)^4 + k\right]}\right)\right] dx.$$

$$(16) \qquad \nu = 1 - \frac{0{,}81\,\alpha^4}{\alpha^4 + 1{,}52} - \frac{0{,}09\,\alpha^4}{\alpha^4 + 123}, \quad \text{wobei} \quad \alpha = 1{,}316 \cdot \frac{l}{\sqrt{t\,r}}.$$

Das letzte Glied der Gl. (16) kann seiner Geringfügigkeit wegen fast immer vernachlässigt werden.

In Bild 7 ist die angenäherte ν-Kurve zusammen mit derjenigen aus der exakten Rechnung dargestellt.

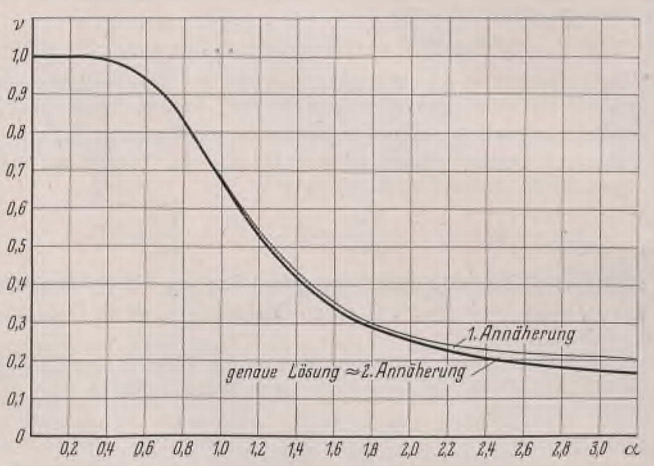


Bild 7. Näherungskurve für ν als Funktion von $\alpha = 1{,}316 \frac{l}{\sqrt{t \cdot r}}$.

Bei einem α-Wert von 1,6, der die Ausnutzung der Gurtplatte nur noch zu ungefähr 33% gestattet — also ein praktisch kaum erträglicher Fall — weicht der in 1. Annäherung ermittelte ν-Wert nur um rd. 2% vom genauen Wert ab.

IV. Zusammenfassung.

Die theoretische Untersuchung der Spannungsverhältnisse in Rahmenecken geht zweckmäßig von der Theorie des gekrümmten Stabes aus (Winkler-Résal), wobei jedoch bei gegliederten Querschnitten die bei der Belastung auftretende Querschnittsverformung eine besondere Bedeutung hat. Auf die Auswirkung der Querschnittsverformung ist schon früher mehrfach aufmerksam gemacht worden, jedoch wird in vorliegender Arbeit eine allgemeine Berechnungsgrundlage für zweistäbige, stetig gekrümmte Rahmenecken mit gegliedertem Querschnitt eingeführt, die für andere Baukonstruktionen als Theorie der Träger und Platten auf elastischer Unterlage wohlbekannt ist. Diese Zurückführung auf ein im Schrifttum gut vorbereitetes Gebiet bringt natürlich erhebliche Vorteile mit sich. Um die Ergebnisse der Rechnung zu vereinfachen, wird dann weiterhin von der Ritzschen Methode Gebrauch gemacht, und es gelingt z. B. dadurch, den Reduktionsfaktor ν, der die „mitwirkende Breite" der Gurtplatte eines ⊓-Querschnitts festlegt, in erster Annäherung aus der einfachen algebraischen Form

$$\nu = 1 - \frac{0{,}81\,\alpha^4}{\alpha^4 + 1{,}52}, \quad \text{wobei} \quad \alpha = 1{,}316 \cdot \frac{1}{\sqrt{t\,r}},$$

zu gewinnen. Ähnliche einfache Formeln werden auch für die ⊤- bzw. I-förmigen Querschnitte aufgestellt. Die sich aus der exakten Rechnung ergebenden umfangreichen Ausdrücke für ν, die trigonometrische und sogar hyperbolische Funktionen enthalten, werden dadurch für den praktischen Gebrauch wesentlich vereinfacht. Für die ⊤-förmigen Querschnitte wird die Richtigkeit der Theorie durch Mitteilung von Versuchsergebnissen erhärtet (vgl. auch [4]).

Bei der heute in immer größerem Umfang angewandten Schweißtechnik, die eine ästhetisch ansprechende Formung von Rahmentragwerken aller Art ermöglicht, ist eine klare Erfassung der Spannungsverhältnisse im wichtigsten Bauglied, nämlich der Rahmenecke, von großer Bedeutung. Sowohl die ⊤- und I-förmigen Eckausbildungen als auch die mehrstegigen, kastenförmigen Querschnitte lassen sich auf der mitgeteilten Grundlage leicht berechnen.

Die Notwendigkeit einer genauen Spannungsuntersuchung ist durch einige Zahlenbeispiele schnell nachweisbar. Für I P 40-Querschnitt, der einen Krümmungsradius der Mittellinie von $r = 80{,}0$ cm aufweist, reduziert sich die „mitwirkende Breite" des äußeren Flansches auf 92%, die des inneren auf 84%. Findet eine zweistegige Unterstützung der Ränder einer Gurtplatte ⊄ 300 × 26, die in Krümmung und Querschnitt dem inneren Flansch des vorgenannten Trägers entspricht, statt, so verringert sich die mitwirkende Breite des Gurtes sogar auf 63%.

Schrifttum.

[1] Winkler, Civilingenieur 1858, Bd. 4, S. 232. — H. Résal, Annales des mines, 1862, S. 617. — F. Grashof, Theorie von der Elastizität und Festigkeit, 1878.

[2] H. Bleich, Stahlbau 1933, S. 3ff.

[3] von Karman, Z. d. VdI 1911, S. 1889.

[4] Kayser und Herzog, Stahlbau 1939, S. 9ff.

[5] Hayashi, Theorie der Träger auf elastischer Unterlage, Berlin 1921.

[6] Steinhardt, Beitrag zur Berechnung gekrümmter Stäbe mit gegliedertem Querschnitt. Dissertation Technische Hochschule Darmstadt 1938.

[7] W. Ritz, Crelles Journal 1909, Bd. 135, H. 1.

[8] H. Lorenz, Technische Elastizitätslehre 1913, S. 135ff. — Th. Pöschl, Berechnung von Behältern, 2. Aufl., S. 139ff.

Zuschrift an die Schriftleitung.

(Ohne Verantwortung der Schriftleitung.)

Zum Aufsatz **Das Tragwerk für den Neubau der Reichsstelle für Getreide in Berlin,** Jahrgang 1939, Heft 23/24, S. 161, erhalten wir vom Verfasser, Herrn G. Mensch, die folgende Mitteilung:

Einer an mich ergangenen Bitte entsprechend stelle ich über die auf S. 163, letzter Absatz, angegebene Beteiligung der Stahlbauanstalten an der Ausführung und Aufstellung der Stahlkonstruktion folgendes fest: Die Lieferung der Stahlkonstruktion erfolgte durch eine Arbeitsgemeinschaft, bestehend aus den Firmen Stahlbau Wittenau, Berlin-Borsigwalde, Berliner Stahlbau Schloßnieß, Harz & Fricke, Berlin-Lichtenberg, und der Werkshandelsfirma des Peiner Walzwerkes, Berlin-Marienfelde, von denen jede die Lieferung und Montage ihres Teiles durchgeführt hat unter Führung der zuletztgenannten Firma.

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt. — Verlag: Wilh. Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W 9.
Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

DER STAHLBAU

Schriftleitung:
Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule
Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599
Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61
Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage zur Zeitschrift **DIE BAUTECHNIK** Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

13. Jahrgang | BERLIN, 1. März 1940 | Heft 5/7

Anwendung der Simpsonschen Regel zur Ermittlung der Biege- und Einflußlinien.

Von **G. Kriwoschein**, Professor, Ingenieur, Prag.

Bei der Berechnung statisch unbestimmter Systeme müssen die Biege- und Einflußlinien mit Hilfe der elastischen Einzelgewichte

$$W_m = M \cdot \frac{J_c}{J} = (M_0 + M_a X_a + M_b X_b + M_c X_c + \ldots\ldots) \frac{J_c}{J}$$

ermittelt werden, wobei M_0 das Moment der äußeren Kräfte für das statisch bestimmte Grundsystem, M_a das Moment der statisch unbestimmten Größe $X_a = 1$ usw., J das veränderliche Trägheitsmoment, J_c ein beliebiges, aber konstantes Trägheitsmoment bedeuten.

Im allgemeinen ist es schwierig, eine mathematische Gesetzmäßigkeit der Veränderlichkeit von J_c/J zu schätzen, weswegen man größtenteils J_c/J für eine Feldweite oder eine bestimmte Länge des Trägers konstant annimmt. Dadurch erhält man eine gebrochene Linie der „elastischen Belastung" $M\,J_c/J$ (Bild 1). Dann berechnet man die elastischen Einzelgewichte nach dem Hebelgesetz (Bild 2):

$$W_1 = \frac{\lambda}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

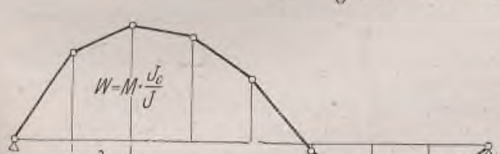


Bild 1.

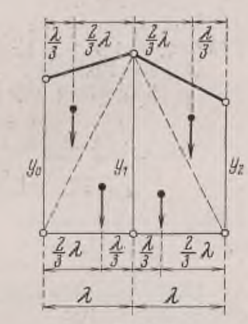


Bild 2.

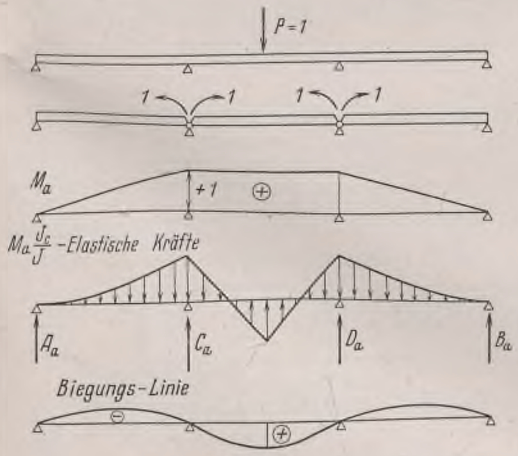


Bild 3.

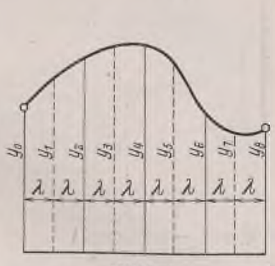


Bild 4.

Die Berechnung nach der Trapezregel ist nur annähernd richtig und gibt bedeutende Fehler (bis 2—4%).

Beispielsweise erhält man manchmal beim Zeichnen der Einflußlinie für die Durchbiegung in der Mitte eines durchlaufenden Trägers über 3 Felder mit veränderlichem Trägheitsmoment für die elastischen Einzelgewichte die Auflagerdrücke in C und D nicht mit dem Werte 0 (Bild 3) [1].

In einfachen Fällen kann man die Gesetzmäßigkeit der Größen J_c/J analytisch erfassen; beispielsweise taten dies von Degenburg und Demel, Straßner, M. Ritter, Neumann (für die Gewölbe), Bleich (für den Bogen), Björnstad (für den Rahmen). Für diese Fälle kann man die Integrale $\int M_0 M_a \cdot \frac{J_c}{J} \cdot dx$ sehr einfach berechnen; meistens liegt das Gesetz der Veränderlichkeit von J_c/J in einer solchen Form vor (z. B.: $J_c/J = h_c^2/h^2$ oder $J_c/J = h_c^3/h^3$), daß die Integration entweder sehr mühsam oder ganz unmöglich wird.

Infolgedessen werden zwei Methoden zur Berechnung der elastischen Einzelgewichte empfohlen. Beide Methoden gründen sich auf die bekannte Simpsonsche Regel.

1. Verfahren von J. Wanke zur Berechnung der elastischen Gewichte mit Hilfe der Simpsonschen Regel (mit quadratischen Parabeln) [2].

In Bild 4 stellt die gekrümmte Linie die elastische Belastung $y = M\,J_c/J$ dar. Diese Fläche teilt man in eine Anzahl gleich breiter Streifen. Wir greifen zwei Feldweiten λ (Bild 5) mit den Ordinaten y_0, y_1, y_2 heraus, um das elastische Gewicht W_1 zu bestimmen. Die gekrümmte Linie ABC ist (nach der Simpsonschen Regel) eine quadratische Parabel mit dem Pfeil $BD = \varDelta y_1$. Man findet:

$$DN = \frac{y_0 + y_1}{2} \quad \text{und} \quad \varDelta y_1 = \frac{2y_1 - y_0 - y_2}{2};$$

die Fläche des großen Segments $ABCD = \frac{\lambda}{3}(-2y_0 + 4y_1 - 2y_2)$;

die Fläche des Dreiecks $ABCD = \frac{\lambda}{2}(-y_0 + 2y_1 - y_2)$;

die Fläche des kleinen Segments AB oder $BC = \frac{\lambda}{12}(-y_0 + 2y_1 - y_2)$;

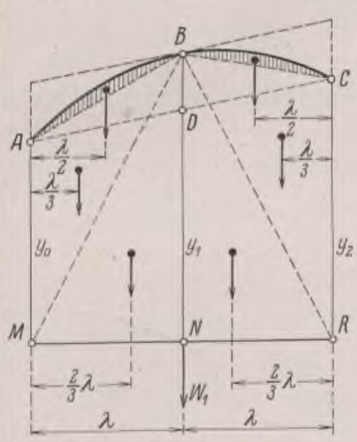


Bild 5.

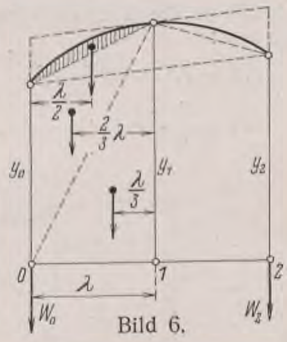


Bild 6.

das elastische Gewicht nach dem Hebelgesetz:

(1) $$W_1 = \frac{\lambda}{12}(y_0 + 10y_1 + y_2)$$

Für das erste elastische Gewicht ergibt sich (Bild 6):

(2) $$W_0 = \frac{\lambda}{24}(7y_0 + 6y_1 - y_2)$$

Für das letzte elastische Gewicht ergibt sich analog:

(3) $$W_2 = \frac{\lambda}{24}(-y_0 + 6y_1 + 7y_2)$$

Formeln von Wanke.

[1] Diese mathematischen Fehler ergeben sich durch das Integrieren der unstetig veränderlichen Funktionen. Zum ersten Male wurde meine Aufmerksamkeit durch O. Koštál auf diese Fehler gelenkt.

[2] J. Wanke, Die günstigste Form des eingespannten Gewölbes und die Bestimmung seiner Eigengewichtsspannungen. Technische Blätter 1920, Nr. 42 43, 44 45; — J. Melan, Bogenbrücken, Berlin 1931, Wilh. Ernst & Sohn; — K. Beyer, Die Statik im Eisenbetonbau; in diesem Buch sind die von Wanke abgeleiteten Formeln ebenfalls wiedergegeben.

Anmerkung: Für alle geraden Zwischenpunkte dürfen nicht die vereinigten Formeln (2), (3) angewendet werden, sondern die Formel (1), obzwar die zwei aufeinanderfolgenden Parabeln in diesen Zwischenpunkten keine gemeinsame Tangente haben. Die Stetigkeit der gekrümmten Linie aber fordert die Anwendung der Formel (1) in allen Zwischenpunkten. Der dabei begangene Fehler ist nicht größer als der, der bei der Berechnung der Fläche nach der Simpsonschen Regel begangen wird, d. h. unbedeutend.

Bei den Formeln (1) bis (3) ist die tatsächliche Kurve durch eine Linie zweiten Grades ersetzt, wobei sich mehr oder weniger große Abweichungen ergeben. Die entstehenden Fehler gleichen sich bei den Mittelfeldern größtenteils aus. In den Endfeldern bzw. Endgewichten können sich aber größere Fehler einstellen, wenn die Abweichungen der beiden Kurven stärker sind. In diesem Falle empfiehlt es sich, in den Endfeldern als Ersatzkurve Linien zweiten Grades zu wählen, die im Punkte 1 bzw. (n—1) gemeinsame Tangenten mit den Parabeln in den Feldern (1—3) bzw. (n—3)—(n—1) haben. In Bild 7 u. 8 ist diese Kurve für das Endfeld eingezeichnet. Der Punkt d in der Mitte des senkrechten Abschnitts c—e gibt den Punkt der gesuchten Parabel.

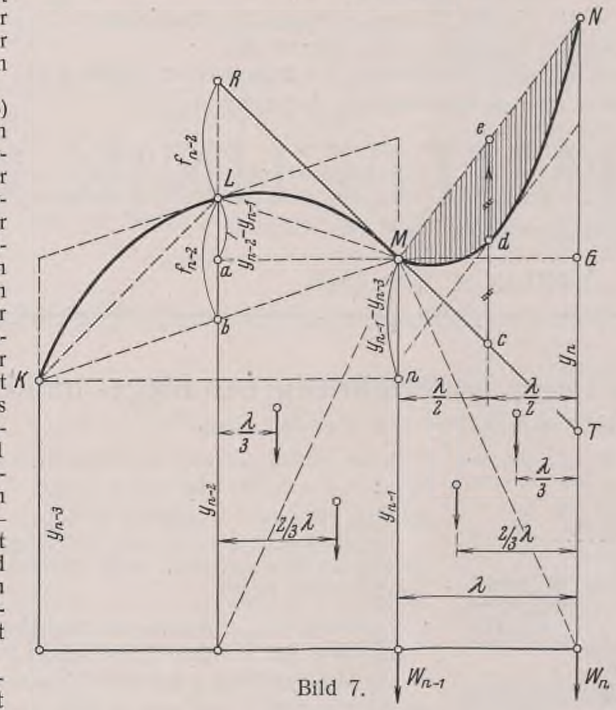


Bild 7.

1. Wenn die Parabel konvex nach unten gekrümmt ist (Bild 7), ergibt sich:

$$\overline{NT} = \overline{NG} + \overline{GT}, \quad \text{wo} \quad \overline{NG} = y_n - y_{n-1}$$

$$\overline{GT} = \overline{RL} + \overline{La}; \qquad \overline{RL} = f_{n-2} = \frac{-y_{n-1} + 2y_{n+2} - y_{n-3}}{2}$$

$$\overline{La} = y_{n-2} - y_{n-1} \quad \text{und} \quad \overline{NT} = \frac{1}{2}[2y_n - 5y_{n-1} + 4y_{n-2} - y_{n-3}]$$

$$\overline{de} = \frac{1}{4} \cdot \overline{NT} = \frac{1}{8}[2y_n - 5y_{n-1} + 4y_{n-2} - y_{n-3}].$$

Die negativen Ergänzungsteile der elastischen Gewichte, die von der Fläche der Parabel abhängig sind, ergeben sich zu:

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \lambda \cdot \frac{1}{8}[2y_n - 5y_{n-1} + 4y_{n-2} - y_{n-3}]$$

$$= +\frac{\lambda}{24}[y_{n-3} - 4y_{n-2} + 5y_{n-1} - 2y_n].$$

2. Wenn die Parabel konvex nach oben gekrümmt ist (Bild 8), erhält man:

$$\overline{NT} = \overline{NG} - \overline{GT} = +\frac{1}{2}[y_{n-3} - 4y_{n-2} + 5y_{n-1} - 2y_n]$$

$$\overline{de} = \frac{1}{4} \cdot \overline{NT} = +\frac{1}{8}[y_{n-3} - 4y_{n-2} + 5y_{n-1} - 2y_n].$$

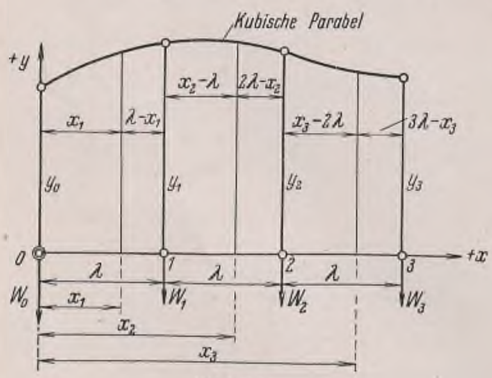


Bild 10.

Die Ergänzungsteile der elastischen Gewichte, die von der Fläche der Parabel abhängig sind, ergeben sich zu:

$$+\frac{\lambda}{24}[y_{n-3} - 4y_{n-2} + 5y_{n-1} - 2y_n].$$

Das heißt also, daß die Ergänzungsteile für beide Fälle gleich sind.

Schließlich erhält man in diesem Fall folgende Formeln für die elastischen Einzelgewichte.

Für das vorletzte Gewicht:

$$\text{(4)} \qquad \boxed{W_{n-1} = \frac{\lambda}{12}(y_{n-2} + 10y_{n-1} + y_n)}$$

Eine neue Formel für das vorletzte Gewicht im Falle einer ungeraden Zahl von Feldweiten.

Wir sehen, daß diese Formel von (1) nicht verschieden ist.

Für das letzte Gewicht:

$$\text{(5)} \qquad \boxed{W_n = \frac{\lambda}{24}(y_{n-3} - 4y_{n-2} + 9y_{n-1} + 6y_n)}$$

Zu Gl. (5): Eine neue Formel für das letzte Gewicht im Falle einer ungeraden Zahl von Feldweiten.

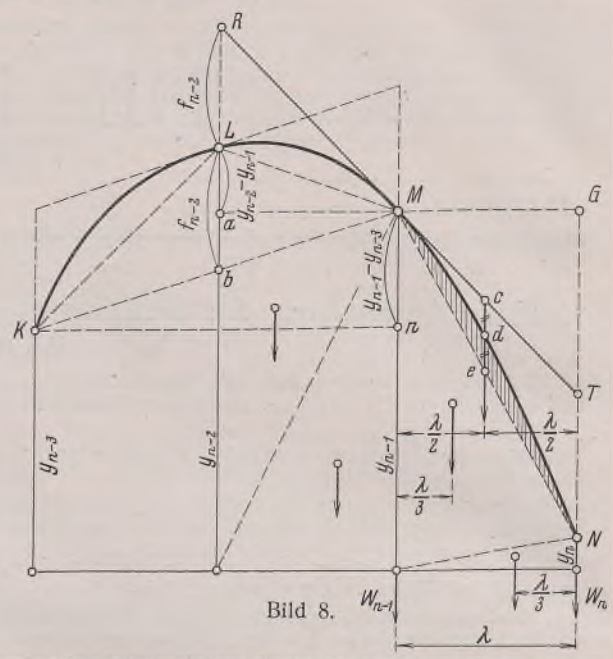


Bild 8.

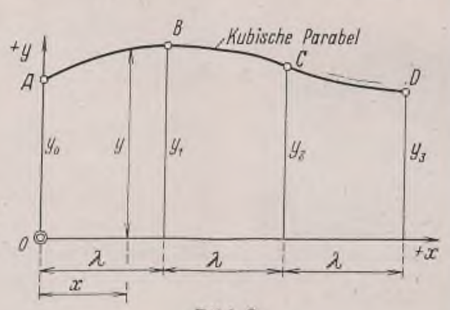


Bild 9.

2. Verfahren zur Berechnung der elastischen Einzelgewichte mit Hilfe der Simpsonschen Regel (mit kubischen Parabeln).

Da die Simpsonsche Regel für die Berechnung von Flächen, bei denen die Anzahl der Feldweiten durch 3 teilbar ist, viel genauere Ergebnisse liefert, so versuchen wir, diese Regel (mit der kubischen Parabel) bei der Berechnung der elastischen Einzelgewichte anzuwenden.

Für den Fall, daß die Anzahl der Feldweiten nicht durch 3 teilbar ist, wollen wir neue Ergänzungsformeln bestimmen.

Wir nehmen die gekrümmte Linie $ABCD$ als eine Parabel dritter Ordnung an: $y = y_0 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3$ (Bild 9).

Die Koeffizienten α, β, γ ergeben sich aus den Gleichungen

$$y_1 = y_0 + \alpha\lambda + \beta\lambda^2 + \gamma\lambda^3 \qquad y_2 = y_0 + 2\alpha\lambda + 4\beta\lambda^2 + 8\gamma\lambda^3$$
$$y_3 = y_0 + 3\alpha\lambda + 9\beta\lambda^3 + 27\gamma\lambda^3.$$

Man erhält also

$$\text{(6)} \quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3}{6\lambda} \qquad \beta = \dfrac{2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3}{2\lambda^2} \\ \gamma = \dfrac{-y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3}{6\lambda^3}. \end{cases}$$

Die elastischen Einzelgewichte werden wieder nach dem Hebelgesetz ermittelt (Bild 10):

das erste Gewicht

$$W_0 = \int_0^\lambda y\left(\frac{\lambda - x_1}{\lambda}\right)dx,$$

dann

$$W_1 = \int_0^\lambda y \cdot \frac{x_1}{\lambda} \cdot dx + \int_\lambda^{2\lambda} y\left(\frac{2\lambda - x_1}{\lambda}\right)dx$$

$$W_2 = \int_0^{2\lambda} y\left(\frac{x_2 - \lambda}{\lambda}\right)dx + \int_{2\lambda}^{3\lambda} y\left(\frac{3\lambda - x_3}{\lambda}\right)dx$$

und das letzte Gewicht

$$W_3 = \int_{2\lambda}^{3\lambda} y\left(\frac{x_3 - 2\lambda}{\lambda}\right)dx.$$

Die Integration liefert folgende Ergebnisse:

das erste Gewicht

$$\text{(7)} \qquad W_0 = \frac{\lambda}{360}[+97y_0 + 114y_1 - 39y_2 + 8y_3]$$

$$\text{(8)} \qquad W_1 = \frac{\lambda}{12}[y_0 + 10y_1 + y_2]$$

$$\text{(9)} \qquad W_2 = \frac{\lambda}{12}[y_1 + 10y_2 + y_3]$$

das letzte Gewicht

$$\text{(10)} \qquad W_3 = \frac{\lambda}{360}[8y_3 - 39y_1 + 114y_2 + 97y_3]$$

Neue Formeln für die elastischen Gewichte nach der Simpsonschen Regel mit Hilfe der kubischen Parabel. (Anzahl d. Feldweiten ist durch 3 teilbar).

Anmerkung 1: Bestimmung der elastischen Einzelgewichte für den Fall, daß bei der Division der Anzahl der Feldweiten mit 3 ein Rest von 1 verbleibt.

In diesem Falle zeichnet man in der letzten Feldweite eine quadratische Parabel BC (Bild 11). Zwecks Stetigkeit der gekrümmten Linie muß aber diese Parabel im Punkte B mit einer gemeinsamen Tangente anschließen.

Die Grundgleichung der kubischen Parabel AB lautet:

$$y = y_0 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3.$$

Die Gleichung der quadratischen Parabel BC ist:

$$y = a + b x + c x^2.$$

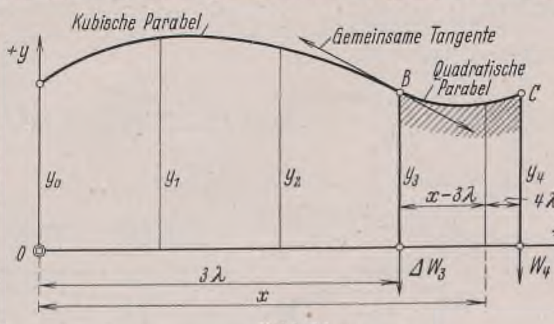


Bild 11.

Die gemeinsame Tangente im Punkte B gibt für $x = 3\lambda$:

1. $$\frac{dy}{dx} = b + 2cx = \alpha + 2\beta x + 3\gamma x^2$$
$$b + 6c\lambda = \alpha + 6\beta\lambda + 27\gamma\lambda^2.$$

Außerdem haben wir:

2. für $x = 3\lambda$: $\quad y_3 = a + 3b\lambda + 9c\lambda^2$
3. für $x = 4\lambda$: $\quad y_4 = a + 4b\lambda + 16c\lambda^2$.

Aus diesen drei Gleichungen findet man a, b, c:

$$a = +9y_4 - 8y_3 - 12(\alpha\lambda + 6\beta\lambda^2 + 27\gamma\lambda^3)$$
$$b = \frac{-6(y_4 - y_3) + 7(\alpha\lambda + 6\beta\lambda^2 + 27\gamma\lambda^3)}{\lambda}$$
$$c = \frac{y_4 - y_3 - (\alpha\lambda + 6\beta\lambda^2 + 27\gamma\lambda^3)}{\lambda^2}.$$

Das Ergänzungsgewicht der letzten Feldweite ist:

$$\Delta W_3 = \int_{3\lambda}^{4\lambda} y\left(\frac{4\lambda - x}{\lambda}\right) dx.$$

Die Integration ergibt:

(11) $$\Delta W_3 = \frac{\lambda}{72}[-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 41y_3 + 6y_4].$$

Das letzte elastische Gewicht

$$W_4 = \int_{3\lambda}^{4\lambda} y\left(\frac{x - 3\lambda}{\lambda}\right) dx.$$

Die Integration ergibt:

(12) $$\boxed{W_4 = \frac{\lambda}{72}[-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 29y_3 + 18y_4]}$$

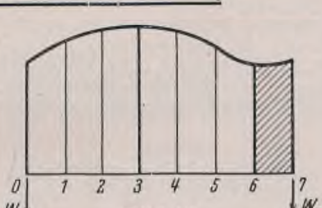


Bild 12.

Wenn sich also bei der Division der Anzahl der Feldweiten mit 3 der Rest 1 ergibt, kann man unter Anwendung der kubischen Parabel die folgenden neuen Formeln benutzen (Bild 12):

für das erste elastische Gewicht

(7) $$\boxed{W_0 = \frac{\lambda}{360}[+97y_0 + 114y_1 - 39y_2 + 8y_3]}$$

für die übrigen Einzelgewichte

(8) $$W_1 = \frac{\lambda}{12}[y_0 + 10y_1 + y_2]$$
(9) $$W_2 = \frac{\lambda}{12}[y_1 + 10y_2 + y_3]$$
$$W_3 = \frac{\lambda}{12}[y_2 + 10y_3 + y_4]$$ [3]
$$W_4 = \frac{\lambda}{12}[y_3 + 10y_4 + y_5]$$
$$W_5 = \frac{\lambda}{12}[y_4 + 10y_5 + y_6]$$
$$W_6 = \frac{\lambda}{12}[y_5 + 10y_6 + y_7]$$ [4]

(12) $$\boxed{W_7 = \frac{\lambda}{72}[-2y_3 + 9y_4 - 18y_5 + 29y_6 + 18y_7]}$$ [5]

Zu Gl. (7), (8), (9) u. (12): Neue Formeln, wenn die Division der Anzahl der Feldweiten mit 3 einen Rest von 1 ergibt.

Anmerkung 2: Bestimmung der elastischen Gewichte für den Fall, daß bei der Division der Anzahl der Feldweiten mit 3 ein Rest von 2 verbleibt.

In diesem Falle zeichnet man in den letzten zwei Feldweiten durch die Punkte BCD (Bild 13) eine kubische Parabel

$$y = m + n x + p x^2 + q x^3.$$

Zwecks Stetigkeit der gekrümmten Linie muß aber diese Parabel im Punkte B mit einer gemeinsamen Tangente anschließen.

Die Grundgleichung der kubischen Parabel AB lautet:

$$y = y_0 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3.$$

Die gemeinsame Tangente im Punkte B ergibt für $x = 3\lambda$:

1. $$\frac{dy}{dx} = n + 2px + 3qx^2 = \alpha + 2\beta x + 3\lambda x^2$$

oder $$n + 6p\lambda + 27q\lambda^2 = \alpha + 6\beta\lambda + 27\gamma\lambda^2;$$

außerdem

2. für $x = 3\lambda$: $\quad y_3 = m + 3n\lambda + 9p\lambda^2 + 27q\lambda^3$
3. „ $x = 4\lambda$: $\quad y_4 = m + 4n\lambda + 16p\lambda^2 + 64q\lambda^3$
4. „ $x = 5\lambda$: $\quad y_5 = m + 5n\lambda + 25p\lambda^2 + 125q\lambda^3$.

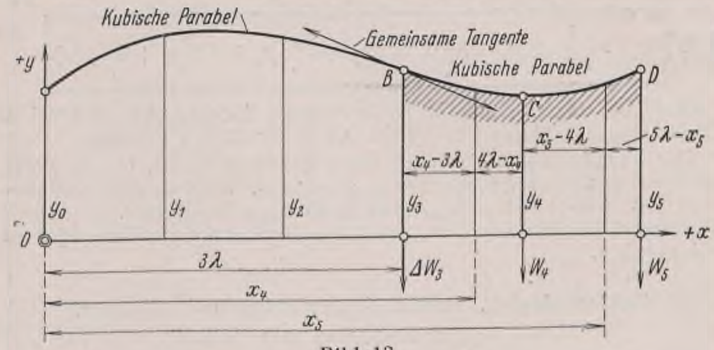


Bild 13.

Aus diesen vier Gleichungen findet man m, n, p und q[6].

$$m = -9y_5 + 45y_4 - 35y_3 - 30\lambda A$$
$$n = \frac{1}{4\lambda}(33y_5 - 156y_4 + 123y_3 + 94\lambda A)$$
$$p = \frac{1}{2\lambda^2}(-5y_5 + 22y_4 - 17y_3 - 12\lambda A)$$
$$q = \frac{1}{4\lambda^3}(y_5 - 4y_4 + 3y_3 + 2\lambda A),$$

wo $$A = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=3\lambda} = \alpha + 2\beta \cdot 3\lambda + 3\gamma q\lambda^2$$
$$= \frac{1}{6\lambda}(-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3).$$

Das elastische Ergänzungsgewicht der vorletzten Feldweite ist:

$$\Delta W_3 = \frac{1}{\lambda}\int_{3\lambda}^{4\lambda} y(4\lambda - x)\,dx \quad (\text{für } y = m + nx + px^2 + qx^3).$$

Die Integration liefert:

(13) $$\Delta W_3 = \frac{\lambda}{360}[-8y_0 + 36y_1 - 72y_2 + 185y_3 + 42y_4 - 3y_5]$$ [6].

Das elastische Gewicht

$$W_4 = \frac{1}{\lambda}\left[\int_{3\lambda}^{4\lambda} y(x - 3\lambda)\,dx + \int_{4\lambda}^{5\lambda} y(5\lambda - x)\,dx\right]$$

das letzte elastische Gewicht

$$W_5 = \frac{1}{\lambda}\int_{4\lambda}^{5\lambda} y(x - 4\lambda)\,dx.$$

---

[3]) Anstatt $$\underbrace{\frac{\lambda}{360}[8y_0 - 39y_1 + 114y_2 + 97y_3]}_{\text{Formel (10)}} + \underbrace{\frac{\lambda}{72}[-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 41y_3 + 6y_4]}_{\text{Formel (11)}}$$
der Unterschied ist sehr klein.

[4]) Anstatt $$\underbrace{\frac{\lambda}{360}[8y_3 - 39y_4 + 114y_5 + 97y_6]}_{\text{Formel (10)}} + \underbrace{\frac{\lambda}{72}[-2y_3 + 9y_4 - 18y_5 + 41y_6 + 6y_7]}_{\text{Formel (11)}}$$
der Unterschied ist sehr klein.

[5]) Zur Kontrolle der Koeffizienten benutzt man die Gleichung einer willkürlichen Geraden; z. B. für $y = \text{konst}$ erhält man

$$W_7 = \frac{-2 + 9 - 18 + 29 + 18}{72} \cdot \lambda y = +\frac{1}{2} \cdot \lambda y.$$

[6]) Zur Kontrolle der Koeffizienten benutzt man die Gleichung einer willkürlichen Geraden: $y = ax + b$ oder $y = \text{konst}$.

Nach der Integration erhält man also für den Fall, daß bei der Division der Anzahl der Feldweiten mit 3 der Rest 2 verbleibt, folgende Ergebnisse:

Das erste elastische Gewicht

$$W_0 = \frac{\lambda}{360}\,[+97\,y_0 + 114\,y_1 - 39\,y_2 + 8\,y_3] \tag{7}$$

$$W_1 = \frac{\lambda}{12}\,[y_0 + 10\,y_1 + y_2] \tag{8}$$

$$W_2 = \frac{\lambda}{12}\,[y_1 + 10\,y_2 + y_3] \tag{9}$$

$$W_3 = \frac{\lambda}{12}\,[y_2 + 10\,y_3 + y_4]^{7)}$$

$$W_4 = \frac{\lambda}{12}\,[y_3 + 10\,y_4 + y_5] \tag{14}$$

das letzte elastische Gewicht

$$W_5 = \frac{\lambda}{360}\,[8\,y_0 - 36\,y_1 + 72\,y_2 - 95\,y_3 + 138\,y_4 + 93\,y_5]^{8)} \tag{15}$$

Zu Gl. (7), (8), (9), (14) u. (15): Neue Formeln für den Fall, daß bei der Division der Anzahl der Feldweiten mit 3 der Rest 2 verbleibt.

Das Verfahren läßt sich auch ohne Rücksicht darauf, ob die Felderzahl durch 3 teilbar ist oder nicht, anwenden, wenn in den Endfeldern (0—1) bzw. $(n-1)-n$ oder in den Endfeldern (0—2) bzw. $(n-2)-n$ sich stärkere Abweichungen zwischen der Ersatzkurve und der gegebenen Linie ergeben.

Zahlenbeispiel. Durchlaufender Balken mit 3 Feldern.

$$l_1 = l_2 = l_3 = 10 \cdot 2{,}00 = 20 \text{ m (Bild 14).}$$

Die Verhältnisse der Trägheitsmomente sind nach dem parabolischen Gesetz $J_c/J = c_x$ angenommen:

$$\text{für die Außenfelder: } c_x = \frac{2\,l^2 - x^2}{2\,l^2}$$

$$\text{für das Mittelfeld: } c_x = \frac{l^2 + 4\,l\,x - 4\,x^2}{2\,l^2}.$$

Nehmen wir $c = \frac{1}{2}$ an.

Analytische Lösung (genau) (Bild 14).

Man erhält also:

$$\int M_a^2 \cdot \frac{J_c}{J} \cdot dx = \int M_a^2\, c_x\, dx = \frac{7}{30} \cdot l + \frac{5}{6} \cdot l + \frac{7}{30} \cdot l = \frac{13}{10} \cdot l.$$

Erstes Feld:

$$X_a = -\frac{\int M_0\, M_a \cdot \frac{J_c}{J} \cdot dx}{\int M_a^2 \cdot \frac{J_c}{J} \cdot dx} = -\frac{\left(\frac{7}{120} \cdot l\,x - \frac{x^3}{6\,l} + \frac{x^5}{40\,l^2}\right)}{\frac{13}{10} \cdot l}.$$

Zweites Feld:

$$X_a = -\frac{\left(\frac{5}{12} \cdot l\,x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3\,l} + \frac{x^4}{6\,l^2}\right)}{\frac{13}{10} \cdot l}.$$

Elastische Gewichte:

$$W = M_{el} = (M_0 + M_a\, X_a + M_b\, X_b)\,\frac{J_c}{J} = (M_0 + M_a\, X_a + M_b\, X_b)\, c_x.$$

Es folgt für die Mitte des Mittelfeldes

$$X_a = -\frac{55}{624} \cdot l \qquad X_b = 0.$$

Wir haben I. Feld: $M_0 = 0$, $M_a = +\frac{x}{l}$

II. Feld: $M_0 = +\frac{x}{2}$, $M_a = +1$.

Die elastischen Gewichte für das erste Feld sind:

$$W = M_a\, X_a\, c_x = \left(+\frac{x}{l}\right)\left(-\frac{55\,l}{624}\right)\left(\frac{2\,l^2 - x^2}{2\,l^2}\right) = -\frac{55}{1248\,l^2}\,(2\,l^2\,x - x^{\cdot}).$$

Die Auflagerkraft

$$B_1 = \int_0^l W \cdot \frac{x}{l} \cdot dx = \int_0^l \frac{-55}{1248\,l^2}\,(2\,l^2\,x - x^3)\,\frac{x}{l} \cdot dx = -\frac{77\,l^2}{3744}.$$

II. Feld:

$$W = (M_0 + M_a\, X_a)\, c_x = \left[+\frac{x}{2} + (+1)\left(\frac{-55\,l}{624}\right)\right]\left(\frac{l^2 + 4\,l\,x - 4\,x^2}{2\,l^2}\right).$$

Die Auflagerkraft

$$B_2 = \int_0^{l/2} W\,dx = \int_0^{l/2}\left[\frac{l^2\,x + 4\,l\,x^2 - 4\,x^3}{4\,l^2} - \frac{55}{1248\,l}(l^2 + 4\,l\,x - 4\,x^2)\right] dx = +\frac{77\,l^2}{3744}.$$

Kontrolle: $B_1 + B_2 = B = 0.$

$$B_1 = -\frac{77\,x \cdot 20^2}{3744} = -\underline{8{,}226\,496} \quad \text{(genauer Wert).}$$

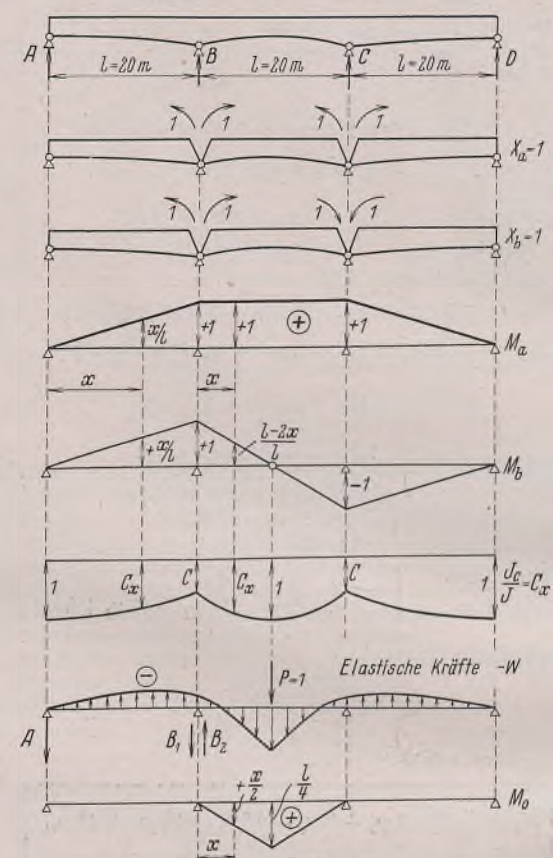


Bild 14.

Vergleich der Ergebnisse der drei verschiedenen Berechnungsverfahren.

	Knotenpunkte	Ordinaten y der Belastungsfläche	Elastische Gewichte: Trapezverfahren	Elastische Gewichte: Das Verfahren von Wanke	Elastische Gewichte: Das vorgeschlagene Verfahren (Simpsonsche Regel mit kubischer Parabel)	
I. Feldweite	0	0	— 0,115 171	— 0,058 908	— 0,058 673	
	1	— 0,175 401	— 0,349 039	— 0,349 921	Dieselben Werte wie bei dem Verfahren von Wanke	
	2	— 0,345 513	— 0,687 500	— 0,689 263		
	3	— 0,505 048	— 1,004 808	— 1,007 452		
	4	— 0,648 718	— 1,290 385	— 1,293 910		
	5	— 0,771 234	— 1,533 654	— 1,538 061		
	6	— 0,867 308	— 1,724 039	— 1,729 328		
	7	— 0,931 651	— 1,850 962	— 1,857 132		
	8	— 0,958 974	— 1,903 846	— 1,910 897		
	9	— 0,943 990	— 1,872 115	— 1,880 047		
	10	— 0,881 410	— 0,902 270	— 0,906 236	— 0,906 194	
II. Feldweite	0	— 0,881 410	— 0,760 513	— 0,789 719	— 0,795 048	
	1	— 0,518 718	— 0,920 609	— 0,979 023	Dieselben Werte wie bei dem Verfahren von Wanke	
	2	+ 0,194 455	+ 0,465 769	+ 0,427 340		
	3	+ 1,138 205	+ 2,313 237	+ 2,294 824		
	4	+ 2,192 436	+ 4,381 709	+ 4,383 291		
	5	+ 3,237 179	+ 2,888 931	+ 2,889 722	+ 2,895 043	
Auflagerkraft	B_1		— 8,197 174	— 8,226 260	— 8,226 218	Genauer Wert
	B_2		+ 8,368 524	— 8,226 435	+ 8,226 427	8,226 496
Genauigkeit der Berechnung $\Delta = \frac{(B_1 - B_2) x 100}{8{,}226\,496} =$			2,1 %	0,002 %	0,0025 %	

---

[7] Anstatt

$$\underbrace{\frac{\lambda}{360}\,[8\,y_0 - 39\,y_1 + 114\,y_2 + 97\,y_3]}_{\text{Formel (10)}} + \underbrace{\frac{\lambda}{360}\,[-8\,y_0 + 36\,y_1 - 72\,y_2 + 185\,y_3 + 42\,y_4 - 3\,y_5]}_{\text{Formel (11)}} = \frac{\lambda}{120}\,[-y_1 + 14\,y_2 + 94\,y_3 + 14\,y_4 - y_5];$$

der Unterschied ist sehr klein.

[8] Zur Kontrolle der Koeffizienten benutzt man die Gleichung einer willkürlichen Geraden $y = a\,x + b$ oder $y = \text{konst.}$

Aus diesem Beispiel ist zu ersehen, daß die Genauigkeit des Trapezverfahrens ganz unbefriedigend ist. Sowohl das Verfahren von Wanke als auch das vorgeschlagene Verfahren (Simpsonsche Regel mit kubischen Parabeln) geben auffallend gute Ergebnisse.

Bei der Betrachtung der Formeln sieht man, daß die Koeffizienten der dreigliedrigen Größe für die Zwischenpunkte (1 + 10 + 1) in den beiden letzten Verfahren die gleichen sind. Die Genauigkeit beider Verfahren ist die gleiche.

Anmerkung: Ändert sich das Trägheitsmoment J_m unstetig, können die angegebenen Formeln nicht verwendet werden, da bei beiden beschriebenen Verfahren die Stetigkeit der Funktion J_c/J vorausgesetzt wurde.

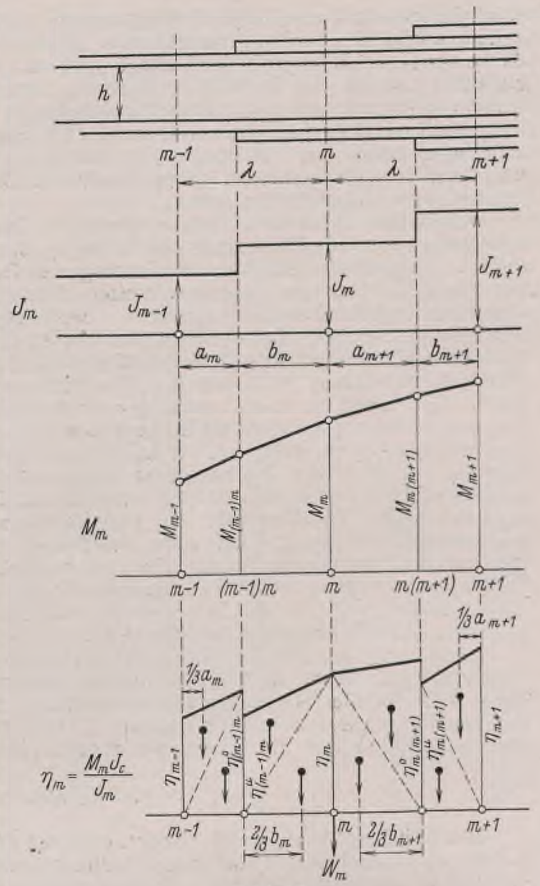


Bild 15.

Hat man z. B. einen kontinuierlichen Balken von konstanter Höhe mit sprungweise veränderlichem Trägheitsmoment, so ergeben sich die elastischen Gewichte der Belastungsfläche

$$\left(M_a \cdot \frac{J_c}{J}\right) \text{ oder } M \cdot \frac{J_c}{J} = (M_0 + M_a X_a + M_b X_b + \ldots) \frac{J_c}{J}.$$

Hierbei kann man ein Verfahren von H. Müller-Breslau anwenden[9]), das sich aber verbessern läßt. Die verschiedene Länge der Lamellen bedingt die Berechnung der Biegemomente an den Stellen, an denen die einzelnen Lamellen endigen (Bild 15).

Das elastische Gewicht für den Knotenpunkt m ist gleich

$$\begin{aligned} E J_c W_m = J_c \Bigg\{ & \frac{M_{m-1}}{J_{m-1}} \left(\frac{a_m}{2} \cdot \frac{a_m}{3\lambda}\right) + \frac{M_{(m-1)m}}{J_{m-1}} \left(\frac{a_m}{2} \cdot \frac{2a_m}{3\lambda}\right) \\ & + \frac{M_{(m-1)m}}{J_m} \cdot \frac{b_m}{2} \left(\frac{a_m + \frac{b_m}{3}}{\lambda}\right) + \frac{M_m}{J_m} \left(\frac{a_m + \frac{2}{3} \cdot b_m}{\lambda}\right) \\ & + \frac{M_m}{J_m} \cdot \frac{a_{m+1}}{2} \left(\frac{b_{m-1} + \frac{2}{3} \cdot a_{m+1}}{\lambda}\right) \\ & + \frac{M_{(m+1)m}}{J_m} \cdot \frac{a_{m+1}}{2} \left(\frac{b_{m+1} + \frac{1}{3} \cdot a_{m+1}}{\lambda}\right) \\ & + \frac{M_{(m+1)m}}{J_{m+1}} \cdot \frac{b_{m+1}}{2} \cdot \frac{\frac{2}{3} \cdot b_{m+1}}{\lambda} \\ & + \frac{M_{m+1}}{J_{m+1}} \cdot \frac{b_{m+1}}{2} \cdot \frac{\frac{1}{3} \cdot b_{m+1}}{\lambda} \Bigg\}. \end{aligned}$$

Ganz analog findet man die elastischen Gewichte für den Außenknotenpunkt.

Die vorstehenden Untersuchungen zeigen, daß das Verfahren nach Wanke die gleiche Genauigkeit gibt wie das Verfahren nach der Simpsonschen Regel mit kubischen Parabeln. Es empfiehlt sich also, ohne Rücksicht auf die Zahl der Felder das einfache Verfahren nach Wanke anzuwenden, in Sonderfällen ergänzt durch die von mir angegebenen Formeln für die Endgewichte.

[9]) H. Müller-Breslau, Die neueren Methoden, III. Aufl., 1904, S. 173.

Die in geschweißten Blechträgern bei hoher Einzellast (300 t) auftretenden Spannungen und ihre Verteilung.

Von **Johann Martin Bernhard**, München.

Inhalt: Die beim Schweißen entstehenden Schrumpfspannungen verbiegen den Obergurt und verhindern so eine gleichmäßige Kräfteübertragung von Lamelle auf das Stegblech. Die Warmbehandlung beim Schweißprozeß verhindert diese ungünstigen Wirkungen der Spannungen. Druckversuche an einem Probestück beweisen die Brauchbarkeit dieses Verfahrens sowie auch die Zuverlässigkeit der Schweißnähte selbst bei hohen Einzellasten. Kritik der zur Zeit bestehenden Berechnungsmethoden.

Geschweißte Blechträger und Rahmentragwerke werden neuerdings auch im Kranbau verwendet. Sie bieten gegenüber genieteten Blech- oder Fachwerkträgern manche Vorteile.

So kann ein Blechträger rechnerisch höher als ein Fachwerkträger beansprucht werden.

Die graphostatische Kräftebestimmung bei letzterem setzt in den Fachwerkknoten Gelenke voraus. Da diese nicht vorhanden sind, kommen zu den Zug- und Druckspannungen noch nicht unerhebliche Biegungsspannungen hinzu, die in der Praxis rechnerisch nicht erfaßt werden können und denen durch eine geringere Beanspruchung Rechnung getragen werden muß. Auch durch die Fortschritte in der Schweißtechnik ist die Bevorzugung geschweißter Träger gefördert worden. Da nun die Schweißnähte in der stark gefährdeten Zone des ganzen Trägerquerschnitts liegen, wurden in Fachkreisen Zweifel über die Sicherheit und Zuverlässigkeit insbesondere bei hohen Einzellasten geäußert. Die Versuche[1]) mit geschweißten Trägern gaben in dieser Hinsicht interessante Aufschlüsse, deren Ergebnisse in der Folge besprochen werden sollen. Bei genieteter Trägerkonstruktion war es früher üblich, zwischen Stegblech und Obergurtlamelle einen Spielraum zu lassen (Bild 1), um einesteils das Abhobeln des Stegbleches zu vermeiden und andererseits einen dichten Anschluß von Obergurt und Gurtwinkel zu ermöglichen. Die Halsniete mußten dann so dick ausgeführt werden, daß sie den gesamten Druck aufnehmen und übertragen konnten. Bei größerer Belastung hatte man jedoch die Konstruktion so gewählt, daß die Lamelle hart auf dem Stegblech aufliegt (Bild 2), was durch Bearbeitung des Stegbleches und Richten der Lamelle erreicht wurde. Die Halsniete sind dann wesentlich entlastet. Die Druckübertragung erfolgt nun unmittelbar vom Obergurt auf das Stegblech. Für geschweißte Träger ist natürlich die zweite Ausführung besonders angezeigt. Hier besteht aber noch die Forderung, daß die Lamelle auch nach der Schweißung noch voll auf dem Stegblech aufliegt, was nach den Betriebserfahrungen nicht ohne weiteres erreicht wird. Beim Schweißen biegen sich nämlich die Lamellenenden rechts und links vom Stegblech infolge der in den Schweißnähten auftretenden Schrumpfspannungen, die in Längs- und Querrichtung der Nähte unvermeidlich sind, nach unten (Bild 3), so daß ein gewölbter Hohlraum zwischen Lamelle und der oberen Stegblechfläche entsteht. Von einer gleichmäßigen Druckübertragung kann dann nicht mehr die Rede sein. Auch treten nach der Schweißung an den Übergangsstellen von Lamelle zum Stegblech Spannungserhöhungen auf, die sich durch das Zusammenwirken von Längs- und Schubspannungen sowie durch Ablenkung der Schubspannungen beim Übergang von Steg zu Flansch ergeben, und setzen sich mit den Schrumpfspannungen in den Schweißnähten zusammen. Um nun beim Schweißen die ungünstigen Wirkungen dieser Spannungen aufzuheben, wurde ein Schweißverfahren[1]) entwickelt, welches durch Wärmebehandlung (Bild 4) während des Schweißprozesses solche Spannungserhöhungen verhindert[2]). Die Lamelle bleibt dann auch nach der Schweißung genau gerade. Die Schrumpfspannungen



Bild 1. Schematische Darstellung eines genieteten Blechträgers mit Spielraum zwischen Lamelle und Stegblech.

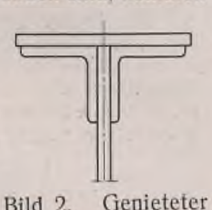


Bild 2. Genieteter Blechträger mit gehobelter Stegblechoberkante.



Bild 3. Geschweißter Blechträger.

Durch Schrumpfung gebogene Lamelle, die nur an den Kanten aufliegt. Die Druckübertragung erfolgt nur durch die Schweißnähte.

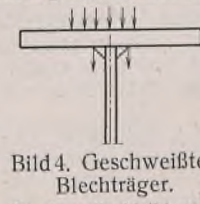


Bild 4. Geschweißter Blechträger.

Die Lamelle bleibt auch nach der Schweißung durch Wärmebehandlung gerade. Druckübertragung unmittelbar von Lamelle auf Stegblech.

[1]) Die Versuche wurden von der Firma Demag, Duisburg, ausgeführt, die auch die Unterlagen für die vorliegende Veröffentlichung freundlicherweise zur Verfügung stellte.

[2]) Näheres in den Fachzeitschriften über Schweißtechnik.

drücken dann die Lamelle so fest auf das Stegblech, daß eine durchgehende gleichmäßige Druckübertragung gewährleistet ist. Das Stegblech muß natürlich zuvor oben genau gehobelt und die Lamelle sauber gerichtet sein. Um nun die Zuverlässigkeit dieses Schweißverfahrens zu prüfen und die Haltbarkeit der Schweißnähte auch bei hoher örtlicher Belastung zu beweisen, wurde[1]) ein Probestück (Bild 5a) angefertigt und den in der Folge näher beschriebenen Belastungen ausgesetzt. Die Drücke wurden von einer vorhandenen Schmiedepresse ausgeübt, welche nachweislich einen maximalen Preßdruck von 300 t ausüben konnte. Um die Prüfung bis zur Leistungsgrenze der Presse durchführen zu können, mußte das Probestück so stark ausgeführt werden, daß es diesem maximalen Preßdruck gerade noch standhielt, falls die Schweißnähte nicht früher zerstört wurden. Als Laufschienenprofil wurde der schwerste Typ des Stahlwerkverbandes mit dem maximalen Trägheitsmoment (1425 cm⁴) gewählt. Um bei der Belastung dieselben Verhältnisse zu schaffen, wie sie unter dem Laufrad des Krans oder der Katze für eine entsprechende Tragfähigkeit zustande kommen, wurde der Druckstempel aus Stahl (St 37) nach einem Halbmesser von 0,6 m gewölbt ausgebildet. Um die seitliche Ausbiegung bei exzentrischer Belastung gegenüber dem Träger mit normaler Höhe nicht zu vermindern, wurden die seitlichen Versteifungen nur bis 100 mm unter dem Obergurt geführt.

Bild 5a. Probeträgerstück für die Druckversuche.
1 Druckstrahlung nach Vorschrift. *2* Druckstrahlung nach den Versuchsergebnissen. *3* Gequetschte Fläche bei 300 t Belastung. *4* Stützrichtung am Probestück. *5* Druckdiagramm im Querschnitt *B—B* bei 300 t Belastung.

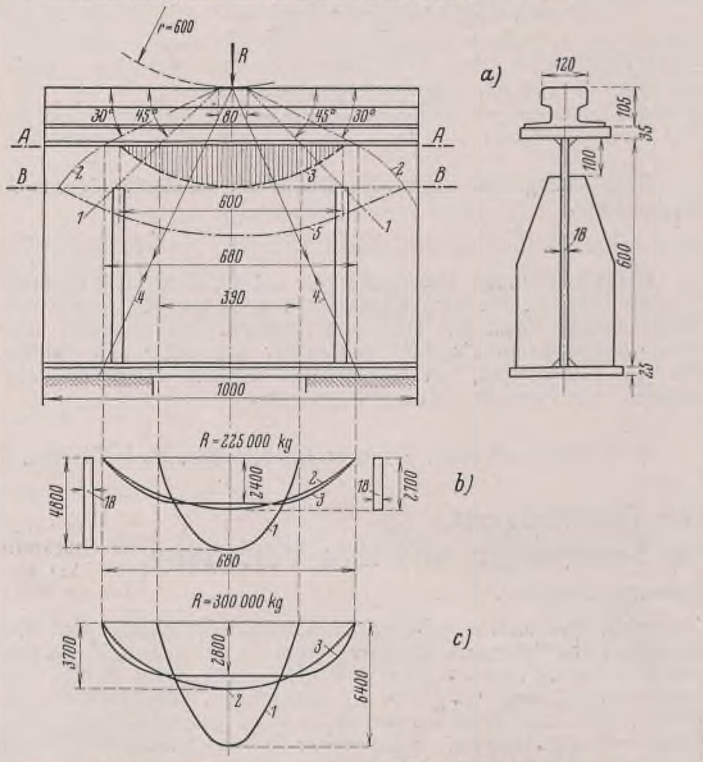


Bild 5b. Druckversuch mit 225 t Belastung.
1 Diagramm nach Vorschrift. *2* Diagramm nach den Versuchsergebnissen. *3* Diagramm unter Berücksichtigung des Spannungsausgleiches.

Bild 5c. Druckversuch mit 300 t Belastung.
1 Diagramm nach Vorschrift. *2* Diagramm nach den Versuchsergebnissen. *3* Diagramm unter Berücksichtigung des Spannungsausgleiches.

Die Stegblechhöhe konnte eben bei Verwendung der Schmiedepresse nur mit 600 mm ausgeführt werden. Diejenigen Teile, die zuerst belastet wurden, wie Stegblechdicke und Lamelle, erhielten aber die richtigen Dimensionen; die Schweißnähte die Solldicke von 8 mm (ohne Nacharbeit). Die Nachmessungen ergaben an den schwächsten Stellen $7\,^1/_2$ mm (Bild 6).

Es wurden nun vier Versuche mit stufenweise erhöhter Belastung durchgeführt, und zwar einmal zentrisch und ein anderes Mal exzentrisch zur Schienenmitte.

Beim 1. Versuch mit 75 t zentrischer Belastung wurden keinerlei Wirkungen beobachtet. Bei 112 t Belastung konnte ebenfalls keine Verformung nachträglich festgestellt werden. Nimmt man an, daß sich die gewölbte Fläche des Druckstempels bei 112 t um 0,5 mm elastisch eingedrückt hat, so würde sich eine Druckfläche von 4,6 × 11 cm² ausgebildet haben.

Der spezifische Druck auf die Schienenoberfläche ist dann:

$$\frac{112\,000}{11 \cdot 4{,}6} = 2200 \text{ kg/cm}^2.$$

Da die Fließgrenze des Materials nicht unter 2400 kg/cm² angenommen werden kann, so waren von vornherein keine Gefügeänderungen zu erwarten.

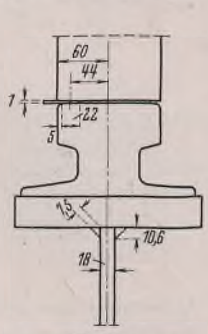


Bild 6. Exzentrische Belastung des Trägers durch Einlage eines Blechstreifens zwischen Schiene und Druckschuh.

Um den Einfluß etwaiger Durchbiegungen des Kran- oder Katzengerüstes auf die Schiene zu untersuchen, wurde beim 2. Versuch ein Blechstreifen von 1 mm Dicke einseitig zwischen Schiene und Druckschuh gelegt (s. Bild 6). Der Druck wurde dann langsam auf 75 t gebracht und da keinerlei Veränderungen beobachtet wurden, auf 112 t erhöht. Nach Entlastung wurde das Probestück genau untersucht; es konnten aber weder am Walzmaterial noch an den Schweißnähten irgendwelche Schäden festgestellt werden. Lediglich dort, wo der Blechstreifen auf der Schiene aufgelegen hatte, war eine leichte Eindrückung — mehr ein Glätten — der Oberfläche festzustellen. Der spezifische Druck mußte also die Quetschgrenze überschritten haben.

Bekanntlich fließt nach Überschreiten der Quetschgrenze der Stoff zunächst an der Oberfläche nach den Seiten ab, ohne daß eine Zerstörung erfolgt. Hierbei bildet sich unter Wahrung des Gefügezusammenhanges ein Fließwiderstand aus, der eine weitere Verformung verhindert und eine Erhöhung der Belastung gestattet. Bemerkenswert ist die oft beobachtete Erscheinung, daß bei einer errechneten theoretischen Spannung, die weit über der Quetschgrenze lag, die wirkliche mit dem Feinspiegelmeßgerät abgelesene Spannung die Quetschgrenze noch nicht erreicht hatte. Der Grund zu dieser auffälligen Erscheinung lag darin, daß die von den betreffenden Fasern weiter nach außen gelegenen die theoretische Quetschgrenze noch nicht erreicht hatten und eine weitergehende Verformung des über die Quetschgrenze beanspruchten Werkstoffes nicht gestatteten. Es findet dann in den benachbarten Zonen ein Spannungsausgleich statt. Die Vorgänge, die sich im Material bei solchen Kaltverformungen abspielen, sind noch keineswegs eindeutig geklärt, so daß zur Zeit eine ganze Anzahl Theorien besteht, von denen nur die Translationshypothese (von Tammann), die Verlagerungstheorie von Czochralski und die Beilby und Rosenhainsche Annahme einer amorphen Zwischensubstanz erwähnt seien.

Nimmt man an, daß bei der exzentrischen Belastung mit 112 t die elastische Eindrückung in die Wölbung des Druckschuhes rd. 2 mm betragen hat, was allenfalls noch möglich sein könnte, so beträgt die hierbei sich ausbildende Druckfläche im Stempel 2,2 × 11 cm². Der theoretische spezifische Druck auf die Schienenoberfläche errechnet sich dann mit:

$$\frac{112\,000}{2{,}2 \cdot 11} \sim 4600 \text{ kg/cm}^2.$$

In Wirklichkeit kann die Quetschgrenze nicht wesentlich überschritten worden sein. Der Träger hat sich bei dieser Belastung schon in Querrichtung so eingestellt, daß auch die andere Seite des Druckschuhes mit der Schiene in Berührung kam.

Beim 3. Versuch wurde zunächst eine zentrische Belastung von 150 t vorgenommen und dann auf 225 t erhöht. Dieser Druck wurde längere Zeit gehalten. Die Oberfläche der Schiene zeigte dabei in Trägermitte unter der Druckstelle eine Durchbiegung von 2 mm, die aber nach Entlastung wieder vollständig verschwand. Zerstörungen am Werkstoff konnten nirgends festgestellt werden; auch wurden während der Belastung keine Geräusche wahrgenommen, die auf Gefügeänderungen hätten schließen lassen. Der theoretische Druck je cm² auf die Schienenoberfläche war jetzt bei einer elastischen Flächenausbildung von 11 × 7 cm², was einer etwa 1 mm tiefen elastischen Eindrückung in den Druckschuh entspricht:

$$\frac{225\,000}{11 \cdot 7} = \sim 2900 \text{ kg/cm}^2.$$

In Wirklichkeit kann die Quetschgrenze nicht wesentlich überschritten worden sein.

Nach der zur Zeit bestehenden Theorie pflanzen sich nun diese Oberflächenspannungen unter 45° nach unten fort, wie dies in Bild 5a veranschaulicht ist, ausgehend von einer Basis von 60 bis 80 mm an der Druckstelle. Es können dann für die verschiedenen horizontalen Querschnitte die entsprechenden Spannungskurven gezeichnet werden, die bei gleichem Flächeninhalt in den unteren Querschnitten immer flacher werden. Da diese Kurven parabelförmig verlaufen, so kann der Inhalt des jeweiligen Preßschemas schnell ermittelt werden, der gleich dem Preßdruck R ist:

$$R = {}^2/_3\, l\, K\, d.$$

Hierin bedeutet:

l die Parabellänge,
K den maximalen spezifischen Preßdruck und
d die Blechdicke an dieser Stelle.

Die Spannung K ist also umgekehrt proportional der Blechdicke. Der gefährliche Querschnitt liegt deshalb unmittelbar unterhalb der Schweißnähte im Obergurt im Querschnitt *A—A* (s. Bild 5a). In dieser Höhenlage wird die Parabellänge nach der bestehenden Theorie mit rd. 39 cm gemessen. Nach Gl. (1) ist dann die in dieser Ebene auftretende maximale Pressung (K_{max}) bei einer Stegblechdicke von $d = 1{,}8$ cm

$$K_{max} = \frac{225\,000 \cdot 3}{39 \cdot 1{,}8 \cdot 2} = 4800 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{(s. Bild 5b, Kurve 1).}$$

Die wirkliche maximale Spannung konnte aber nicht wesentlich die Quetschgrenze überschritten haben und jedenfalls nicht größer sein als die zuvor errechnete Druckspannung auf die Schienenoberfläche. Die beobachtete elastische Durchbiegung von 2 mm läßt aber erkennen, daß die wirklichen Spannungen bereits einen erheblichen Umfang angenommen hatten. Es wurde deshalb noch eine zweite Parabel mit meiner maximalen Spannung von 2700 kg/cm² gezeichnet, welche wohl der Wirklichkeit näherkommt. Es ergibt sich dann nach Gl. (1) die zugehörige Parabellänge mit

$$225\,000 = {}^2/_3\, l \cdot 1{,}8 \cdot 2700$$

$$l = \sim 68 \text{ cm} \quad \text{(s. Bild 5b, Kurve 2).}$$

Um nun den weiter oben näher ausgeführten Erfahrungen über den Spannungsausgleich Rechnung zu tragen, wurde endlich noch eine dritte Kurve gezeichnet (s. Bild 5b, Kurve 3) mit einer maximalen Druckspannung von 2400 kg/cm².

Beim 4. Versuch wurde durch Einlage des Blechstreifens in der bereits beschriebenen Weise ein exzentrischer Druck ausgeübt, der dann bis zur Grenze der Leistungsfähigkeit der Presse und des Probestückes auf 300 t erhöht wurde. Unter diesem Druck, der einige Zeit gehalten wurde, begann am Stegblech die Walzhaut auf einer Breite von 200 mm an der Druckstelle unterhalb der Schweißnaht abzublättern. Die Quetschgrenze war also für die oberen Trägerpartien wesentlich überschritten. Durch Ätzung konnte die Ausdehnung der Druckfortpflanzung sichtbar gemacht werden (s. die schraffierte Fläche in Bild 5a). An den Schweißnähten des Obergurtes selbst waren aber auch jetzt noch keine Anzeichen einer Zerstörung wahrzunehmen. Die später vorgenommene magnetische Prüfung hat die Unversehrtheit der Schweißnähte bestätigt.

Die Lamelle muß also auf der ganzen Länge der gehobelten Stegblechfläche aufgelegen haben, denn nur so war es möglich, den Druck ohne Schädigung der Schweißnähte zu übertragen; gleichzeitig wurde hiermit aber auch die Zuverlässigkeit des anfangs beschriebenen Schweißverfahrens bewiesen.

Die Tatsache, daß das Stegblech erst unterhalb der Schweißnaht gequetscht wurde, beweist ferner noch, daß die Schweißnähte ebenfalls an der Druckübertragung teilgenommen und das Stegblech an dieser Stelle verstärkt hatten.

Die Oberfläche der Schiene zeigte im Vergleich mit dem 2. Versuch keine weiteren Eindrücke. Dagegen hatte sich der aufgelegte Blechstreifen in das aus Stahl St 37 bestehende Druckstück vollkommen eingedrückt (Bild 7). Die bleibende Durchbiegung betrug 2,5 mm. Der gewölbte Druckschuh war auf einer Breite von 75 mm, an der Blecheinlage auf einer Breite von 96 mm abgeflacht, was einer Eindrückung in die Wölbung von 1,2 bzw. 2,1 mm entspricht.

Der Höhenunterschied beträgt also $2{,}1 - 1{,}2 = 0{,}9$ mm. Das ist die inzwischen reduzierte Blechdicke.

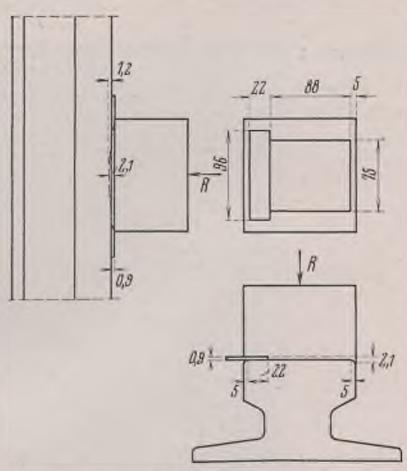


Bild 7.
Abflachung der gewölbten Fläche des Druckschuhes.

Der theoretische spezifische Druck auf die Schiene errechnet sich hiermit mit

$$\frac{300\,000}{7{,}5 \cdot 8{,}8 + 9{,}6 \cdot 2{,}2} \sim 3400 \text{ kg/cm}^2.$$

Bei der Untersuchung des Stegbleches nach der exzentrischen Belastung konnten keinerlei Verbiegungen im Querschnitt festgestellt werden. Die Biegungsbeanspruchungen in dieser Richtung konnten jedenfalls die Elastizitätsgrenze (rd. 2000 kg/cm²) nicht überschritten haben. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich bei der vorhandenen Exzentrizität von $x = 4{,}4$ cm und dem Widerstandsmoment des Stegbleches in Querrichtung

$$W = \frac{100 \cdot 1{,}8^2}{6} = 54 \text{ cm}^3$$

der maximale exzentrische Druck P nach der bekannten Formel

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{P\,x}{W} = \frac{P \cdot 4{,}4}{54} = 2000$$

mit $P = 25$ t.

Bei höherer Belastung mußte sich der Träger so elastisch in Querrichtung eingestellt haben, daß auch die andere Seite des Druckschuhes mit der Kranschiene in Berührung kam.

Legt man nun die maximale Biegungsspannung von 2000 kg/cm² im Stegblech der Berechnung zugrunde, so ergibt sich an der Schweißnahtwurzel entsprechend dem Verhältnis:

Widerstandsmoment des Stegbleches

$$W_{St} = \frac{1 \text{ cm} \cdot 1{,}8^2}{6} = 0{,}54 \text{ cm}^3,$$

zu dem reduzierten Widerstandsmoment der Schweißnähte:

$$W_{Schw} = 2{,}25 \text{ cm}^3$$

$$\frac{W_{St}}{W_{Schw}} = \frac{0{,}54}{2{,}25} = 0{,}24$$

die größte Beanspruchung in Querrichtung aus der maximalen exzentrischen Belastung

$$\sigma_b = 0{,}24 \cdot 2000 = 480 \text{ kg/cm}^2.$$

Von besonderem Interesse ist die theoretische und wirkliche Druckverteilung bei 300 t Belastung im gefährlichen Querschnitt A—A (s. Bild 5a). Bei einer Druckstrahlung unter 45° ergibt sich die Länge der Parabel mit etwa 39 cm. Der maximale spezifische Druck (K_{max}) des Preßschemas ist dann bei einer Stegblechdicke von 1,8 cm nach Gl. (1):

$$R = 300\,000 = {}^2/_3 \cdot 39\,K \cdot 1{,}8$$

$$K_{max} = 6400 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{(s. Bild 5c, Kurve 1).}$$

Man erkennt, daß die wirkliche Druckverteilung einen wesentlich größeren Umfang erreicht hatte, wie dies auch experimentell festgestellt werden konnte.

Unter einer Druckstrahlung von 30° ergibt sich eine Parabellänge von rd. 68 cm. Der maximale spezifische Druck ist dann [nach Gl. (1)]:

$$K_{max} = \frac{300\,000 \cdot 3}{1{,}8 \cdot 68 \cdot 2} = 3700 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{(s. Bild 5c, Kurve 2).}$$

Auf Grund der Erfahrungen wird sich dann das Druckdiagramm nach Kurve 3 ausgebildet haben. Die maximale Spannung ist dann immer noch 2800 kg/cm², die der Wirklichkeit einigermaßen entsprechen wird. Inwieweit die Druckstrahlung unter 30° in den weiter unten gelegenen Querschnitten noch Gültigkeit besitzt, zeigt die Druckflächenberechnung im Schnitt B—B (s. Bild 5a). Hier muß der maximale Druck in der Mitte die Quetschgrenze überschritten haben, wie dies aus der schraffierten Quetschfläche in Bild 5a ersichtlich ist.

Man hat deshalb nach Gl. (1)

$$R = {}^2/_3\, l\, K d.$$

Setzt man wieder für $K = 2700$ kg/cm² ein, so wird die Parabellänge

$$l = \frac{300\,000 \cdot 3}{2700 \cdot 1{,}8 \cdot 2} = 93 \text{ cm} \quad \text{(s. Bild 5a, Kurve 5).}$$

Die Druckstrahlung verläuft also näherungsweise in einer Kurve, die in Bild 5a mit Ziffer „2" bezeichnet ist.

Die Tiefe und Länge der Druckzone im Träger ist natürlich auch von der Auflagerentfernung abhängig. Die Richtungen der Druckmittelkräfte (s. Bild 5a) schließt beim Probestück einen kleineren Winkel als bei der Ausführung am Kranträger ein. Bei letzterem wird also die Parabellänge noch größer sein, als dies durch vorliegende Versuche festgestellt wurde.

Die maximalen spezifischen Drücke sind also bei Kranträgerausführungen kleiner als diejenigen am Probestück.

Zusammenfassung.

1. Die Versuche an dem Trägerprobestück haben den Beweis erbracht, daß durch eine Wärmebehandlung während des Schweißprozesses die ungünstigen Wirkungen der Schrumpfspannungen vermieden werden können und eine gleichmäßige Druckübertragung von Lamelle auf das Stegblech gewährleistet ist.

2. Die Verteilung des Druckes nach unten erfolgt auf einer wesentlich größeren Länge (l), als dies die zur Zeit bestehende Berechnungsmethode vorschreibt.

3. Unter diesen Voraussetzungen kann auch eine große Einzellast die Haltbarkeit der Schweißnähte nicht gefährden.

Die Kopplung oder gegenseitige Beeinflussung lastverteilender Querscheiben.

Von Studienrat Dr.-Ing. **Friedrich Geiger**, Erfurt.

(Schluß aus Heft 3/4.)

2. Beispiel.

In einem weiteren Beispiel eines Trägerrostes (Bild 20) soll der Einfluß der Nachbarscheiben gezeigt werden, und zwar für einen Rost, der sich über zwei Öffnungen spannt.

Verhältnis der Trägheitsmomente:

$$\frac{J_Q}{J_H} = \frac{1}{6}.$$

a) Ermittlung der Quereinflußlinienordinaten nach den allgemeinen Methoden der Baustatik, wie in dem vorhergehenden Beispiel gezeigt wurde.

Der ausführlich gegebene Rechnungsgang in dem ersten Beispiel erlaubt es, hier nur die Resultate anzugeben:

Für den äußersten Hauptträger 0 ergeben sich die Ordinaten der Quereinflußlinie zu:

$\eta_0^0 = 0{,}7569 \qquad \eta_1^0 = 0{,}3382 \qquad \eta_2^0 = 0{,}0528 \qquad \eta_3^0 = -0{,}1479.$

b) Ermittlung nach meinem Rechnungsvorschlag.

1. Mit Berücksichtigung der Querscheibe im Nachbarfeld.

Konstanten des Rostsystems:

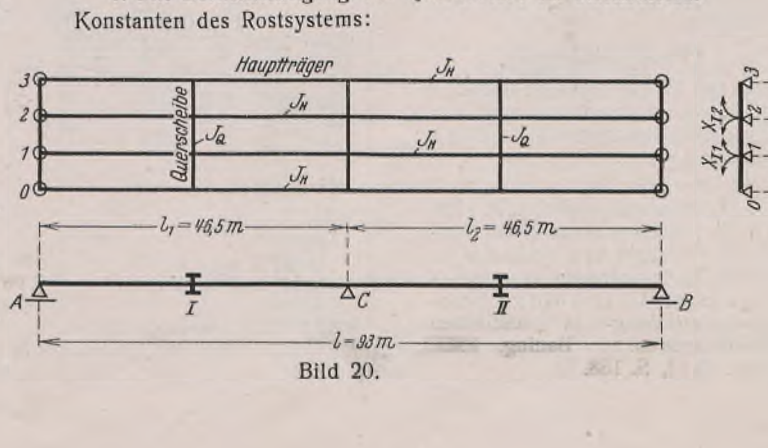


Bild 20.

μ-Wert (Bild 4):

$$\mu_{\mathrm{I\,ideell}} = \mu_{\mathrm{I\,I}} - \mu_{\mathrm{I\,II}}$$

$$\mu_{\mathrm{I\,ideell}} = \frac{23}{12288} - \frac{23}{12288} \cdot \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \underline{\underline{\frac{46}{36864}}}$$

K-Wert:

$$K = 6\,\mu \cdot \frac{J_Q}{J_H} \cdot \frac{l^3}{\lambda^2} = 6 \cdot \frac{46}{36864} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{93^3}{5{,}16^2} = \underline{\underline{\frac{2403{,}27}{64}}}$$

α-Werte:

$$\alpha_1 = 4 + K \cdot \frac{6}{\lambda} = 4 + \frac{2403{,}27}{64} \cdot \frac{6}{5{,}16} = \underline{\frac{6101}{128}}$$

$$\alpha_2 = 1 - K \cdot \frac{4}{\lambda} = 1 - \frac{2403{,}27}{64} \cdot \frac{4}{5{,}16} = -\underline{\frac{3598}{128}}$$

$$\alpha_1^2 = \left(\frac{6101}{128}\right)^2 = \frac{37\,222\,201}{16\,384} \qquad \alpha_2^2 = \left(-\frac{3598}{128}\right)^2 = \frac{12\,945\,604}{16\,384}$$

$$\alpha_1^2 - \alpha_2^2 = \underline{\frac{24\,276\,597}{16\,384}}.$$

Querscheibenmomente in den Kreuzungspunkten:

$$X_{11} = K \cdot \frac{-\alpha_1}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} = \frac{2403{,}27}{64} \cdot \frac{-\frac{6101}{128}}{\frac{24\,276\,597}{16\,384}} = -\underline{\underline{1{,}209}}\ \mathrm{tm}$$

$$X_{12} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot X_{11} = -\frac{3598}{6101} \cdot 1{,}209 = -\underline{\underline{0{,}713}}\ \mathrm{tm}.$$

Die Ordinaten der Quereinflußlinie des Randhauptträgers:

$$\eta_0^0 = 1 + \frac{X_{11}}{\lambda} = 1 - \frac{1{,}209}{5{,}16} = \underline{\underline{0{,}7657}}$$

genauer Wert: $(\eta_0^0 = 0{,}7569)$

$$\eta_1^0 = -2 \cdot \frac{X_{11}}{\lambda} + \frac{X_{12}}{\lambda} = 2 \cdot \frac{1{,}209}{5{,}16} - \frac{0{,}713}{5{,}16} = \underline{\underline{0{,}3304}}$$

genauer Wert: $(\eta_1^0 = 0{,}3382)$

$$\eta_2^0 = -2 \cdot \frac{X_{12}}{\lambda} + \frac{X_{11}}{\lambda} = 2 \cdot \frac{0{,}713}{5{,}16} - \frac{1{,}209}{5{,}16} = \underline{\underline{0{,}0421}}$$

genauer Wert: $(\eta_2^0 = 0{,}0528)$

$$\eta_3^0 = \frac{X_{12}}{\lambda} = -\frac{0{,}713}{5{,}16} = -\underline{\underline{0{,}1382}}$$

genauer Wert: $(\eta_3^0 = -0{,}1479)$

Kontrolle: $\Sigma\,\eta = \underline{1{,}0}.$

Vergleich. Vernachlässigung der Nachbarscheibe.

Rostsystem wie zuvor.

Konstanten des Rostsystems:

μ-Wert: $$\mu_1 = \underline{\underline{\frac{23}{12\,288}}}$$

K-Wert:

$$K = 6\,\mu \cdot \frac{J_Q}{J_H} \cdot \frac{l^3}{\lambda^2} = 6 \cdot \frac{23}{12\,288} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{93^3}{5{,}16^2} = \underline{\underline{\frac{14\,419{,}62}{256}}}$$

α-Werte:

$$\alpha_1 = 4 + K \cdot \frac{6}{\lambda} = 4 + \frac{14\,419{,}62}{256} \cdot \frac{6}{5{,}16} = \underline{\frac{18\,811}{256}}$$

$$\alpha_2 = 1 - K \cdot \frac{4}{\lambda} = 1 - \frac{14\,419{,}62}{256} \cdot \frac{4}{5{,}16} = -\underline{\frac{10\,922}{256}}.$$

Querscheibenmomente in den Kreuzungspunkten:

$$X_{11} = K \cdot \frac{-\alpha_1}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} = -14\,419{,}62 \cdot \frac{18\,811}{18\,811^2 - 10\,922^2} = -\underline{\underline{1{,}133}}\ \mathrm{tm}$$

$$X_{12} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot X_{11} = -\frac{10\,922}{18\,811} \cdot 1{,}133 = -\underline{0{,}675}\ \mathrm{tm}.$$

Ordinaten der Quereinflußlinie des Randhauptträgers 0:

$$\eta_0^0 = 1 + \frac{X_{11}}{\lambda} = 1 - \frac{1{,}133}{5{,}16} = \underline{\underline{0{,}781}}$$

$$\eta_1^0 = -2 \cdot \frac{X_{11}}{\lambda} + \frac{X_{12}}{\lambda} = 2 \cdot \frac{1{,}133}{5{,}16} - \frac{0{,}675}{5{,}16} = \underline{\underline{0{,}3075}}$$

$$\eta_2^0 = -2 \cdot \frac{X_{12}}{\lambda} + \frac{X_{11}}{\lambda} = 2 \cdot \frac{0{,}675}{5{,}16} - \frac{1{,}133}{5{,}16} = \underline{\underline{0{,}042}}$$

$$\eta_3^0 = \frac{X_{12}}{\lambda} = -\frac{0{,}675}{5{,}16} = -\underline{\underline{0{,}1305}}$$

Kontrolle: $\Sigma\,\eta = \underline{1{,}0}.$

Der Verlauf der Quereinflußlinie für den Randträger O ist aus Bild 21 ersichtlich.

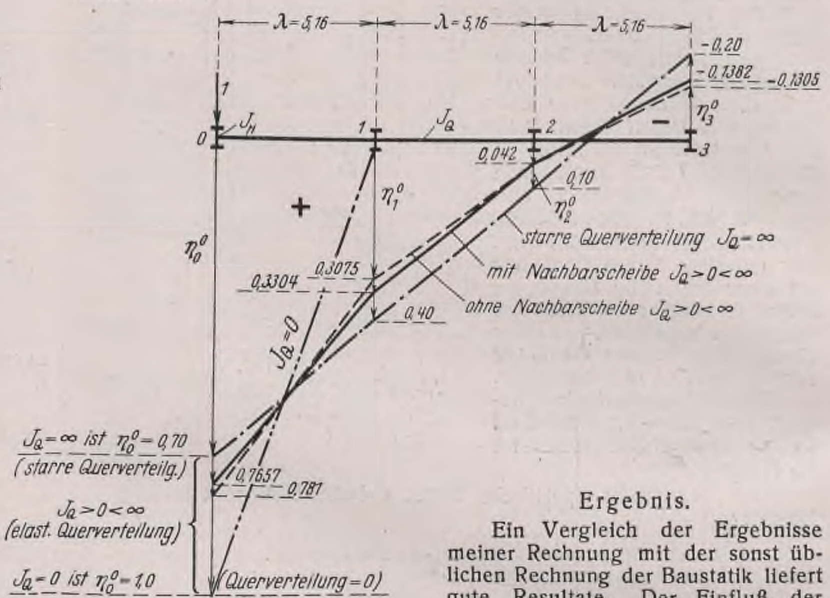


Bild 21.

Ergebnis.

Ein Vergleich der Ergebnisse meiner Rechnung mit der sonst üblichen Rechnung der Baustatik liefert gute Resultate. Der Einfluß der Nachbarscheibe ist von Bedeutung. Die Berücksichtigung nach meinem vorliegenden Verfahren macht keine Schwierigkeit und ist vom μ-Wert nur abhängig. Besonders bei Rosten mit mehreren Querscheiben, ferner mit unsymmetrischer Anordnung und über mehrere Öffnungen durchlaufend versagt das allgemeine Verfahren der Baustatik, d. h. das Auflösen vieler Gleichungen mit vielen Unbekannten wird fast unmöglich, wofür dann das vorliegende Verfahren, ohne besonderen Arbeitsaufwand immer zum Ziele und, wie die Beispiele zeigen, zu guten Ergebnissen führt. Da die Querverteilung in einem Trägerrost von Rostmitte nach dem Auflager hin stark abnimmt, kann eine Rostrechnung, die sich auf einen in Rostmitte liegenden Querträger bezieht, nur als angenähert angesehen werden. Genauere Werte einer Quertverteilung erhält man nur durch Aufsuchen von Querverteilungsstellen an den Stellen der auftretenden Lasten, wobei die Querverteilungsstellen nicht unbedingt Querträgerstellen sein müssen.

Amerikanische Versuche mit einem genieteten stählernen Halbrahmen mit rechteckiger Ecke.[1]

Berichtet von Dipl.-Ing. **Heimo Maul**, Darmstadt.

Es werden die Spannungen in der rechteckig ausgebildeten Ecke eines genieteten stählernen Halbrahmens experimentell und theoretisch ermittelt. Hierbei wird eine befriedigende Übereinstimmung zwischen Versuch und Berechnung festgestellt. Zum Schluß wird der Versuchskörper bis zum Versagen belastet.

1. Versuchskörper.

Der für die Versuche benutzte genietete Halbrahmen und die Art seiner Belastung ist in Bild 1 wiedergegeben.

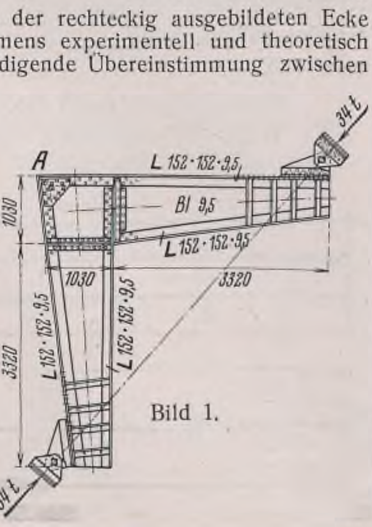


Bild 1.

[1]) Research report RP. 1130 of the national bureau of standards: Strength of a riveted rigid frame having straight flanges. — Vgl. auch G. Grüning, Spannungsverteilung in stählernen Rahmenecken. Bauing. 1937, Heft 13/14, S. 158.

Hierbei ist zu beachten, daß der Stiel und die Rahmenecke aus einem Stück bestehen, während der Riegel mit seinem Stegblech und der unteren Gurtung an die inneren Gurtwinkel der Ecke angenietet ist.

Des weiteren muß hervorgehoben werden, daß die Gurtwinkel am inneren Eckpunkt an der Stoßstelle zwischen Riegel und Ecke nicht satt aneinander anlagen, und daß auch die Aussteifungswinkel zwischen Stiel und Rahmenecke mit den Gurtwinkeln am inneren Eckpunkt keinen Kontakt hatten. Diesen Verhältnissen wird bei der theoretischen Ermittlung der Spannungen Rechnung getragen.

2. Werkstoffeigenschaften.

Die Güteeigenschaften des Werkstoffs wurden an Prüfkörpern bestimmt, die aus Probestücken der Stegbleche und der Gurtwinkel herausgearbeitet waren. Diese Prüfkörper waren 20 cm lange, den amerikanischen Normen entsprechende Zerreißstäbe für Platten, Bleche und Flacheisen. Die Breite der Zerreißstäbe war im untersuchten Bereich 3,8 cm und die Dicke die des rollenden Materials. Für die Ermittlung der Längenänderungen wurde ein „Ewing"-Dehnungsmesser mit einer Meßlänge von 20 cm benutzt. Ein Teilstrich auf der Skala dieses Instruments entspricht einer Längenänderung von 0,000 63 mm. Bei den Ablesungen wurden 0,1 Teilstriche geschätzt. Die Werkstoffeigenschaften sind in der folgenden Tabelle 1 zusammengefaßt.

Tabelle 1. Werkstoffeigenschaften (gemittelte Werte).

Prüfkörper	Youngscher Elastizitätsmodul	Proportionalitätsgrenze	Fließgrenze	Zugfestigkeit	Bruchdehnung	Einschnürung
	kg/cm²	kg/cm²	kg/cm²	kg/cm²	%	%
Gurtwinkel . . (10 Proben)	2 016 780	1360	2630	4160	27,4	59
Stegbleche . . (4 Proben)	1 988 650	1000	2710	4370	27,9	55
Mittelwert . .	2 011 150	1250	2610	4220	27,5	58

3. Versuchsmäßige Ermittlung der Spannungen.

Der Halbrahmenversuchskörper wurde in einer senkrecht stehenden, durch Spindeln angetriebenen Biege-Druck-Prüfmaschine belastet (Bild 2).

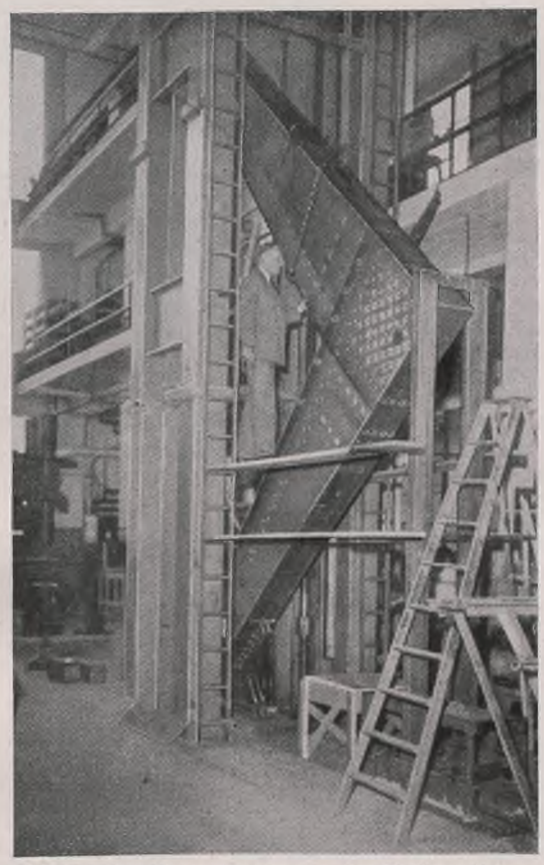


Bild 2. Der Versuchsträger in der Prüfmaschine.

Die Belastung wurde durch zwei aufgeschraubte Schuhe (Bild 1) eingeleitet. Hierbei konnten verschiedenartige Belastungsfälle dadurch erreicht werden, daß die Schuhe an verschiedenen Stellen des Stieles bzw. Riegels angeschraubt wurden. Es wurden insgesamt fünf Versuche durchgeführt, wobei vier unterschiedliche Laststellungen berücksichtigt wurden. Der Lastangriff entsprechend Bild 1 bezieht sich auf die Versuche 1 und 2 sowie auf die Ermittlung der Höchstlast. Zur versuchsmäßigen Ermittlung der Spannungen aus den Dehnungen wurden im Bereich der Rahmenecke in regelmäßigen Abständen Meßpunkte angeordnet. Hierbei stellte jeder Meßpunkt den Schnittpunkt von vier Meßstrecken dar, die jeweils einen Winkel von 45° miteinander bildeten. Auf den Stegblechen wurden die Meßpunkte an jeder Seite angeordnet und auf den Winkeln sowohl an den anliegenden als auch an den abstehenden Schenkeln.

Für die Dehnungsmessungen wurde ein „Whittemore“-Dehnungsmesser mit einer Meßlänge von 5 cm benutzt. Ein Teilstrich der Teilung dieses Dehnungsmessers entspricht einer Längenänderung von 0,001 25 mm. Es wurden Ablesungen von 0,1 Teilstrich geschätzt. Die Dehnungsmessungen wurden bei einer Druckbelastung von 2,25 t und 36,25 t vorgenommen. Bei Versuch 1 wurden alle Ablesungen für die Last von 2,25 t gemacht, bevor der Rahmen einer höheren Drucklast ausgesetzt worden war. Die Ergebnisse dieses ersten Versuchs ließen jedoch eine Vorbelastung des Versuchskörpers wünschenswert erscheinen. Bei den folgenden Versuchen wurde daher der Rahmen mit 37,0 t Drucklast fünfmal be- und entlastet, bevor die Messungen vorgenommen wurden.

4. Gemessene Spannungen.

Die Spannungen, die aus den Dehnungsmessungen berechnet wurden, sind in folgendem als gemessene Spannungen bezeichnet. Sie entsprechen, wie aus dem oben Gesagten hervorgeht, einer Laststufe von 34,0 t. Bei der Berechnung wurde für den Elastizitätsmodul der sich aus Tabelle 1 ergebende Mittelwert eingesetzt. Die gemessenen Spannungen des Versuchs 2 sind in den Bildern 6 bis 8 durch Pfeile wiedergegeben. Über die Berechnung der Spannungen aus Messungen nach jeweils vier Richtungen für jeden Punkt hat G. Grüning[1]) bereits eingehend berichtet.

5. Theoretische Behandlung der Rahmenecke.

Die am Stegblech der Rahmenecke angreifenden äußeren Kräfte sind in Bild 3 wiedergegeben.

Wenn Gleichgewicht herrschen soll, so muß sein:

$$(1)\qquad M_x - a\left(2F_{xy} + F_y\right) = M_y - b\left(2F_{yx} + F_x\right).$$

Für die Bedingungen, daß die Normalspannungen σ_x und σ_y entlang den Plattenrändern $x = a$ und $y = b$ gleichmäßig veränderlich und entlang den Rändern $x = -a$ und $y = -b$ gleich 0 werden, wurden folgende Spannungsfunktion abgeleitet:

$$\Phi = b_2\,x\,y + \frac{1}{6}(3c_3 + d_4 y)(a + x)y^2 + \frac{1}{6}(3b_3 + b_4 x)(b + y)x^2.$$

Hieraus ergeben sich die Spannungen zu:

$$(2)\qquad \sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = (c_3 + d_4 y)(a + x),$$

$$(3)\qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = (b_3 + b_4 x)(b + y),$$

$$(4)\qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y} = -\left(b_2 + b_3 x + c_3 y + \frac{1}{2}\cdot b_4 x^2 + \frac{1}{2}\cdot d_4 y^2\right).$$

Die Konstanten können abgeleitet werden aus den Bedingungen:

$$x = a,\quad \int_{-b}^{b} \sigma_x\,t\,dy = F_x,\quad \int_{-b}^{b} \sigma_x\,t\,y\,dy = M_x,\quad \int_{-b}^{b} \tau_{xy}\,t\,dy = F_{xy},$$

$$y = b,\quad \int_{-a}^{a} \sigma_y\,t\,dx = F_y,\quad \int_{-a}^{a} \sigma_y\,t\,x\,dx = M_y.$$

Unter Anwendung dieser Bedingungen ergibt sich:

$$(5)\qquad \begin{cases} b_2 = \dfrac{1}{4abt}\cdot\left[M_x - a\left(2F_{xy} + F_y\right) - \dfrac{3}{2}\left(M_x + M_y\right)\right], & \\ b_3 = \dfrac{F_y}{4abt} & c_3 = \dfrac{F_x}{4abt}, \\ b_4 = \dfrac{3M_y}{4a^3bt} & d_4 = \dfrac{3M_x}{4ab^3t}. \end{cases}$$

Setzt man die gefundenen Werte für die Konstanten in die Gl. (2), (3) und (4) ein, so ergeben sich die Spannungen zu:

$$(6)\qquad \sigma_x = \frac{1}{4abt}\left(F_x + \frac{3M_x}{b^2}\cdot y\right)(a + x),$$

$$(7)\qquad \sigma_y = \frac{1}{4abt}\left(F_y + \frac{3M_y}{a^2}\cdot x\right)(b + y),$$

$$(8)\qquad \tau_{xy} = -\frac{1}{4abt}\left[M_x - a\left(2F_{xy} + F_y\right) + F_y\,x + F_x\,y - \frac{3}{2}\cdot M_y\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) - \frac{3}{2}\cdot M_x\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)\right].$$

wobei die angreifenden Kräfte und Momente die Gl. (1) befriedigen müssen.

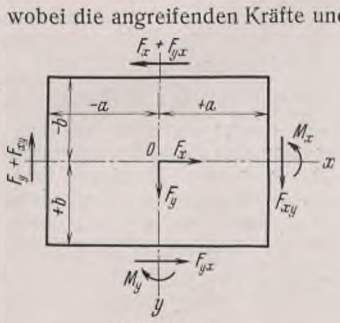


Bild 3.

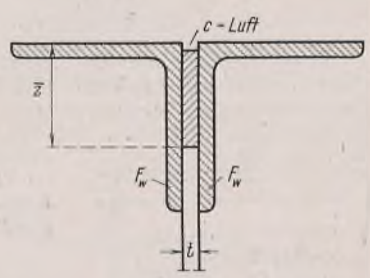


Bild 4.

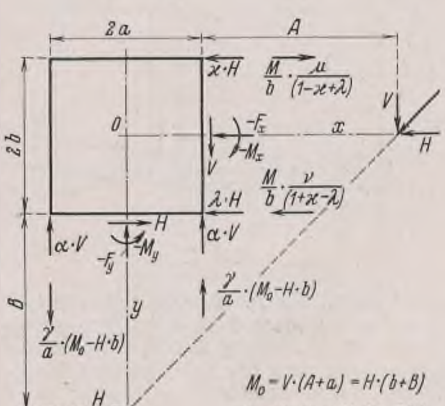


Bild 5.

6. Theoretische Spannungen.

Bei der Anwendung der vorliegenden Ausdrücke für die theoretische Ermittlung der Spannungen wurde das Stegblech der Rahmenecke wie folgt abgegrenzt. Die Gurtwinkel mit dem dazwischenliegenden Stück des Stegblechs, das oberhalb der Abgrenzung liegt, wird als Gurtquerschnitt betrachtet (Bild 4).

Der Schwerpunkt dieses Querschnitts bildet die Abgrenzung, für die sich dementsprechend folgende Gleichung ergibt:

$$(9)\qquad 2F_w z_w + \frac{t}{2}\left(\bar{z}^2 - c^2\right) = \left[2F_w + t\left(\bar{z} - c\right)\right]\bar{z}.$$

Hierin bedeutet $\bar{z}$ die Entfernung vom Rücken der Winkel bis zum Schwerpunkt des oben definierten Gurtquerschnitts, z_w ist die Entfernung

vom Rücken bis zum Schwerpunkt der Winkel, und die übrigen Größen sind aus Bild 4 ersichtlich. Es mag hier besonders darauf hingewiesen sein, daß in vereinfachender Weise $z_w = \bar{z}$ gesetzt werden kann. Um die bei der Ecke des Versuchskörpers vorliegenden Verhältnisse der zum Teil durchlaufenden und zum Teil unterbrochenen Querschnitte zu berücksichtigen, wurden die angreifenden äußeren Kräfte durch besondere Verhältniswerte zueinander in Beziehung gesetzt. Die Kräfte und Kräftepaare, die in Bild 5 wiedergegeben sind, werden entsprechend Bild 4 zu:

$$(10)\quad \begin{cases} F_x = -(1-\varkappa-\lambda)\,H - \left(\dfrac{\mu}{1-\varkappa+\lambda} - \dfrac{\nu}{1+\varkappa-\lambda}\right)\dfrac{M}{b}, \\ F_y = -(1-2\,\alpha)\,V, \\ F_{xy} = V - \alpha\,V - \dfrac{\gamma}{a}(M_0 - H\,b), \\ F_{yx} = H - \lambda\,H - \dfrac{\nu\,M}{(1+\varkappa-\lambda)\,b}, \\ M_x = -\left(1 - \dfrac{\mu}{1-\varkappa+\lambda} - \dfrac{\nu}{1+\varkappa-\lambda}\right)M, \\ M_y = -(1-2\,\gamma)(M_0 - H\,b). \end{cases}$$

Nach Berechnung von $\bar{z}$ ergibt sich im vorliegenden Fall die Breite der untersuchten Stegblechecke zu

$$(11)\quad 2\,a = 2\,b = \text{größte Höhe des Querschnitts} - 2\,\bar{z}.$$

Für α und γ wurden folgende Gleichungen aufgestellt:

$$(12)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{F_g}{2\,F_g + F_{St}} \\ \gamma = \dfrac{J_g}{2\,J_g + J_{St}}. \end{cases}$$

Hierin ist F_g der Querschnitt eines Gurtes, F_{St} der Querschnitt des Stegbleches, J_g das Trägheitsmoment eines Gurtes, bezogen auf die Schwerachse des Gesamtquerschnitts senkrecht zum Stegblech, und J_{St} das Trägheitsmoment des Stegblechs in bezug auf dieselbe Achse.

Bei der Berechnung von $\varkappa$, λ, μ und ν wurden die abstehenden Schenkel der unteren Gurtwinkel des Riegels vernachlässigt, und zwar wegen des nicht satten Aufsitzens dieser Winkel auf der Rahmenecke. Infolge dieser Betrachtung ergab sich ein unsymmetrischer Querschnitt mit einer Exzentrizität des Schwerpunkts oberhalb der x-Achse. Für $\varkappa$, λ, μ und ν wurden dementsprechend folgende Beziehungen entwickelt:

$$(13)\quad \begin{cases} \varkappa = \dfrac{F_a}{F_a + F_i + k\,F_{St}} \\ \lambda = \dfrac{F_i}{F_a + F_i + k\,F_{St}} \\ \mu = \dfrac{J_a}{J_a + J_i + k\,J_{St}} \\ \nu = \dfrac{J_i}{J_a + J_i + k\,J_{St}} \end{cases}$$

Hierin bedeuten F_a, F_i und F_{St} die Querschnitte des äußeren und inneren Gurtes und des Stegblechs, und J_a, J_i und J_{St} die entsprechenden Trägheitsmomente, bezogen auf die Schwerachse des Gesamtquerschnitts senkrecht zum Stegblech. Der Wert k ist die relative Steifigkeit des geschwächten Querschnitts des Stegblechs im Vergleich mit dem vollen Querschnitt. k wurde mit 0,9 in die Berechnung eingesetzt.

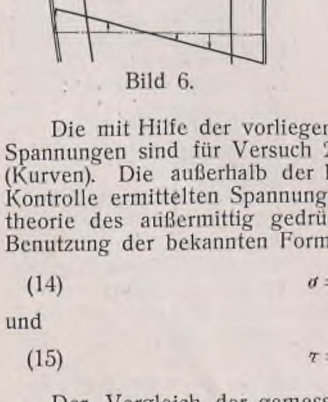


Bild 6.

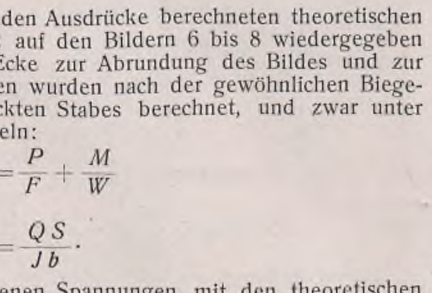


Bild 7.

Die mit Hilfe der vorliegenden Ausdrücke berechneten theoretischen Spannungen sind für Versuch 2 auf den Bildern 6 bis 8 wiedergegeben (Kurven). Die außerhalb der Ecke zur Abrundung des Bildes und zur Kontrolle ermittelten Spannungen wurden nach der gewöhnlichen Biegetheorie des außermittig gedrückten Stabes berechnet, und zwar unter Benutzung der bekannten Formeln:

$$(14)\quad \sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{W}$$

und

$$(15)\quad \tau = \frac{Q\,S}{J\,b}.$$

Der Vergleich der gemessenen Spannungen mit den theoretischen ergibt eine Übereinstimmung, die unter Berücksichtigung des innerhalb einer genieteten Konstruktion nie mit absoluter Genauigkeit erfaßbaren Kraftflusses als durchaus befriedigend betrachtet werden kann. Im übrigen geht aus den Bildern 6 bis 8 klar hervor, daß noch unmittelbar vor der Rahmenecke die gewöhnliche Biegetheorie zur Ermittlung der Spannungen voll ausreicht. Die Übereinstimmung zwischen den gemessenen und den theoretischen Spannungen ist in diesem Bereich beim Stiel sehr gut, und sie wäre beim Riegel zweifellos ebensogut gewesen, wenn dessen innere Gurte an der Rahmenecke satt aufgesessen hätten und auch die Aussteifungen zwischen Stiel und Ecke besser eingepaßt gewesen wären.

7. Größte Spannungen.

a) Normalspannungen (Hauptspannungen).

In Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen treten die größten Normalspannungen im Stegblech einer Rahmenecke des vorliegenden Typs an der inneren Ecke bei $x = a$, $y = b$ auf. Die theoretischen Hauptspannungen an diesem Punkt ergeben sich aus folgendem bekannten Ausdruck zu:

$$(16)\quad \left.\begin{matrix}\sigma_{I} \\ \sigma_{II}\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}.$$

In Tabelle 2 sind die theoretischen Spannungen σ_{II} und die gemessenen für die einzelnen Versuche zusammengestellt.

Die nebenstehende Tabelle zeigt, daß die theoretische Ermittlung der größten Normalspannungen in der Rahmenecke unter den gemachten Annahmen Werte ergibt, die auf der sicheren Seite liegen.

Tabelle 2.
Größte Normalspannungen am inneren Eckpunkt des Stegblechs der Rahmenecke.

Versuch	Größte Normalspannungen im Stegblech der Ecke (Druck)	
	gemessen kg/cm²	berechnet kg/cm²
2	942	1422
3	1020	1230
4	873	1020
5	923	1070

b) Schubspannungen.

Die maximalen Schubspannungen, ausgedrückt durch die Normalspannungen σ_x und σ_y und die Schubspannungen τ_{xy} können für jeden Punkt des Stegblechs der Rahmenecke durch die bekannte Formel

$$(17)\quad \tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

ausgedrückt werden. Um den Ort zu finden, an dem τ_{max} ein Maximum wird, wurde τ_{max}^2 partiell nach x und y differenziert, wobei die gefundenen Ausdrücke gleich Null gesetzt wurden. Hierbei wurde erhalten:

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\cdot\tau_{max}^2 = \dfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\dfrac{\partial}{\partial x}(\sigma_x - \sigma_y) + 2\,\tau_{xy}\cdot\dfrac{\partial}{\partial x}\cdot\tau_{xy} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\cdot\tau_{max}^2 = \dfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\dfrac{\partial}{\partial y}(\sigma_x - \sigma_y) + 2\,\tau_{xy}\cdot\dfrac{\partial}{\partial y}\cdot\tau_{xy} = 0 \end{cases}$$

und nach Einsetzen der Werte σ_x, σ_y und τ_{xy} aus Gl. (2), (3) u. (4):

$$(19)\quad \begin{cases} [(c_3 + d_4\,y)(a + x) - (b_3 + b_4\,x)(b + y)]\,[(c_3 + d_4\,y) - b_4\,(b + y)] \\ \quad + 4\left(b_2 + b_3\,x + c_3\,y + \dfrac{1}{2}\cdot b_4\,x^2 + \dfrac{1}{2}\cdot d_4\,y^2\right)(b_3 + b_4\,x) = 0, \\ [(c_3 + d_4\,y)(a + x) - (b_3 + b_4\,x)(b + y)]\,[d_4\,(a + x) - (b_3 + b_4\,x)] \\ \quad + 4\left(b_2 + b_3\,x + c_3\,y + \dfrac{1}{2}\cdot b_4\,x^2 + \dfrac{1}{2}\cdot d_4\,y^2\right)(c_3 + d_4\,y) = 0. \end{cases}$$

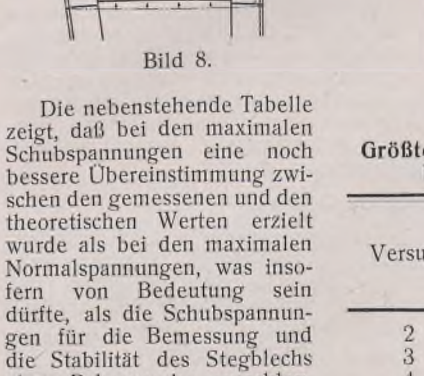


Bild 8.

Eine Lösung dieser Gleichung ergab sich zu:

$$(20)\quad \begin{cases} x = -\dfrac{b_3}{b_4} \\ y = -\dfrac{c_3}{d_4}. \end{cases}$$

Für diesen Punkt ergeben sich aus Gl. (2) u. (3)

$$\sigma_x = \sigma_y = 0;$$

dementsprechend wird nach Gl. (17)

$$(\tau_{max})_{max} = (\tau_{xy})_{max}.$$

Die größten gemessenen und theoretischen Schubspannungen im Stegblech der Rahmenecke sind in Tabelle 3 zusammengestellt.

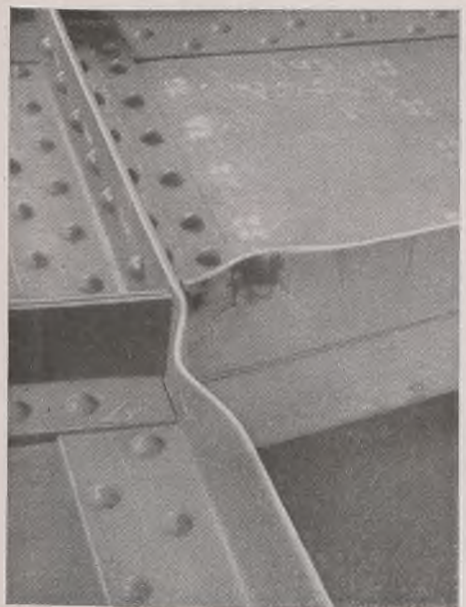
Die nebenstehende Tabelle zeigt, daß bei den maximalen Schubspannungen eine noch bessere Übereinstimmung zwischen den gemessenen und den theoretischen Werten erzielt wurde als bei den maximalen Normalspannungen, was insofern von Bedeutung sein dürfte, als die Schubspannungen für die Bemessung und die Stabilität des Stegblechs einer Rahmenecke ausschlaggebend sind.

Tabelle 3.
Größte Schubspannungen im Stegblech der Rahmenecke.

Versuch	Größte Schubspannungen im Stegblech der Ecke	
	gemessen kg/cm²	berechnet kg/cm²
2	720	830
3	620	680
4	470	550
5	610	620

8. Die Traglast des Halbrahmenversuchskörpers.

Nach der Durchführung der in Abschnitt 3 beschriebenen fünf Versuche zur Ermittlung der Spannungsverteilung innerhalb der Rahmenecke wurde der Versuchskörper bis zum Versagen belastet. Hierbei ist zu beachten, daß die äußere Ecke des Halbrahmens durch eine besondere Konstruktion (s. Bild 2) gegen seitliches Ausweichen gehalten war, während die innere Ecke volle seitliche Bewegungsfreiheit hatte. Durch diese Maßnahme ist den praktisch in den meisten Fällen vorhandenen Verhältnissen Rechnung getragen worden. Die Traglast des Versuchskörpers war bei 75 t erreicht, und zwar knickten bei dieser Belastung die abstehenden Schenkel der Gurtwinkel der inneren Ecke an der einen Seite aus, wodurch die ganze Rahmenecke ihre seitliche Stabilität verlor (Bild 9).


Bild 9. Innere Rahmenecke nach Überschreiten der Traglast.

Unter der vereinfachenden Annahme, daß das Proportionalitätsgesetz bis zur Fließgrenze unbeschränkte Gültigkeit hat, ergibt sich unter der genannten Höchstlast in den ausgeknickten Gurtwinkelschenkeln eine Beanspruchung von $\sigma = 2{,}760$ t/cm², womit allerdings die Fließgrenze des verwendeten Materials $\sigma_F = 2{,}610$ t/cm² bereits etwas überschritten ist. Für τ_{max} ergibt sich hierbei im Stegblech der Ecke $= 2{,}270$ t/cm². Setzt man nun z. B. nach Mohr für die Fließgrenze für Schubbeanspruchung $\tau_F = 0{,}5\,\sigma_F = 1{,}305$ t/cm², was allerdings den ungünstigsten Voraussetzungen entspricht, so geht hieraus eindeutig hervor, daß die Fließgrenze im Stegblech bereits bei einer Last erreicht wurde, die weit unter der Traglast liegt, nämlich bei $P = 75 \cdot \frac{1{,}305}{2{,}270} = 43{,}3$ t. Die größten Normalspannungen in den Gurtwinkeln betrugen bei dieser Last: $\sigma = 2{,}760 \cdot \frac{43{,}3}{75{,}0} = 1{,}590$ t/cm², was beim vorliegenden Material bemerkenswerterweise ungefähr der zulässigen Beanspruchung entsprechen dürfte ($1{,}76\,\sigma_F$). Die Fließerscheinungen im Stegblech waren im vorliegenden Fall mit einer leichten Beulung verbunden. Leider fehlen Angaben über den beobachteten Beginn beider Erscheinungen.

Nach Fertigstellung der vorliegenden Arbeit ist auch der Schlußbericht über Versuche mit einem Halbrahmen mit innen ausgerundeter Ecke erschienen[2]). Der Versuchskörper, der in Bild 10 wiedergegeben ist, wurde in derselben Weise belastet wie der Halbrahmen mit rechteckiger Ecke.

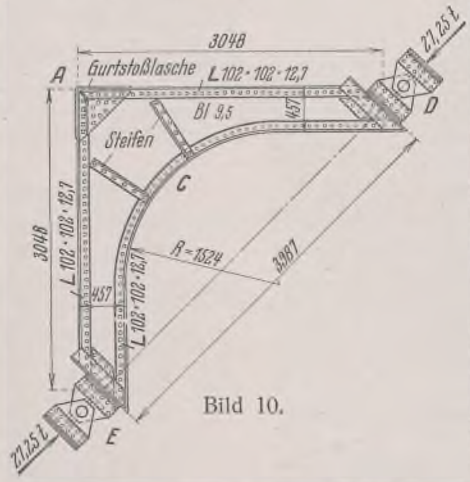


Bild 10.

Die theoretischen Spannungen sind wiederum mit Hilfe einer für den vorliegenden Fall abgeleiteten Spannungsfunktion ermittelt und ergeben eine befriedigende Übereinstimmung mit den gemessenen Werten.

Bemerkenswert erscheint, daß die Traglast dieses Halbrahmens, wie zu erwarten war, bereits bei einer maximalen Normalspannung im innen gekrümmten Gurt erreicht war, die mit 1,29 t/cm² noch nicht die Hälfte der festgestellten Fließgrenze von 2,82 t/cm² ausmacht. Bei dieser Spannung wich der innere Gurt ganz plötzlich seitlich aus, wobei es sich in eindeutiger Weise um einen Knickvorgang im elastischen Bereich handelte. Es muß dieser Tatsache wohl insofern ganz besonders Beachtung geschenkt werden, als im vorliegenden Fall für die Baupraxis das Spannungsproblem hinter das Stabilitätsproblem zurücktritt. Während man aber das Problem der Spannungsverteilung in stählernen Rahmenecken im großen ganzen als gelöst betrachten kann, dürften hinsichtlich der Stabilität derartiger Ecken noch viele Fragen zu klären sein.

[2]) Research paper RP. 1161 of the national bureau of standards: Strength of a riveted steel rigid frame havig a curved inner flange. — Vgl. auch G. Grüning, Spannungsermittlung in stählernen Rahmenecken. Bauing. 1938, Heft 13/14.

Verschiedenes.

Die Bronx-Whitestone-Brücke in New York. Als letzte Großbrücke im neuen New Yorker Schnellverkehrsstraßensystem wurde am 29. April 1939 die Bronx-Whitestone-Brücke, zur Zeit die viertgrößte Hängebrücke der Welt, dem Verkehr übergeben. Sie überbrückt den an dieser Stelle 1006 m breiten East-River zwischen Old Ferry Point und Whitestone, verbindet damit die Stadtteile Bronx und Queens und schließt das nördliche New York unmittelbar an das Straßensystem von Long Island an.

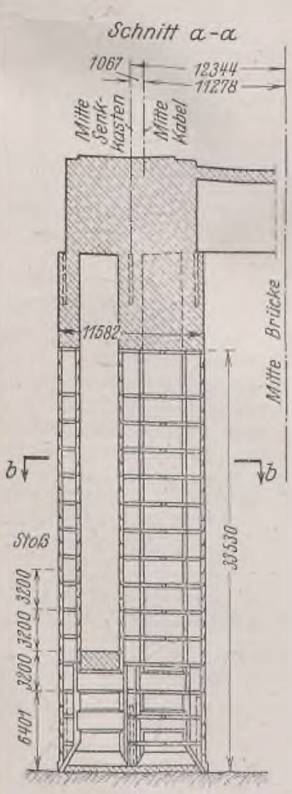
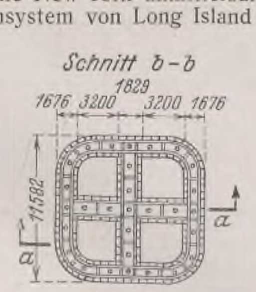


Bild 2. Stahlsenkkasten für den Queens-Pylon.



Zu Bild 2.

Das Bauwerk (Bild 1) wird von einer versteiften Kabelhängebrücke mit in Widerlagern verankerten Kabeln und beiderseits anschließenden Rampenbrücken gebildet. Die Spannweite der Hängebrücken-Mittelöffnung beträgt 701 m, die Seitenöffnungen sind je 224 m weit gespannt. Die lichte Durchfahrthöhe beträgt in Mitte Brücke 45,72 m, in der Bronx zu gelegenen Seitenöffnung 41,14 m. Die Gesamtlänge der stählernen Überbauten einschließlich der Rampenbrücken ist 2174 m.

Die Pylonenpfeiler und der Kabelverankerungsblock auf der Queens-Seite mußten wegen der Ungleichförmigkeit und Nachgiebigkeit der Bodenschichten mittels Senkkästen auf den erst in größerer Tiefe anstehenden Fels gegründet werden. Der Verankerungsblock auf der Bronx-Seite konnte dagegen auf dem in geringer Tiefe vorhandenen guten Baugrund flach gegründet werden. Für den Pylon auf der Bronx-Seite wurden zwei im Grundriß quadratische Eisenbeton-Senkkästen von

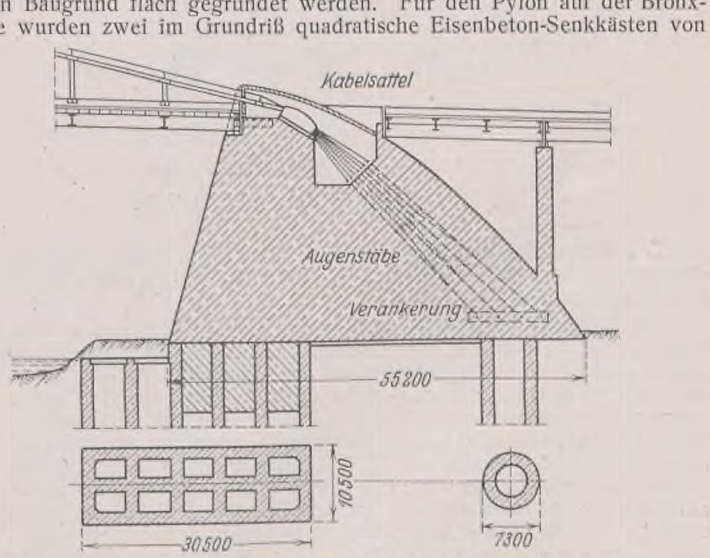


Bild 3. Verankerungsblock auf dem Queens-Ufer.

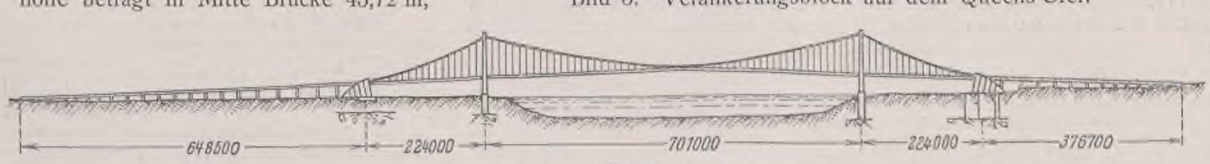


Bild 1. Übersicht.

11,6 m Seitenlänge und 26 m Höhe verwendet. Für den Pylon auf der Queens-Seite wurden wegen der großen Höhe der zu durchfahrenden nicht tragfähigen Schlamm- und weichen Bodenschichten vollständig geschweißte Stahlsenkkästen (Bild 2) benutzt, deren Schwimmfähigkeit den jeweils erreichten Tiefen angepaßt wurde. Für die Senkkästen tragfähiger Boden wurde erst in 30,5 m Tiefe erreicht. Die doppelwandig ausgebildeten Senkkästen hatten quadratischen Querschnitt von 11,6 m Seitenlänge und eine Höhe von 33,5 m. Sie wurden aus einzelnen Schüssen von 3,2 m Höhe zusammengesetzt, die mit Kähnen zur Baustelle gebracht wurden. Das Stahlgewicht eines Senkkastens beträgt 402 t.



Bild 4. Durchblick und Pylonenansicht.

Das letzte, obere Stück der Senkkästen besteht aus Eisenbeton. Die auf die Senkkästen aufgesetzten quadratischen Eisenbetonpfeiler haben 10,36 m Seitenlänge und 7,32 m Höhe. Je zwei Pfeilerköpfe sind durch einen Eisenbetonriegel verbunden.

Der Verankerungsblock auf der Queens-Seite (Bild 3) ruht auf zwei vorderen Eisenbeton-Senkkästen von je 10 × 30 m Grundfläche und zwei hinteren mit kreisförmigen Querschnitten von je 7,3 m Durchm. Der eine der beiden letzteren mußte bis auf 49 m Tiefe herabgeführt werden.

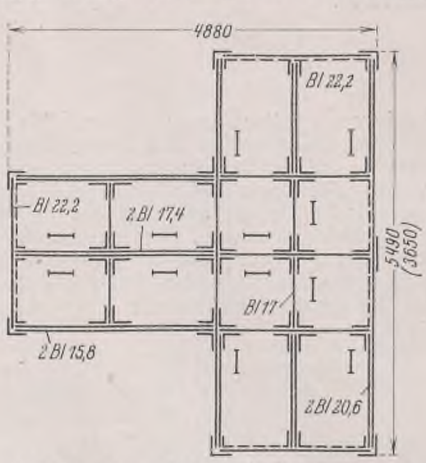


Bild 5. Querschnitt des Pylonenstiels.

Die Eisenbeton-Widerlager haben einen ⊔-förmigen Grundriß und sind in der Seitenansicht annähernd dreieckförmig. Sie sind 33,5 m breit, 55,2 m lang und 33,5 m hoch.

Die 106,06 m hohen und 30,17 m breiten Pylonen sind als einfache Portalrahmen ausgebildet, was für den amerikanischen Hängebrückenbau eine Neuerung darstellt. Die beiden am Fuße eingespannten Stiele sind nur am Kopf und unter der Fahrbahn durch je einen Riegel mit gewölbter unterer Leibung verbunden (Bild 4). Die Stiele haben ⊥-förmigen, in 12 Zellen unterteilten Querschnitt (Bild 5). Senkrecht zur Brückenlängsachse beträgt die Breite der Stiele durchgehend 4,88 m; parallel zur Brückenlängsachse nimmt die Breite von 5,49 m am Fuße bis auf 3,65 m am Kopfe ab. In Abständen von 2,44 bis 3,96 m sind die Stiele durch Querschotten versteift. Die im Querschnitt kastenförmigen Riegel sind 2,13 m breit und in der Mitte 7,04 m hoch. Das Gewicht eines Pylons beträgt 3500 t. Infolge der Längenänderungen der Kabel ergibt sich an der Spitze der Pylonen eine größte Ausbiegung von 380 mm nach der Mitte zu und eine ebensolche von 290 mm nach den Widerlagern zu.

Die Traggurte sind Paralleldrahtkabel von 558,8 mm Durchm. im endgültigen Zustande. Sie bestehen aus 37 Litzen von je 266 mit einem galvanischen Schutzüberzug versehenen Drähten. Die Netto-Querschnittsfläche der Kabel beträgt 1916 cm². In den Kabeln tritt eine größte Zugkraft von 22 770 t auf, in den Drähten eine größte Beanspruchung von 5930 kg/cm². Die mittlere Zerreißfestigkeit der Drähte beträgt 16 400 kg/cm², die Streckgrenze rd. 12 500 kg/cm². Der Durchhang der Kabel ist 60,96 m, das Verhältnis des Durchhangs zur Stützweite also 1 : 11,5. Neben den einfachen Linien der Pylonen und dem schmalen Band des Versteifungsbalkens ist es insbesondere die flache Form der Kabellinie, welche der Brücke ihr elegantes Aussehen verleiht (Bild 6). Das Maß von Mitte bis Mitte Kabel beträgt 22,56 m, der Mittenabstand der Pylonenstiele 25,30 m. Die Kabelsättel auf den Pylonen sind also nicht über den Stielen angeordnet, sondern sitzen auf den biegungsfest angeschlossenen Riegeln. Diese Anordnung ermöglichte eine einfache und wirtschaftliche Durchführung der Versteifungsträger zwischen den Pylonenstielen. Die über einfache Kabelschellen gelegten Hängeseile sind Drahtseile von 5,80 mm Durchm. Die größte in ihnen auftretende Zugkraft beträgt 154 t.

Auch die Ausführung der Versteifungsträger ist für Amerika ungewöhnlich. Sie sind vollwandig und nur 3,353 m hoch, d. i. $\frac{1}{209}$ der Mittelöffnungs-Stützweite, ein Wert, der von keiner anderen amerikanischen Brücke erreicht wird. Der Obergurt liegt in Geländerhöhe und gestattet freien Ausblick auf den Strom. Für die Versteifungsträger der Mittelöffnung wurde Siliziumstahl (zulässige Zugbeanspruchung 2160 kg/cm²), für die der Seitenöffnungen Kohlenstoffstahl (1770 kg/cm²) verwendet.



Bild 6. Ansicht.

Die vollwandigen Querträger haben 2 m Höhe. Die Fahrbahnkonstruktion bildet zusammen mit den als Gurtungen wirkenden Versteigungsträgern einen horizontalen Windträger.

Die Fahrbahntafel (Bild 7) ist in zwei 8,40 m breite, je 2-spurige Fahrbahnen aufgeteilt, die durch einen stählernen Schutzstreifen getrennt sind. Beiderseits der Fahrbahn sind 1,98 m breite Gehbahnen angeordnet. Die Fahrbahn wird von einem 120 mm hohen einbetonierten Trägerrost aus untereinander verschweißten 108 mm hohen I-Profilen gebildet.

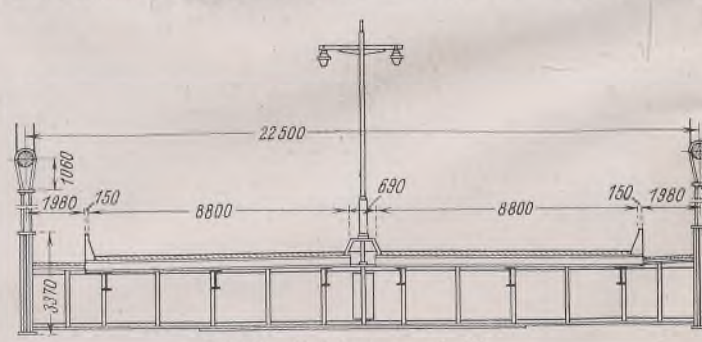


Bild 7. Brückenquerschnitt.

Die Rampenbrücken sind durchlaufende vollwandige Überbauten auf Betonpfeilern. Ihre Länge auf der Queens-Seite ist 376,70 m, auf der Bronx-Seite 648,50 m. Die Steigung beträgt 4 %.

Mit dem Bau wurde 1937 begonnen. Das ganze Bauwerk wurde in der außerordentlich kurzen Zeit von 22½ Monaten fertiggestellt. Das Gesamtstahlgewicht beträgt 22 300 t. Davon sind 14 500 t Kohlenstoffstahl, 3030 t Siliziumstahl, 4370 t Kabeldraht und 400 t Gußstahl. Für Fundamente, Pfeiler und Verankerungsblöcke wurden 150 000 m³ Beton verarbeitet. Die Gesamtbaukosten betragen 13 760 000 $. Planung und Entwurf wurden unter der Leitung von O. H. Ammann durchgeführt. Die Lieferung und Montage der Stahlkonstruktionen einschließlich der Kabel erfolgte durch die American Bridge Co.

[Nach L'Ossature Metallique (8) 1939, S. 533; Eng. News-Rec. (122) 1939, S. 622; (123) 1939, S. 149.]

Walter Brunkow, Berlin.

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt.
Verlag: Wilhelm Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W 9.
Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

DER STAHLBAU

Schriftleitung:
Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule
Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599
Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61
Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage zur Zeitschrift **DIE BAUTECHNIK** Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

13. Jahrgang — BERLIN, 5. April 1940 — Heft 8/9

Untersuchung eines besonderen Belastungsfalles bei dreiseitig abgespannten Funkmasten.

Von Dipl.-Ing. **Johannes Argyris**, Berlin.

Abgespannte Funkmaste weisen im allgemeinen dreieckigen oder quadratischen Querschnitt auf. Jede Abspannung besteht bei den üblichen Ausführungen des ersten Systems aus drei Pardunen (Haltekabeln bzw. Seilen). Im nachstehenden wird nur diese Bauart untersucht.

Der genauen Erfassung der statischen Verhältnisse dreieckiger Funkmaste werden in Literatur[1]) und Praxis nur die Belastungsfälle I bzw. W_I und II bzw. W_{II} zugrunde gelegt (Bild 1). Belastungsfall I erzeugt dabei die größeren Pardunenspannungen. Bei gleicher Windbelastung in Fall II wie bei Fall I ergibt ersterer dagegen die größeren lotrechten Auflagerdrücke der Abspannungen, was von Interesse für die Bemessung der Eckstiele ist.

Es ist aber offensichtlich, daß zur genauen Untersuchung der betrachteten Systeme auch eine Erörterung des Belastungsfalles senkrecht zur Symmetrieachse des Mastes (Bild 1) notwendig ist. Diese Windrichtung, die die Bezeichnung III führen soll, weist nämlich, gleiche Winddruckverhältnisse wie bei Fall I vorausgesetzt, die größten Querkräfte in den Fachwerkwänden und fallweise auch die größten Pardunenspannungen auf. In der Praxis wurde bisher entweder von einer derartigen Berechnung vollends abgesehen, oder man begnügte sich mit groben Annäherungen; z. B. wurden die ungefähr ermittelten W_{III}-Auflagerdrücke an den Abspannstellen in zwei Komponenten nach den Seilrichtungen 1 und 3 zerlegt (Bild 1). Dieses Verfahren ist aber zu ungünstig, da die Wirkung des entlasteten Seiles 2 vernachlässigt wird. Weiterhin ist es dabei nicht möglich, das elastische Verhalten des Mastes zu erfassen.

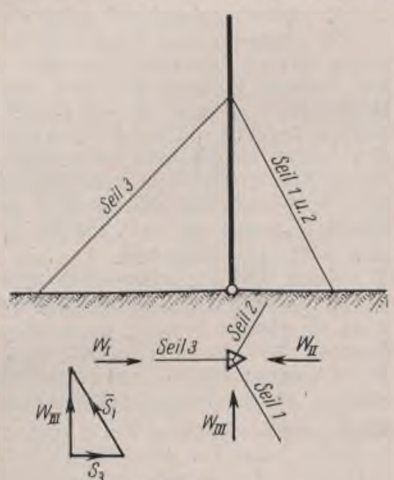


Bild 1.

Im nachstehenden soll nun eine Methode angegeben werden, die es ermöglicht, den Belastungsfall III mit der jeweils erforderlichen Genauigkeit zu untersuchen. Dabei ist beachtenswert, daß die Verschiebung der Abspannpunkte nicht in Richtung der Auflagerkraft erfolgt.

Es werden nun vorerst die Gleichgewichts- und Verschiebungsbedingungen für den beliebigen Belastungsfall W (W_x, W_y) ermittelt (Bild 2).

Verwendete Abkürzungen:

F nutzbarer Seilquerschnitt,
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ Spannungen in den Seilen 1, 2 und 3,
W Auflagerkraft,
W_x, W_y deren Komponenten in x- und y-Richtung,
v_1, v_2, v_3 Komponenten der Verschiebung eines Abspannpunktes in Richtung der horizontalen Projektion der Seilachsen,
σ Seilspannung im Belastungszustande,
σ_0 Vorspannung der Seile,
s Länge des Seiles,
γ spezifische Seilbelastung bei Wind z. B. kg/cm³,
γ_0 spezifische Seilbelastung im Vorspannungszustande z. B. kg/cm³,
E Elastizitätsmodul der Seile.

Die Verschiebungen v können in bekannter Weise[2]) aus der Formel:

$$v = -a \cdot \frac{1}{\sigma^2} + b\,\sigma - c$$

ermittelt werden,

wobei
$$a = \frac{s^3 \cdot \cos\alpha}{24} \cdot \gamma^2,$$
$$b = \frac{s}{E \cdot \cos\alpha},$$
$$c = -\frac{s^3 \cdot \cos\alpha}{24} \cdot \gamma_0^2 \cdot \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{s}{E \cdot \cos\alpha} \cdot \sigma_0 - \varepsilon\, s\,(t - t_0) \cos\alpha$$

bedeutet.

Der Winddruck auf die Seile kann durch Erhöhung bzw. Erniedrigung der spezifischen Belastung der Seile auch berücksichtigt werden[3]). Das letzte Glied von v ist auf den Einfluß einer Temperaturänderung $t - t_0$ gegenüber dem Montagezustand zurückzuführen.

Aus Bild 2 ergeben sich die Gleichgewichtsbedingungen in x-Richtung:

$$W_x - \sigma_1 F \cdot \cos\alpha \cdot \cos 30^\circ + \sigma_2 F \cdot \cos\alpha \cdot \cos 30^\circ = 0,$$

$$W_x = (\sigma_1 - \sigma_2) F \cdot \cos\alpha \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}$$

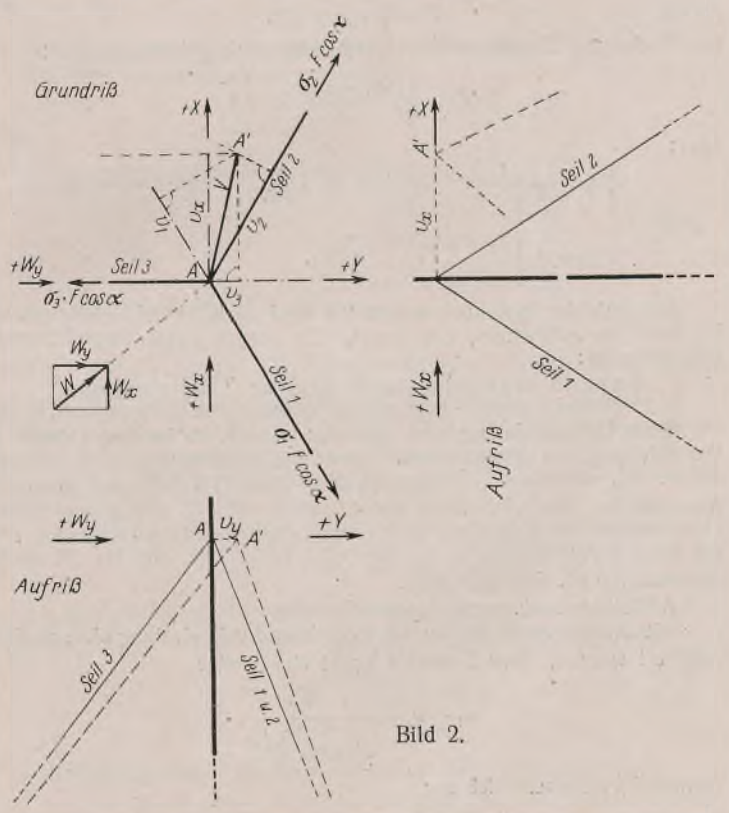


Bild 2.

oder

$$\text{(I)} \qquad \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{W_x}{F \cdot \cos\alpha \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}};$$

in y-Richtung:

$$W_y - \sigma_3 F \cdot \cos\alpha + \sigma_1 F \cdot \cos\alpha \cdot \cos 60^\circ + \sigma_2 F \cdot \cos\alpha \cdot \cos 60^\circ = 0,$$

1) Siehe z. B. Bleich, Stahlhochbauten, Bd. II, S. 902.
2) Siehe z. B. Bleich, Stahlhochbauten, Bd. II, S. 903.
3) Eine nähere Erläuterung dieses einfachen Verfahrens würde hier zu weit führen.

(II) $$\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = \sigma_3 - \frac{W_y}{F \cdot \cos\alpha} = \sigma_3 - \sigma_3^{y}.$$

Aus Bild 3 lassen sich nun die Beziehungen unter den Verschiebungen (v) eines Abspannpunktes ermitteln.

Gesamtverschiebung $V = \overline{AA'}$,

Komponente in x-Richtung $v_x = \overline{AB}$,

Komponente in y-Richtung $v_y = \overline{AC}$.

Horizontale Komponenten der Seilverschiebungen:

Seil 1 $v_1 = \overline{AF}$,

Seil 2 $v_2 = \overline{AG}$,

Seil 3 $v_3 = \overline{AC}$.

Wie allgemein üblich, sind auch die Drehkreise an den Seilenden durch die Tangenten ersetzt.

Im einzelnen ist nun:

(III) $$v_y = \overline{AC} = v_3;$$

weiterhin folgt für:

$$\overline{AD} = \frac{v_1}{\cos 30^\circ} = v_1 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\overline{AE} = -\frac{v_2}{\cos 30^\circ} = -v_2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\overline{DE} = \overline{AE} - \overline{AD} = -v_1 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} - v_2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB} = \overline{AD} + \frac{\overline{DE}}{2} = v_1 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} - v_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - v_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}},$$

(IV) $$v_x = \overline{AB} = \frac{v_1 - v_2}{\sqrt{3}}.$$

Aus Bild 3 entnehmen wir noch

$$\overline{BA'} = \overline{DB} \cdot \cos 30^\circ = -(v_1 + v_2)\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = -(v_1 + v_2).$$

Da $\overline{BA'} = \overline{AC}$, ergibt sich:

(V) $$v_1 + v_2 + v_3 = 0.$$

Die Gesamtverschiebung V errechnet sich aus der Formel:

(VI) $$V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Die Beziehung VI kann noch folgendermaßen umgeformt werden:

$$V = \sqrt{\frac{(v_1 - v_2)^2}{3} + v_3^2}$$

oder:

(VII) $$\begin{cases} V = 2\sqrt{\dfrac{v_1^2 + v_2^2 + v_1 v_2}{3}} \text{ bzw. } 2\sqrt{\dfrac{v_1^2 + v_3^2 + v_1 v_3}{3}} \\ \text{bzw. } 2\sqrt{\dfrac{v_2^2 + v_3^2 + v_2 v_3}{3}}. \end{cases}$$

Mit Hilfe der Beziehungen I bis VII wird nachstehend der Belastungsfall Wind in x-Richtung untersucht. Es werden dabei zwei Masttypen unterschieden:

a) statisch bestimmt gelagerte Systeme (1 mal abgespannt),

b) statisch unbestimmt gelagerte Systeme (n-mal abgespannt, $n > 1$).

Diese Unterscheidung muß getroffen werden, da im Fall b durch die Verschiebung der Abspannpunkte quer zur Windrichtung auch Auflagerdrücke W_y entstehen. Selbstverständlich muß stets $\Sigma W_y = 0$ sein. Ein Ausnahmefall tritt ein, wenn die Punkte 0 (Bild 3) der Abspannbündel einschließlich des Fußgelenkes des Mastes auf einer Geraden liegen, dann gilt für alle Auflager $W_y = 0$. Im Fall a ist es klar, daß für die einzige Abspannung $W_y = 0$ sein muß.

a) Statisch bestimmt gelagerte Systeme.

Die Auflagerkraft W_x kann aus der Winddruckbelastung ohne weiteres ermittelt werden. Aus Formel I ergibt sich weiter

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{W_x}{F \cdot \cos\alpha \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}}.$$

Formel II vereinfacht sich zu:

(II') $$\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = \sigma_3.$$

In bekannter Weise[4]) werden nun in Bild 4 die Verschiebungen v_1, v_3 und $-v_2$ in Abhängigkeit von der Spannung σ aufgetragen.

Es ist zu beachten, daß die Kurven v sich nicht in einem Punkt der Achse (σ_0 = Vorspannung) schneiden, wenn Temperatureinfluß und Winddruck auf die Seile berücksichtigt werden. Bei Vernachlässigung letzterer Winddruckbeiwerte sind die Kurven v_1 und v_3 identisch.

[4]) Bleich, Stahlhochbauten, Bd. II, S. 904.

Die Größe der in Bild 4 eingetragenen Strecke $b'd = \sigma_1 - \sigma_2$ ist bekannt, aber nicht deren Lage. Letztere kann auf Grund der Beziehung (V) leicht durch paralleles Verschieben von $b'd$ ermittelt werden. Dabei muß nach Formel (V) erreicht werden, daß $da' = v_3$ ist.

Der Kontrollwert v_3 ergibt sich aus der v_3-Kurve mit Hilfe der Formel (II'), die besagt, daß die Strecke $b'd$ bzw. die Spannungsdifferenz $(\sigma_1 - \sigma_2)$ von der σ_3-Achse halbiert werden muß.

Es folgt nun:

$$\sigma_1 = \overline{0a}, \quad \sigma_2 = \overline{0b} \text{ und } \sigma_3 = \overline{0c}.$$

Die Verschiebungen v_x, v_y und V lassen sich nun aus den Bild 4 zu entnehmenden Werten v_1, v_2 und v_3 an Hand der Beziehungen III bis VI ermitteln. Damit kann Fall a als gelöst betrachtet werden.

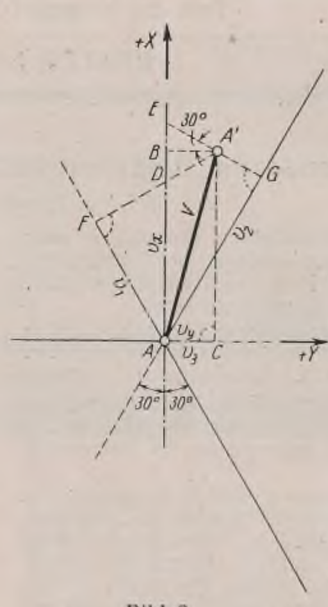


Bild 3.

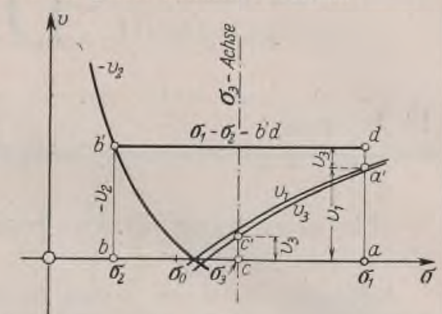


Bild 4.

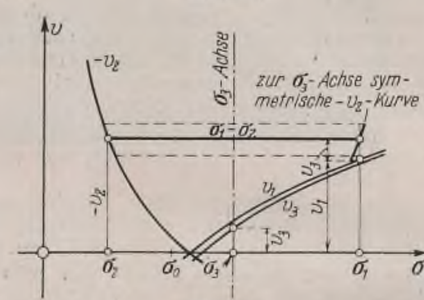


Bild 5.

b) Statisch unbestimmt gelagerte Systeme.

Es werden nachstehend unter α und β zwei Methoden der Lösung des gestellten Problems behandelt. In der ersten Rechnungsart (α) wird die statische Untersuchung des Mastes in x- und y-Richtung getrennt durchgeführt; dieses ist selbstverständlich eine Annäherung. Unter β werden dagegen die für die gleichzeitige Berechnung des Funkmastes in den beiden Hauptachsen notwendigen Elastizitätsgleichungen aufgestellt.

α) Wie es bei den mehrfach abgespannten Masten üblich ist, muß eine Vorberechnung durchgeführt werden. Die ungefähren Auflagerdrücke W_x lassen sich z. B. aus der Betrachtung des Mastes als Balken auf starren Stützen feststellen. Die aus letzterer Untersuchung gewonnenen W_x-Werte wird der erfahrene Entwurfsingenieur und Statiker nötigenfalls an die genauen anpassen können. Es ist zu beachten, daß letzteres nur dann zu erfolgen braucht, wenn offensichtlich große Unterschiede zu den genauen Werten zu erwarten sind. In der y-Richtung wird vorerst $W_y = 0$ angenommen. Aus Formel (I) werden die zu den obigen Auflagerdrücken W_x zugehörigen Spannungsdifferenzen $(\sigma_1 - \sigma_2)$ berechnet. Durch Eintragung der letzteren Werte in die graphische Darstellung der v_1-, $-v_2$-, v_3-Linien (siehe Fall a) ergibt sich für jeden Abspannpunkt eine zugehörige σ_3-Größe. Nun werden, wie es auch bei den Belastungsfällen I und II üblich ist, die Verschiebungsgrößen $v_x = \frac{v_1 - v_2}{\sqrt{3}}$ in Abhängigkeit von $(\sigma_1 - \sigma_2)$ ermittelt. Dabei wird praktischerweise wie nachstehend verfahren (Bild 5):

An jeder Seilabfangung werden für verschiedene σ_3-Größen (im Bereich der aus den angenäherten Auflagerdrücken W_x ermittelten Spannung σ_3) zur jeweilig gewählten σ_3-Achse kurze symmetrische Strecken der $(-v_2)$-Kurve gezeichnet. Durch Eintragung des zugehörigen v_3-Wertes zwischen der Kurve v_1 und der symmetrischen $(-v_2)$-Kurve wird die Differenz $(\sigma_1 - \sigma_2)$ die v_1-, v_2- und damit auch die v_x-Verschiebung bestimmt. Es können nun an jeder Abspannung die v_x-Werte in Abhängigkeit von $(\sigma_1 - \sigma_2)$ aufgetragen werden. Dabei ergibt sich die auch bei den Windrichtungen I und II bekannte Tatsache, daß die Kurve $v_x = F_x(\sigma_1 - \sigma_2)$ in dem uns interessierenden Belastungsbereich mit genügender Genauigkeit als Gerade betrachtet werden kann (s. auch Bild 6). Es folgt

$$v_x = a'(\sigma_1 - \sigma_2) + b \quad \text{bzw.}$$

(VIII) $$v_x = a\,W_x + b.$$

Das gleiche gilt für die Funktion $v_y' = F_y'(\sigma_1 - \sigma_2)$.

Es ist zu beachten, daß bei Berücksichtigung des Winddruckes auf die Seile für $(\sigma_1 - \sigma_2) = 0$ $v_x \neq 0$ sein muß.

An Hand der Gesetzmäßigkeiten (VIII) kann nun der Mast in x-Richtung als Balken auf elastisch senkbaren Stützen angesehen werden. Die Berechnung kann nach den bei Müller-Breslau, Bd. II/2, S. 141, angegebenen Formeln erfolgen. Aus dieser Untersuchung ergeben sich die Momente, Querkräfte und neue genauere Drücke W_x sowie Differenzen $(\sigma_1 - \sigma_2)$ und damit aus Bild 5 und 6 die v_x- sowie σ_1-, σ_2- und σ_3-Werte. Die zugehörigen v_y'-Größen bestimmen den Spannungszustand in y-Richtung. In vielen Fällen zeigt es sich nun, daß der Einfluß der Verschiebungen v_y' vernachlässigt werden kann, da er sehr gering ist. Es ist noch dabei zu beachten, daß sich durch die elastische Nachgiebigkeit der Seilbündel im allgemeinen eine Verringerung der durch die v_y'-Werte bedingten Auflagerdrücke W_y' ergibt.

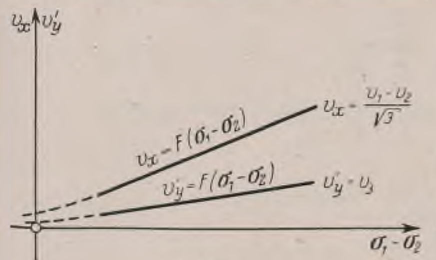


Bild 6.

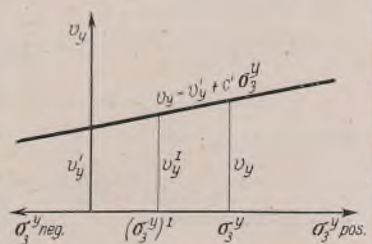


Bild 7.

In den Fällen aber, wo sich eine Berechnung des Mastes in y-Richtung als notwendig erweist, kann nachstehend aufgeführte Methode angewendet werden; selbstverständlich müssen die aus der Untersuchung in x-Richtung ermittelten $(\sigma_1 - \sigma_2)$-Größen dabei zugrunde gelegt werden. Wenn nun angenommen wird, daß die einzelnen Abspannstellen nach der Verschiebung $v_y' = v_3$ als starre Stützen wirken, können leicht die zugehörigen Auflagerdrücke W_y' bestimmt werden. Gemäß Formel

$$(\sigma_3{}^y)^{\mathrm{I}} = \frac{W_y'}{F \cdot \cos\alpha}$$

entsprechen letzteren die Korrekturwerte $(\sigma_3{}^y)^{\mathrm{I}}$. Da aber die Seilbündel elastisch nachgiebig sind, entspricht $(\sigma_3{}^y)^{\mathrm{I}}$ nicht v_y', sondern eine Verschiebung v_y^{I}. Letztere kann leicht mit Hilfe der unter a angegebenen Konstruktion ermittelt werden, nur muß die Halbierende von $(\sigma_1 - \sigma_2)$ gemäß Formel (II)

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = \sigma_3 - \sigma_3{}^y$$

von der σ_3-Achse aus um den Betrag $(-\sigma_3{}^y)^{\mathrm{I}}$ verschoben werden. Wie aus Bild 7 ersichtlich, wird die die Ordinaten $(v_y)'$ und $v_y{}^{\mathrm{I}}$ verbindende Gerade als die Gesetzmäßigkeit von v_y in Abhängigkeit von $\sigma_3{}^y$ aufgefaßt. Aus praktischen Gründen empfiehlt es sich, in der zeichnerischen Konstruktion von einem derartigen Wert v_y auszugehen, daß die zugehörige Korrekturgröße $|\sigma_3{}^y|$ größer als $|(\sigma_3{}^y)^{\mathrm{I}}|$ ist (im allgemeinen ist nämlich $|(\sigma_3{}^y)^{\mathrm{I}}|$ gering). In allen Berechnungsbeispielen zeigt sich, daß die Annahme der linearen Abhängigkeit der Verschiebung v_y von $\sigma_3{}^y$ vollends genügt.

Es folgt nun für jede Abspannung:

$$v_y = v_y' + c' \sigma_3{}^y$$

für ein bestimmtes $(\sigma_1 - \sigma_2)$ bzw.

$$\text{(IX)} \qquad v_y = v_y' + c\, W_y.$$

Auf Grund der Gl. (IX) kann eine statische Untersuchung des Mastes auch in y-Richtung durchgeführt werden. Aus dieser Berechnung ergeben sich die bei den zugrunde gelegten $(\sigma_1 - \sigma_2)$ zugehörigen W_y und damit auch $\sigma_3{}^y$-Korrekturgrößen. Es ist nun möglich, an jedem Seilbündel bei bekannten $(\sigma_1 - \sigma_2)$ und $\sigma_3{}^y$ die gesuchten Spannungen σ_1, σ_2, σ_3 sowie die Verschiebungen v_x, v_y und V zu ermitteln [Formel (II)].

Die oben angeführte erste Annäherung reicht für die in der Praxis vorkommenden Fälle (wobei angenommen ist, daß keine äußeren Kräfte in y-Richtung wirken) vollkommen aus. Sollte jedoch ausnahmsweise eine zweite Annäherung erwünscht sein, so können die in der ersten gewonnenen Ergebnisse als Hilfswerte benutzt werden. Insbesondere muß bei der neuen Ermittlung von $v_x = F_x\,(\sigma_1 - \sigma_2)$ an jeder Abspannung auch die $\sigma_3{}^y$-Größe aus der ersten Annäherung herangezogen werden [Konstruktion mit Hilfe der Formel (II); bei den jeweils gewählten Spannungen σ_3 wird die Halbierende von $(\sigma_1 - \sigma_2)$ um den Betrag $(-\sigma_3{}^y)$ von der σ_3-Achse aus verlegt].

Die vorerwähnte Lösung des gestellten Problems kann entsprechend abgeändert für jede beliebige Windangriffsrichtung angewendet werden.

β) Die unter α angegebene Methode ist mit Vorteil anzuwenden, wenn der Einfluß von W_y auf W_x vernachlässigbar ist. Dies trifft auch in den Fällen, wo die äußere Belastung nur in x-Richtung wirkt, im allgemeinen zu.

Bei dem in Bild 8 dargestellten Antennenträger treten aber außer dem Winddruck in x-Richtung auch Einzellasten gegebenenfalls in der Größenordnung von W_x an den Abspannungen auf. Die Untersuchung nach α ist noch möglich, nur muß man schon in der ersten Annäherung die geschätzten Auflagerdrücke W_y berücksichtigen. Praktisch wird man wohl diese Methode bei der Untersuchung des Mastes zugrunde legen. Es ist allerdings aber auch naheliegend, die Berechnung in x- und y-Richtung in einem Rechnungsgang durchzuführen. Dazu ist es notwendig, die Abhängigkeit der Verschiebungsgrößen v_x (bzw. v_y) von W_x und W_y zu bestimmen. Wie die Ergebnisse von Beispielen zeigen, kann innerhalb eines gewissen Belastungsbereiches an jedem Abspannpunkt

$$\text{(X)} \qquad \begin{cases} v_x^r = w_x^r + \omega_{xx}^r W_x^r + \omega_{xy}^r W_y^r \\ v_y^r = w_y^r + \omega_{yx}^r W_x^r + \omega_{yy}^r W_y^r \end{cases}$$

gesetzt werden. Die linearen Beziehungen (X) sind jeweils in einem kleineren Bereich als die unter (VIII) aufgeführten Gleichungen gültig. Es ist deshalb notwendig, die wahrscheinlichen Auflagerdrücke genauer als unter α abzuschätzen.

Die Elastizitätsgleichungen können nun wie folgt aufgestellt werden[5]). Es wird dabei, um nachstehende Untersuchungen allgemein zu gestalten, angenommen, daß äußere Belastungen in x- und y-Richtung wirken können; damit genügt es, sich bei der Ableitung der Formeln auf die x-Achse zu beschränken.

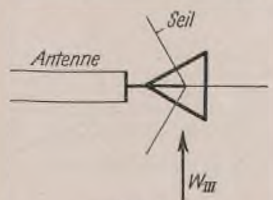


Bild 8.

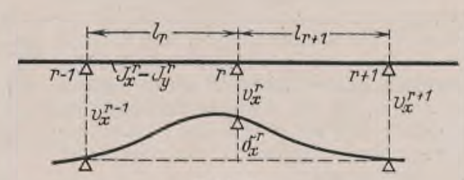


Bild 9.

Es gilt:

$$\text{(A)} \qquad M_x^{r-1} l_r' + 2 M_x^r (l_r' + l_{r+1}') + M_x^{r+1} l_{r+1}' = (Z_x^r)',$$

wobei

$$(Z_x^r)' = -6 \cdot \frac{\mathfrak{L}_x^{o\,r}}{l_r} \cdot \frac{J_c}{J_r} - 6 \cdot \frac{\mathfrak{R}_x^{o\,(r+1)}}{l_{r+1}} \cdot \frac{J_c}{J_{r+1}} - 6 E J_c \delta_x^r \cdot \frac{l_r + l_{r+1}}{l_r\, l_{r+1}},$$

Die Bezeichnungen entsprechen denen von Müller-Breslau.

Aus Bild 9 entnimmt man

$$\text{(B)} \qquad \delta_x^r \cdot \frac{l_r + l_{r+1}}{l_r\, l_{r+1}} = \frac{v_x^{r-1} - v_x^r}{l_r} - \frac{v_x^r - v_x^{r+1}}{l_{r+1}}.$$

Die Auflagerdrücke W_x^r und W_y^r bestimmen sich wie folgt:

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} W_x^r = (W_x^r)^\circ + \dfrac{M_x^{r-1} - M_x^r}{l_r} + \dfrac{M_x^{r+1} - M_x^r}{l_{r+1}}, \\ W_y^r = (W_y^r)^\circ + \dfrac{M_y^{r-1} - M_y^r}{l_r} + \dfrac{M_y^{r+1} - M_y^r}{l_{r+1}}. \end{cases}$$

$(W_x^r)^\circ$ bzw. $(W_y^r)^\circ$ sind die Auflagerkräfte im Grundsystem. Durch Einsetzen der Beziehungen (C) in die Gl. (X) ist es möglich, δ_x^r als Funktion von M_x und M_y zu erhalten. Durch Umformen von (A) ergibt sich für die Elastizitätsgleichungen in x-Richtung

$$\begin{aligned} \text{(XI)} \quad & M_x^{r-2} a_{xx}^{r-1} + M_x^{r-1}(l_r' + b_{xx}^r) + M_x^r\left[2(l_r' + l_{r+1}') + c_{xx}^r\right] \\ & + M_x^{r+1}(l_{r+1}' + b_{xx}^{r+1}) + M_x^{r+2} a_{xx}^{r+1} + M_y^{r-2} a_{xy}^{r-1} \\ & + M_y^{r-1} b_{xy}^r + M_y^r c_{xy}^r + M_y^{r+1} b_{xy}^{r+1} + M_y^{r+2} a_{xy}^{r+1}\, Z_x^r. \end{aligned}$$

Die Verformungsgleichung in y-Richtung ist entsprechend ähnlich

$$\begin{aligned} \text{(XII)} \quad & M_x^{r-2} a_{yx}^{r-1} + M_x^{r-1} b_{yx}^r + M_x^r c_{yx}^r + M_x^{r+1} b_{yx}^{r+1} + M_x^{r+2} a_x^{r+1} \\ & + M_y^{r-2} a_{yy}^{r-1} + M_y^{r-1}(l_r' + b_{yy}^r) + M_y^r\left[2(l_r' + l_{r+1}') + c_{yy}^r\right] \\ & + M_y^{r+1}(l_{r+1}' + b_{yy}^{r+1}) + M_y^{r+2} a_{yy}^{r+1} = Z_y^r. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten **a**, **b**, **c** errechnen sich aus den Formeln:

$$a_{xx}^r = \frac{6 E J_c \omega_{xx}^r}{l_r\, l_{r+1}}, \quad a_{xy}^r = \frac{6 E J_c\, \omega_{xy}^r}{l_r\, l_{r+1}}$$

$$b_{xx}^r = -\frac{6 E J_c}{l_r^2}\left(\omega_{xx}^{r-1} \cdot \frac{l_r + l_{r-1}}{l_{r-1}} + \omega_{xx}^r \cdot \frac{l_r + l_{r+1}}{l_{r+1}}\right)$$

$$b_{xy}^r = -\frac{6 E J_c}{l_r^2}\left(\omega_{xy}^{r-1} \cdot \frac{l_r + l_{r-1}}{l_{r-1}} + \omega_{xy}^r \cdot \frac{l_r + l_{r+1}}{l_{r+1}}\right)$$

[5]) Müller-Breslau, Statik, Bd. II/2, S. 140.

$$c^r_{xx} = +6EJ_c\left(\frac{\omega^{r-1}_{xx}}{l_r^2} + \frac{\omega^r_{xx}(l_r + l_{r+1})^2}{l_r^2\, l_{r+1}^2} + \frac{\omega^{r+1}_{xx}}{l_{r+1}^2}\right)$$

$$c^r_{xy} = +6EJ_c\left(\frac{\omega^{r-1}_{xy}}{l_r^2} + \frac{\omega^r_{xy}(l_r + l_{r+1})^2}{l_r^2\, l_{r+1}^2} + \frac{\omega^{r+1}_{xy}}{l_{r+1}^2}\right).$$

Es ist ohne weiteres ersichtlich, wie sich die Koeffizienten a, b und c mit Index yx und yy ergeben.

Für das Belastungsglied Z^r_x erhält man:

$$Z^r_x = -6\cdot\frac{\mathfrak{L}^{0\,r}_x}{l_r}\cdot\frac{J_c}{J_r} - 6\cdot\frac{\mathfrak{R}^{0\,(r+1)}_x}{l_{r+1}}\cdot\frac{J_c}{J_{r+1}}$$

$$-6EJ_c\left[\frac{w^{r-1}_x + \omega^{r-1}_{xx}\left(W^{r-1}_x\right)^\circ + \omega^{r-1}_{xy}\left(W^{r-1}_y\right)^\circ}{l_r}\right.$$

$$-\frac{w^r_x + \omega^r_{xx}\left(W^r_x\right)^\circ + \omega^r_{xy}\left(W^r_y\right)^\circ}{l_r\, l_{r+1}}\left(l_r + l_{r+1}\right)$$

$$\left.+\frac{w^{r+1}_x + \omega^{r+1}_{xx}\left(W^{r+1}_x\right)^\circ + \omega^{r+1}_{xy}\left(W^{r+1}_y\right)^\circ}{l_{r+1}}\right],$$

ähnlich für Z^r_y.

Nach Auflösung der zehngliedrigen gekoppelten Gleichungen (XI) u. (XII) ist es möglich, die Abspannungen, wie unter α beschrieben, zu untersuchen. Selbstverständlich ist der Methode α der Vorzug zu geben, da sie weniger Rechenarbeit erfordert und für die in der Praxis vorkommenden statischen Berechnungen vollends genügt.

Der Fall b kann also als gelöst betrachtet werden, indem die gesuchten Spannungen σ_1, σ_2 und σ_3 sowie die Verschiebungen v mit der jeweils erforderlichen Genauigkeit gefunden werden können.

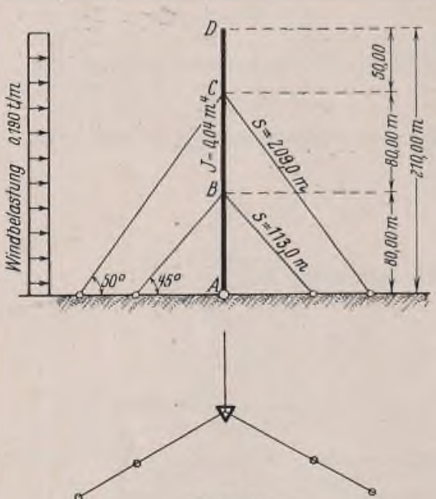


Bild 10.

Im reduzierten Wert g ist der Einfluß der Pardunengehänge enthalten. Die spezifische Belastung γ des Seiles errechnet sich aus der Formel

$$\gamma = \frac{g}{100\,F_n}\ \mathrm{kg/cm^3},$$

wobei g in kg/m und F_n in cm² einzusetzen ist.

Dem unteren Pardunenbündel wird eine Vorspannung $\sigma_0 = 1{,}3\ \mathrm{tcm^{-2}}$, dem oberen eine solche von $\sigma_0 = 2{,}3\ \mathrm{tcm^{-2}}$ gegeben.

Nachstehend werden die Koeffizienten a, b, c und damit auch die Verschiebungsgleichung $v_x = F(\sigma_1 - \sigma_2)$ ermittelt.

Abspannung 1:

$$a = \frac{s^3\cdot\cos\alpha}{24}\cdot\gamma^2 = \frac{11\,300^3\cdot 0{,}707\,11}{24}\cdot 0{,}000\,012\,2^2 = 6{,}33,$$

$$b = \frac{s}{E\cdot\cos\alpha} = \frac{11\,300}{1800\cdot 0{,}707\,11} = 8{,}88,$$

$$c = -a\cdot\frac{1}{\sigma_0^2} + b\,\sigma_0 = -6{,}33\cdot\frac{1}{1{,}3^2} + 8{,}88\cdot 1{,}3 = 7{,}80.$$

Es folgt für v:

$$v = -6{,}33\cdot\frac{1}{\sigma^2} + 8{,}88\,\sigma - 7{,}80,$$

σ in t/cm², v in cm.

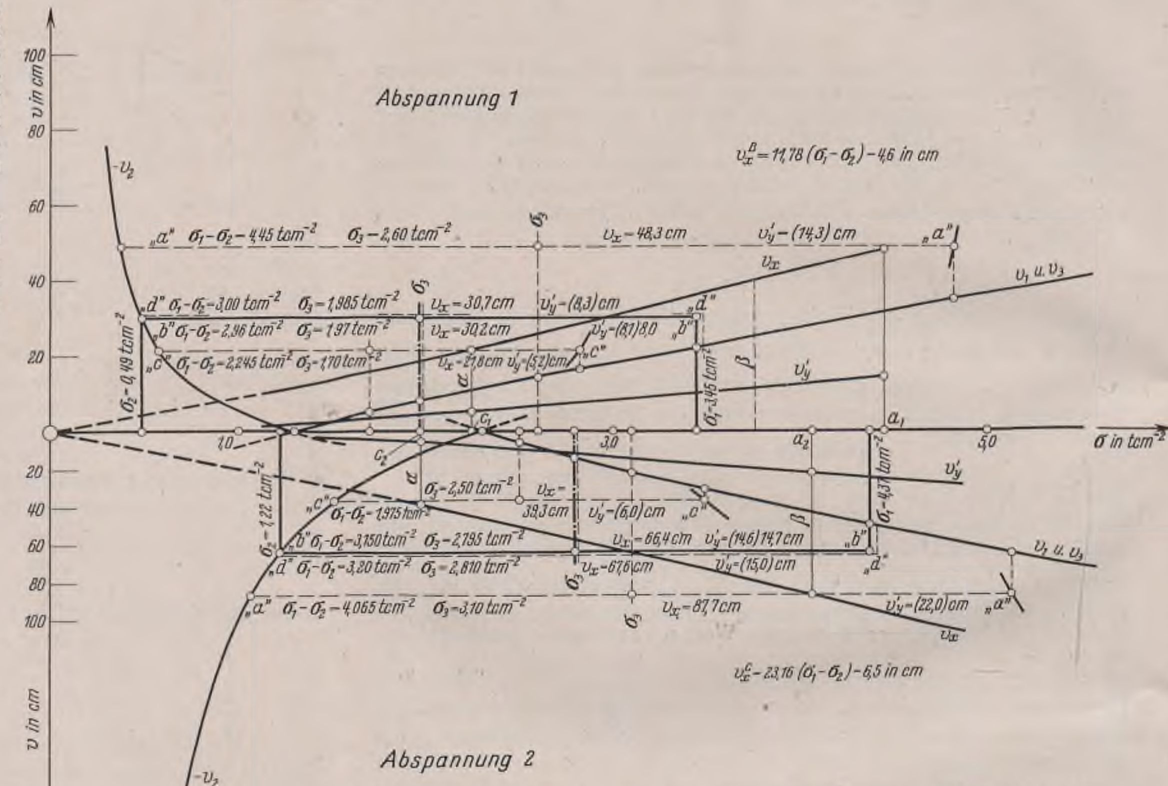


Bild 11. Die v_x-Gleichungen gelten jeweils zwischen α und β. Die v_y-Werte in ( ) sind ohne Berücksichtigung von σ_3^y ermittelt.

Beispiel: Es soll nun für den in Bild 10 ersichtlichen, zweimal nach drei Seiten zu abgespannten, selbstschwingenden Funkmast der Belastungsfall III untersucht werden.

Der Übersichtlichkeit und Kürze des Beispiels halber wird von einer Berücksichtigung des Winddrucks auf die Seile und eines Temperaturunterschiedes gegenüber dem Montagezustand abgesehen. Danach sind die Kurven v_1 und v_3 in Bild 4 u. 5 identisch. Die Lösung des gestellten Problems ist selbstverständlich von diesen Vereinfachungen unabhängig. Die Systemmaße des Mastes sind aus Bild 10 zu entnehmen. Als Windbelastung ist eine gleichmäßig verteilte von 0,190 t/m angenommen. Für die Abspannungen sind patentverschlossene Kabel mit einem Elastizitätsmodul $E = 1800\ \mathrm{tcm^{-2}}$ gewählt.

In Tafel 1 sind die Seildurchmesser und Pardunenbelastungen angegeben. Mit g' ist das Nettogewicht des Seiles je lfd. m bezeichnet.

Tafel 1.

Bezeichnung	Seil-durch-messer mm	Netto-Querschnitts-fläche F_n cm²	Netto-gewicht des Seiles g' kg/m	Reduziertes Gewicht des Seiles g kg/m	Spez. Belastung des Seiles γ kg/cm³
Abspannung 1	35	8,20	7,00	10,00	0,0122
Abspannung 2	40	10,70	9,10	20,90	0,0195

Abspannung 2:

$$a = \frac{s^3\cdot\cos\alpha}{24}\cdot\gamma^2 = \frac{20\,900^3\cdot 0{,}642\,79}{24}\cdot 0{,}000\,019\,5^2 = 92{,}97,$$

$$b = \frac{s}{E\cdot\cos\alpha} = \frac{20\,900}{1800\cdot 0{,}642\,79} = 18{,}06,$$

$$c = -a\cdot\frac{1}{\sigma_0^2} + b\,\sigma_0 = -92{,}97\cdot\frac{1}{2{,}3^2} + 18{,}06\cdot 2{,}3 = 24{,}00.$$

Es folgt für v:

$$v = -92{,}97\cdot\frac{1}{\sigma^2} + 18{,}06\,\sigma - 24{,}00,$$

σ in t/cm², v in cm.

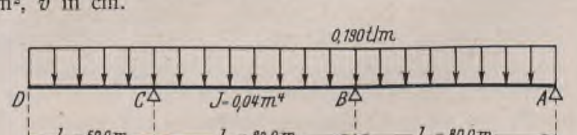


Bild 12.

Die graphische Darstellung der v_1-, v_3- (identisch) und $-v_2$-Linien ist aus Bild 11 ersichtlich. — Unter Betrachtung des Mastes als Balken auf starren Stützen werden nun die zugehörigen Auflagerdrücke ermittelt. Für die Bezeichnungen s. Bild 12.

Es gilt: $M_C l_{II} + 2 M_B (l_I + l_{II}) + 0 = Z_B$

$$l_I = l_{II} = 80{,}0 \text{ m} \qquad 2(l_I + l_{II}) = 320{,}0 \text{ m}$$

$$M_C = -0{,}190 \cdot \frac{50^2}{2} = -237{,}5 \text{ tm} \quad \text{(Kragmoment)}$$

$$M_0 = +0{,}190 \cdot \frac{80^2}{8} = +152{,}0 \text{ tm} \quad \text{(Feldmoment bei } AB \text{ im Grundsystem)}$$

$$Z_B = -6 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 152 \cdot 80 = -48\,640{,}0 \text{ tm}^2 \quad \text{(Belastungsglied).}$$

Für M_B folgt:

$$M_B \cdot 320 = -48\,640{,}0 + 237{,}5 \cdot 80 = -48\,640{,}0 + 19\,000{,}0 = -29\,640{,}0 \text{ tm}^2$$

$$M_B = \frac{-29\,640{,}0}{320} = -92{,}63 \text{ tm.}$$

Für die Auflagerdrücke erhält man nun:

$$A = 0{,}190 \cdot \frac{80}{2} - \frac{92{,}63}{80} = 7{,}60 - 1{,}16 = 6{,}44 \text{ t}$$

$$B = 2 \cdot 0{,}190 \cdot \frac{80}{2} + 2 \cdot \frac{92{,}63}{80} - \frac{237{,}5}{80} = 15{,}20 + 2{,}32 - 2{,}97 = 14{,}55 \text{ t}$$

$$C = 0{,}190 \cdot \frac{80}{2} - \frac{92{,}63}{80} + \frac{237{,}5}{80} + 0{,}19 \cdot 50 = 7{,}60 - 1{,}16 + 2{,}97 + 9{,}5 = 18{,}91 \text{ t.}$$

Die Spannungsdifferenzen $(\sigma_1 - \sigma_2)$ an den Abspannstellen ermitteln sich gemäß Formel (1):

$$\text{bei } B \; (\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{B}{F \cdot \cos\alpha \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{14{,}55}{8{,}20 \cdot 0{,}707\,11 \cdot 0{,}866} = \frac{14{,}55}{5{,}02} = 2{,}90 \text{ tcm}^{-2},$$

$$\text{bei } C \; (\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{C}{F \cdot \cos\alpha \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{18{,}91}{10{,}7 \cdot 0{,}642\,79 \cdot 0{,}866} = \frac{18{,}91}{5{,}956} = 3{,}18 \text{ tcm}^{-2}.$$

In die graphische Darstellung der v_1-, v_3- und $-v_2$-Linien sind die Werte $(\sigma_1 - \sigma_2) = 3{,}0$ (Abspannung 1) bzw. 3,2 (Abspannung 2) eingetragen. Die zugehörigen Spannungen σ_3 betragen 1,985 bzw. 2,81 t/cm², die Verschiebungen v_y 8,3 bzw. 15 cm. Aus letzteren Größen geht ohne weiteres hervor $\left(15 \sim \frac{160}{80} \cdot 8{,}3\right)$, daß in y-Richtung keine nennenswerten Auflagerdrücke zu erwarten sind, solange die W_x-Werte durch die erste Annäherung keine allzu großen Änderungen erleiden werden.

Auf Grund der im allgemeinen Teil entwickelten Methode werden jetzt die Verschiebungsgleichungen $v_x = \frac{v_1 - v_2}{\sqrt{3}}$ und v_y' in Bild 11 aufgetragen und ausgewertet.

Es ergibt sich, daß für Abspannung 1 im Bereich $\sigma_3 = 1{,}70$ bis 2,30 t/cm² und für Abspannung 2 im Bereich $\sigma_3 = 2{,}50$ bis 3,10 t/cm² die v_x-Kurve praktisch nur als Gerade wahrgenommen werden kann. Die Gleichungen lauten:

$$v_x^B = 11{,}78(\sigma_1 - \sigma_2) - 4{,}6 \qquad v_x \text{ in cm}, \quad \sigma \text{ in t/cm}^2,$$

$$v_x^C = 23{,}16(\sigma_1 - \sigma_2) - 6{,}5 \qquad v_x \text{ in cm}, \quad \sigma \text{ in t/cm}^2.$$

Nun ist aber

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^B = \frac{B}{5{,}02} \qquad \text{bzw.} \qquad (\sigma_1 - \sigma_2)^C = \frac{C}{5{,}956}.$$

Durch Einsetzen in obige Gesetzmäßigkeiten erhält man:

$$v_x^B = 2{,}346\,B - 4{,}6 = \omega^B B + w^B \qquad v_x \text{ in cm}, \quad B \text{ in t},$$

$$v_x^C = 3{,}888\,C - 6{,}5 = \omega^C C + w^C \qquad v_x \text{ in cm}, \quad C \text{ in t}.$$

Es ist jetzt möglich, den Mast in x-Richtung als Balken auf elastisch nachgiebigen Stützen zu betrachten. Die Untersuchung erfolgt nach den bei Müller-Breslau, Statik, Bd. II/2, angegebenen Formeln. Die Bezeichnungen sind aus Bild 12 zu ersehen. Z_B^{st} bedeutet im nachfolgenden das Belastungsglied bei starr angenommenen Abspannpunkten.

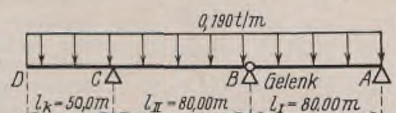


Bild 13.

Für das in Bild 13 gezeichnete Grundsystem werden die Auflagerdrücke benötigt:

$$A_g = 0{,}19 \cdot \frac{80}{2} = 7{,}60 \text{ t},$$

$$B_g = 2 \cdot 0{,}19 \cdot \frac{80}{2} - \frac{237{,}50}{80} = 12{,}23 \text{ t},$$

$$C_g = 0{,}19 \cdot \frac{80}{2} + \frac{237{,}50}{80} + 0{,}19 \cdot 50 = 20{,}07 \text{ t.}$$

Die Elastizitätsgleichung des Mastes lautet:

$$M_B c_B + M_C b_C = Z_B.$$

Es ist

$$c_B = 2(l_I + l_{II}) + 6\,EJ\left[\frac{\omega^C}{l_{II}^2} + \omega^B \cdot \frac{(l_I + l_{II})^2}{l_I^2\, l_{II}^2} + 0\right],$$

$$c_B = 2(80 + 80) + 6 \cdot 2100 \cdot 0{,}04 \cdot 10^4 \left[\frac{0{,}038\,88}{80^2} + \frac{0{,}023\,46 \cdot 4 \cdot 80^2}{80^2 \cdot 80^2}\right],$$

$$c_B = 424{,}48 \text{ m},$$

$$b_C = l_{II} = 80{,}0 \text{ m},$$

$$Z_B = Z_B^{st} - 6\,EJ\left[\frac{w^C + \omega^C C_g}{l_{II}} - \frac{(w^B + \omega^B B_g)(l_I + l_{II})}{l_I\, l_{II}}\right],$$

$$Z_B = -48\,640{,}0 - 6 \cdot 2100 \cdot 0{,}04 \cdot 10^4 \left[\frac{-0{,}065 + 0{,}038\,88 \cdot 20{,}07}{80} - \frac{(-0{,}046 + 0{,}023\,46 \cdot 12{,}23)(80 + 80)}{80 \cdot 80} + 0\right],$$

$$Z_B = -48\,640{,}0 - 14\,679{,}0 = -63\,319{,}0 \text{ tm}^2.$$

Es folgt

$$M_B \cdot 424{,}48 + (-237{,}50)\,80 = -63\,319{,}0$$

bzw.

$$M_B = \frac{-44\,319{,}0}{424{,}48} = -104{,}41 \text{ tm.}$$

Gegenüber der Berechnung des Mastes als Balken auf starren Stützen ist ein Zuwachs von rd. 15 % bei M festzustellen.

Ermittlung der Auflagerdrücke:

$$A = A_g + \frac{M_B}{l} = 7{,}60 - 1{,}31 = 6{,}29 \text{ t},$$

$$B = B_g - \frac{2\,M_B}{l} = 12{,}23 + 2{,}62 = 14{,}85 \text{ t},$$

$$C = C_g + \frac{M_B}{l} = 20{,}07 - 1{,}31 = 18{,}76 \text{ t.}$$

Bei den Auflagerdrücken ist, wie ersichtlich, nur ein kleiner Unterschied gegenüber den angenommenen Werten eingetreten. Es ist aber zu beachten, daß bei vielen Fällen, insbesondere bei großen Kragarmen, die Berücksichtigung der elastischen Nachgiebigkeit der Stützen einen sehr großen Einfluß auf die Auflagerdrücke an den unterhalb des obersten Seilbündels gelegenen Abspannstellen aufweisen kann.

Für die Verschiebungen v_x folgt:

$$v_x^B = 2{,}346 \cdot 14{,}85 - 4{,}6 = 34{,}8 - 4{,}6 = 30{,}2 \text{ cm},$$

$$v_x^C = 3{,}888 \cdot 18{,}76 - 6{,}5 = 72{,}9 - 6{,}5 = 66{,}4 \text{ cm}.$$

Überhöhung des Auflagers B gegenüber der Verbindungslinie AC

$$\Delta v_x = \frac{1}{2} \cdot 66{,}4 - 30{,}2 = 3{,}0 \text{ cm}.$$

Die Spannungsdifferenzen $(\sigma_1 - \sigma_2)$ an den Abspannstellen ermitteln sich zu

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^B = \frac{14{,}85}{5{,}02} = 2{,}96 \text{ tcm}^{-2},$$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^C = \frac{18{,}76}{5{,}956} = 3{,}15 \text{ tcm}^{-2}.$$

Aus der graphischen Darstellung der v-Größen erhält man noch

$$\text{bei } B \quad v_y' = 8{,}1 \text{ cm},$$

$$\text{bei } C \quad v_y' = 14{,}6 \text{ cm}.$$

Diesen Werten entspricht bei B eine Auflagersenkung von 0,8 cm gegenüber der Verbindungslinie AC. Unter dieser Voraussetzung erhält man für das Stützenmoment und die Auflagerkräfte

$$(M_B^y)' = 3{,}15 \text{ tm}, \qquad A_y' = C_y' = +0{,}040 \text{ t}, \qquad B_y' = -0{,}080 \text{ t}.$$

Tatsächlich bewirken aber die Verschiebungen v_y' auch elastische Reaktionen der Abspannbündel. Unter Berücksichtigung der im allgemeinen Teil des Aufsatzes entwickelten Methode ergibt sich für das Stützenmoment und die zugehörigen Auflagerkräfte in y-Richtung:

$$M_B^y = 2{,}55 \text{ tm}, \qquad A_y = C_y = +0{,}030 \text{ t}, \qquad B_y = -0{,}060 \text{ t}.$$

Die entsprechenden Verschiebungen betragen:

$$v_y^B = 8{,}0 \text{ cm},$$

$$v_y^C = 14{,}7 \text{ cm},$$

Auflagersenkung bei B $\Delta v_y = 0{,}65$ cm.

Wie ohne weiteres ersichtlich, können die W_y-Kräfte vernachlässigt werden, da ihr Einfluß auf die Seilspannungen minimal ist. Nachstehend

sind in Tafel 2 die Seilspannungen und Verschiebungen v und v_y zusammengestellt[6]).

Tafel 2.

Bezeichnung	σ_1	σ_2	σ_3	$\Sigma\sigma$	v_x	v_y	V
Abspannung 1	4,37	0,49	1,97	5,91	30,2	8,0	31,2
Abspannung 2	3,45	1,22	2,795	8,385	66,4	14,7	68,0

Um den Vergleich mit der Wirkung der Belastungsfälle I und II zu ermöglichen, werden unter der Annahme gleicher Auflagerdrücke bei B und C die Spannungen und Verschiebungen für die Windrichtungen I und II gemäß Bild 14 und 15 ermittelt. Die dazu benötigten Differenzen $(\sigma_1 - \sigma_2)$ betragen:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^B = \frac{B}{F \cdot \cos\alpha} = \frac{14,85}{5,798} = 2,56 \text{ tcm}^{-2},$$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^C = \frac{C}{F \cdot \cos\alpha} = \frac{18,76}{6,878} = 2,73 \text{ tcm}^{-2}.$$

Aus Tafel 3 sind die zugehörigen Spannungs- und Verschiebungswerte zu entnehmen.

Tafel 3.

Bezeichnung	Lastfall I				Lastfall II			
	$\sigma_1 = \sigma_2$	σ_3	$\Sigma\sigma$	V	$\sigma_1 = \sigma_2$	σ_3	$\Sigma\sigma$	V
Abspannung 1	0,80	3,36	4,96	21,5	3,00	0,44	6,44	36,5
Abspannung 2	1,70	4,43	7,33	51,0	3,85	1,12	8,82	78,0

Der Vergleich der Tafeln 2 und 3 zeigt, daß bei Abspannung 1 der Belastungsfall III, dagegen bei Abspannung 2 der Belastungsfall I die größten Pardunenspannungen erzeugt. Die Unterschiede sind allerdings gering. Wie aus mehreren durchgerechneten Beispielen hervorgeht, ist im allgemeinen der Belastungsfall III bei in Bezug auf die Seillänge kleinen Vorspannungen für die größten Seilspannungen maßgebend. Betreffend die maximalen Querkräfte in den Fachwerkwänden ist es unbedingt notwendig, den Fall III zu untersuchen. Das Maximum der Normalkraft der Abspannbündel entsteht aus Windbelastung II. Selbstverständlich gelten vorerwähnte Schlußfolgerungen unter der Voraussetzung gleicher Winddruckverhältnisse in x- und y-Richtung.

Bei vielen Masttypen sind aber die Belastungsverhältnisse bei Fall I, II und III, wie aerodynamische Versuche gezeigt haben, verschieden. Wenn also z. B. $W_{III} > W_I$ (bzw. $W_I > W_{III}$) ist, kann der Fall eintreten, daß unabhängig von der Vorspannung die größten Pardunenspannungen von W_{III} (bzw. W_I) erzeugt werden.

Schlußfolgerung: Aus obigen Ausführungen ist also ersichtlich, daß es auch in der Praxis bei Berechnung von abgespannten Funkmasten notwendig ist, den Belastungsfall III zu untersuchen.

[6]) Wie es im allgemeinen bei Belastungsfall III zutrifft, erfolgt die Verschiebung der Abspannpunkte auch in diesem Beispiel ungefähr nach der Winkelhalbierenden des von der $+x$-Achse und der horizontalen Projektion des Seiles umschlossenen Winkels. Daraus folgt, daß $v_y \sim v_2$ ist.

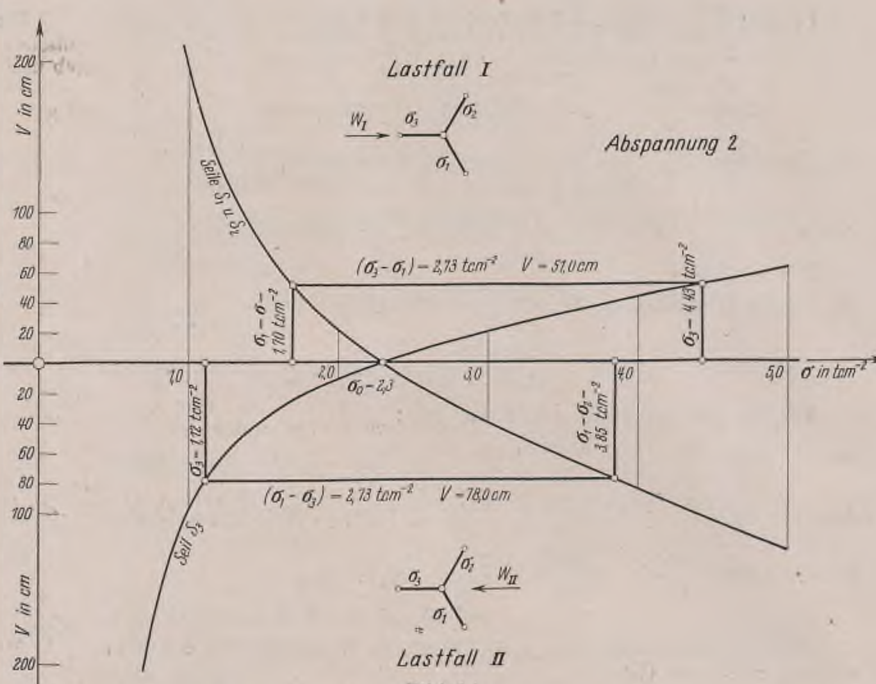


Bild 14.

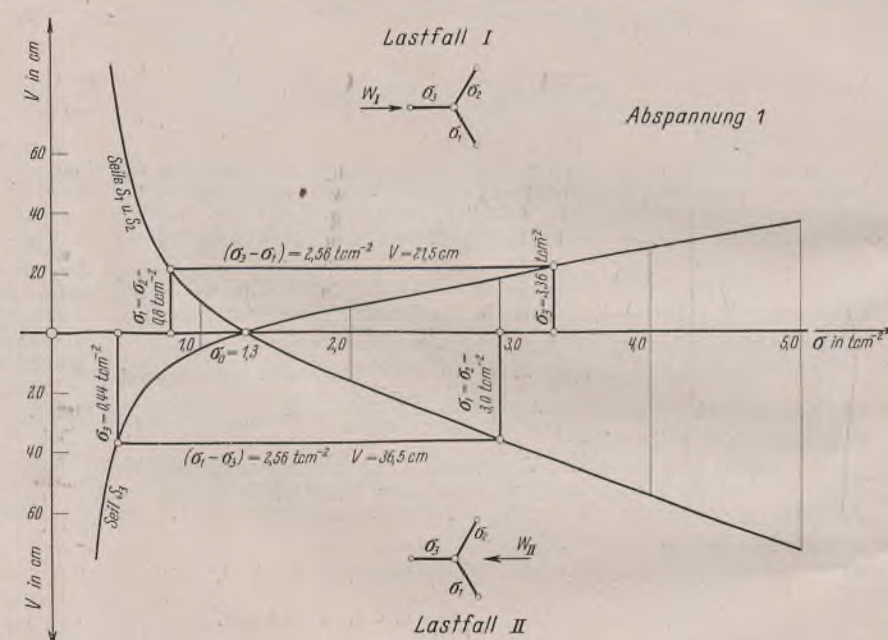


Bild 15.

Die Knickberechnung von schlanken Kranauslegern.

Von Prof. Dr.-Ing. **Georg Unold**, Chemnitz.

Der Ausleger eines einfachen Dreh- und Wippkranes ist in Bild 1 im Aufriß und Grundriß dargestellt. Zur Abkürzung bezeichnet L die lotrechte Mittelebene und E die durch die Auslegerachse und den waagerechten Bolzen A gebildete Ebene.

Der Ausleger erhält von der Last P und der Zugstangenkraft Z den mittigen Druck D; er bildet ein ebenes Fachwerk, das auf Knick in Ebene L zu bemessen ist; das mäßige Eigengewicht des Auslegers wird in bekannter Weise berücksichtigt. Die Breite des Auslegerfachwerks ist in der Regel so groß, daß ein Knick in seiner eigenen Ebene E nie in Frage kommt; der örtliche Gurtstabknick erledigt sich in üblicher Weise.

Nun liegt bei Derrick- und Turmkranen oft der Sonderfall vor, daß der Gitterausleger von Rechteckquerschnitt in beiden Ebenen L und E besonders schlank ist, und über die richtige Knickberechnung eines solchen als Stab zu betrachtenden Auslegers sind verschiedene Meinungen im Umlauf; jedenfalls sind hier gewisse dem Kranstatiker ungewohnte Labilitätsüberlegungen anzustellen. Nachstehende Darlegungen sollen zur Klärung der Frage beitragen.

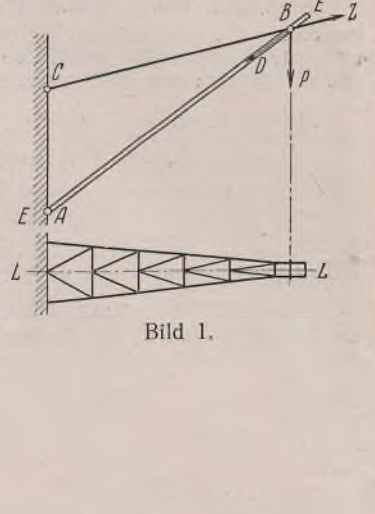


Bild 1.

Bild 2 zeigt einen solchen schlanken Gitterausleger in Ansicht, Draufsicht und Grundriß und mit Knickverformung. Er ist bei A durch waagerechten Bolzen am ortsfesten Krangerüst angeschlossen und bei B durch Zugstange gehalten; diese liegt bei C streng mittig am Krangerüst. Der Einfachheit wegen sei nur die am Haken ruhig hängende Last P berücksichtigt, die von solcher Größe sei, daß sie den Ausleger in Knickgefahr bringe, also Labilität hervorbringe; es liege auch der elastische Fall vor.

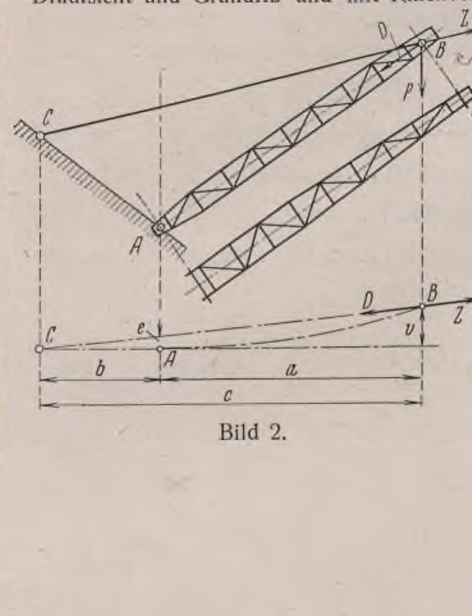


Bild 2.

Gegen Knick in Lotebene L sei der Ausleger richtig bemessen; es soll sich hier um Knick in Ebene E handeln.

Welcher „Eulersche Knickfall" hier vorliegen wird, sei einstweilen dahingestellt; jedenfalls wird im Labilitätsfalle bei A Einspannung vorliegen, und die elastische Linie wird, wie im Grundriß dargestellt, daselbst zur Mittellinie tangieren und bei B eine Ausweichung v von unbestimmt bleibender Größe annehmen.

P zerlegt sich in Zug Z und Druck D; bei lotrecht hängender Last P bildet das Kräftedreieck PDZ eine lotrechte Figur; daher fallen die Grundrisse von Z und D aufeinander und fallen in die Verbindungslinie der Grundrisse B und C, gehen also um Strecke e an Grundrißmittelpunkt A vorbei. Geometrisch ist

$$e = v\,b : c.$$

Es liegen zwei Grenzfälle vor.

Erster Grenzfall: Zugstangenpunkt C liegt lotrecht über Bolzenpunkt A. Dann verschwindet Strecke b und Abstand e; im Ausleger geht Druck D durch Punkt A, verläuft also in Richtung AB; es liegt demnach trotz der Einspannung in A der zweite Eulerfall vor; die Einspannung ist nicht von statischer, sondern nur von geometrischer Bedeutung, indem bei Eintritt des labilen Zustandes die Neigung der elastischen Linie bei A mit Null gegen die Mittelachse beginnt. Wieweit die einfache Eulerformel II anwendbar ist oder wegen veränderlicher Fachwerkshöhe etwa das Vianello-Verfahren heranzuziehen ist, mag fallweise entschieden werden.

Wenn nun bei einem Derrick die in einer Lotrechten liegenden Punkte C und A nicht in einem ortsfesten Gerüst, sondern auf einer reibungsfrei drehbaren lotrechten Säule sitzen, dann ist es nicht etwa nötig, den Auslegerkopf B durch Seile oder sonstwie gegen Drehen festzuhalten, sondern die Lage des Auslegers bleibt unbestimmt und indifferent; die Knickbiegelinie des Auslegers erfolgt gemäß dem zweiten Eulerfall.

Zur weiteren Bestätigung der obigen Behauptung baut man sich ein einfaches Modell: Man stellt einen schlanken unten, zugespitzten Holzstab nach Bild 3 in die Kante zwischen Fußboden und Wand und hindert durch kleine Anschläge ein seitliches Ausgleiten. Den Kopf des Holzstabes verbindet man mittels Schnur mit einem genau lotrecht über dem Fußpunkt sitzenden Wandhaken. Belastet man den Stab am Kopf durch ein ruhig lotrecht hängendes Gewicht, dann fühlt man ohne jede Rechnung, daß auch ohne seitliches Festhalten des Kopfes für den Stab sowohl in Ebene L als auch in Ebene E der zweite Eulerfall, nicht der erste vorliegt.

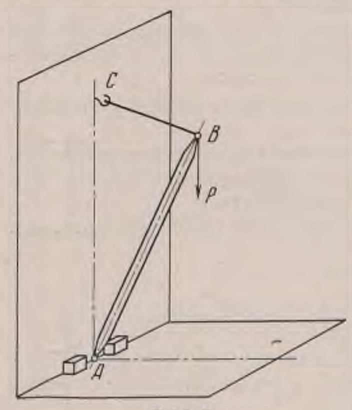


Bild 3.

Zweiter Grenzfall: Liegt Punkt C in Bild 2 unendlich weit links, dann liegen bei Ausweichung v die Kräfte Z und D parallel zu Ebene L; es ist dann $e = v$, was auch schon aus der obigen e-Formel hervorgeht. Das bedeutet für den in A eingespannten Ausleger das Vorliegen des ersten Eulerfalles. Eine Schwenkbarkeit des Auslegers kommt hier nicht in Frage.

Ist Strecke b endlich, dann liegt der Fall zwischen den Grenzfällen, und der Knickfall liegt zwischen dem ersten und dem zweiten Eulerfall. Eine exakte Verfolgung dieses Falles für beliebige Verhältnisse liegt vielleicht noch gar nicht vor, hätte hier aber fraglichen Wert, weil der Ausleger nie einen einfachen Stab von unveränderlichem J darstellt, aber im Bedarfsfalle könnte das Vianello-Verfahren zum Ziele führen.

Schubbeulung rechteckiger Platten mit eingespannten Rändern.*)

Von Dr.-Ing. **Wilhelm Moheit**, Mainz-Gustavsburg.

Bei der Bemessung von hohen Stegblechen vollwandiger Stahlkonstruktionen muß neben der Festigkeitsuntersuchung auch die Sicherheit des Stegbleches gegen Ausbeulen berücksichtigt werden. Im Rahmen dieser Arbeit werden die Beulspannungen rechteckiger Platten mit allseitiger Einspannung unter Schubbelastung ermittelt und auf dieser Grundlage entsprechende Versuchsergebnisse (s. Original) erörtert.

Als erster untersuchte Timoshenko[1]) die einspannungsfrei gelagerte und auf Schub beanspruchte Rechteckplatte. Er ging dabei von der Bryanschen[2]) Energiegleichung aus. In dieser Ableitung wie auch in den Ableitungen von Reißner[3]), Nádai[4]) und Geckeler[5]) wird nicht die Mittelflächenverzerrung berücksichtigt. Man macht die gleichen Annahmen wie in der elementaren oder linearisierten Plattentheorie. Diese Annahmen sind genau denjenigen nachgebildet, die der Biegung eines Stabes zugrunde gelegt werden, wo sie durch die Erfahrung gut bestätigt wurden.

Mit der einspannungsfrei gelagerten Platte befaßten sich weiterhin noch Bergmann und Reißner[6]), die auf einem anderen Wege als Timoshenko zu einer Näherungslösung kommen. Ebenso erwähnt werden müssen die Arbeiten von Seydel[7]), Bergmann[8]), Trefftz und Willers[9]). Wagner[10]) und Schmieden[11]) entwickelten Lösungen für gleichzeitige Schub- und Druckbelastung. Der zuletzt genannte Verfasser behandelte nur den unendlich langen Plattenstreifen.

Das Problem der auf Biegung und Schub beanspruchten Rechteckplatte wurde von Timoshenko[12]) und Stein[13]) untersucht. Wansleben[14]) und Chwalla[15]) entwickelten hierzu Näherungslösungen. Auf dieser Grundlage sind auch die in den sogenannten „Beulbestimmungen" der Deutschen Reichsbahn und anderer baupolizeilicher Behörden aufgenommenen k-Werte[16]) festgelegt, mit denen die Eulerspannung $\sigma_e = \frac{\pi^2 D}{b^2 t}$ (worin $D = \frac{E\,t^3}{12\,(1-\mu^2)}$ die Plattensteifigkeit ist) zu vervielfachen ist, um die Beulspannungen bei einspannungsfreier Lagerung zu erhalten[17]).

Dagegen ist die allseitig eingespannte Platte bis zu Beginn dieser Untersuchung nur wenig behandelt worden. Es lagen seinerzeit nur die beiden Arbeiten von Southwell-Skan[18]) und Seydel[19]) vor. In diesen wird die unendlich lange, an ihren Längsrändern eingespannte, auf Schub beanspruchte Platte behandelt, deren technische Bedeutung aber nicht allzu groß ist. Southwell-Skan errechneten $k = 8{,}98$; Seydel ermittelte k genauer zu 8,96. Der entsprechende Wert für einspannungsfrei gelagerte Platten beträgt $k = 5{,}34$. Mithin bringt die Einspannungswirkung eine Erhöhung um 68%. Dieser Wert ist sehr beachtlich, wenn er natürlich auch weit hinter der Erhöhung um 400% beim beiderseits eingespannten Knickstab zurückbleibt.

Für die Schubbeulung rechteckiger Platten endlicher Ausdehnung gab es noch keinerlei Veröffentlichungen. H. L. Cox erwähnt lediglich in Aeron. Res. Comm. Rep. and Mem. 1553, London 1933, daß etwa bei Einspannung sämtlicher Längsränder die Beulspannung bei reinem Schub durchschnittlich um 70% gegenüber einspannungsfreier Lagerung gehoben wird.

Erst nach Abschluß dieser Arbeit gab Iguchi[20]) ebenfalls eine Berechnung der allseits eingespannten Platte endlicher Ausdehnung bekannt. Sie unterscheidet sich in dem Behandlungsweg wesentlich von der nachstehenden; die Übereinstimmung der Ergebnisse ist jedoch befriedigend. Auf nähere Einzelheiten der Arbeit von Iguchi sei erst an späterer Stelle eingegangen.

So war also die allseitige Einspannungswirkung bei der auf Schub beanspruchten Platte bisher nur ungenügend untersucht worden, obwohl es praktische Fälle gibt, wo mit einer solchen Einspannungswirkung gerechnet werden kann.

Über die entsprechenden Verhältnisse im plastischen Bereich liegen keine Untersuchungen vor. Man ist bei der Übertragung der nach der Elastizitätstheorie gewonnenen Ergebnisse auf die im Stahlbau häufig vorkommenden Fälle des plastischen Beulens auf weitgehende Annahmen angewiesen, die einer physikalischen Grundlage entbehren. So wird in den „Beulvorschriften" der Weg beschritten, wie er unter IV näher erläutert wird. Es unterliegt natürlich keinem Zweifel, daß im plastischen Bereich die Einspannungswirkung stark zurücktritt.

*) Auszug aus der von der Abteilung für Bauingenieurwesen der Technischen Hochschule Darmstadt genehmigten Dissertation. Die Anregung zu dieser Arbeit gab mir Herr Prof. Dr.-Ing. Klöppel, Darmstadt, dem für die mir damit erwiesene Förderung hier vielmals gedankt sei. — Der Auszug beschränkt sich auf den ersten Teil der Arbeit; hinsichtlich des zweiten Teiles: „Versuchsmäßiges Verhalten von Vollwandträgern unter Schubbelastung" wird auf das Original verwiesen.

1) Timoshenko, Über die Stabilität elastischer Systeme. Kiew 1910. — Ann. Ponts Chauss. 1913, S. IX, T. III bis V. — Eisenbau 1921, S. 147.

2) Bryan, Proc. Cambr. Phil. Soc. 6 (1888), S. 199 u. 286. — Proc. Lond. Math. Soc. 22 (1891), S. 25 u. 54; 25 (1894), S. 141.

3) Reißner, Z. angew. Math. Mech. 1925, Bd. V.

4) Nádai, Elastische Platten. Berlin 1925, Springer.

5) Geckeler, Handbuch der Physik 1928, Bd. VI.

6) Bergmann und Reißner, Z. f. Flugtechn. u. Motorluftsch. 23 (1932), S. 6.

7) Seydel, Z. f. Flugtechn. u. Motorluftsch. 24 (1933), S. 78. — Ing.-Arch. 1933, S. 169.

8) Bergmann, Über Schubknickung von isotropen und anisotropen Platten. Stockholm 1930.

9) Trefftz und Willers, Z. angew. Math. Mech. 1936, Heft 6.

10) Wagner, Jb. d. wiss. Ges. f. Luftf. 1928, S. 113.

11) Schmieden, Z. angew. Math. Mech. 15 (1935), S. 278.

12) Timoshenko, Miscell. Papers pres. Amer. Soc. Mech. Engr.-Meetings 1933, Paper Nr. 3. — Engineering 1934, S. 207.

13) Stein, Stahlbau 1934, Heft 8.

14) Wansleben, Stahlbau 1935, Heft 15.

15) Chwalla, Bauing. 1936, Heft 9/10.

16) Schleicher, Bauing. 1934, Heft 51/52.

17) Hartmann, Knickung, Kippung, Beulung. Leipzig u. Wien 1937, Deuticke. — § 42 der Berechnungsgrundlagen für stählerne Eisenbahnbrücken der DRB (BE) — Stahlbau-Kalender 1939.

18) Southwell-Skan, Proc. Roy. Soc., S. 582. London 1924.

19) Seydel, Luftf.-Forschg. 1930, S. 88.

20) Iguchi, Ing.-Arch. 1938, S. 1.

Die Beulvorschriften berücksichtigen durchweg einspannungsfreie Lagerung ihrer Plattenränder. Die Tatsache, daß durchgeführte Versuche in der Regel höhere Beulspannungen ergeben als die Rechnung, ließ es angezeigt erscheinen, die Einspannungswirkung rechnerisch genauer zu erfassen.

I. Aufgabenstellung.

Bei der zu untersuchenden rechteckigen Platte handele es sich um eine elastische Platte aus homogenem, isotropem Material. Folgende Bedingungen werden der Berechnung zugrunde gelegt:

1. Das Hookesche Gesetz wird als unbegrenzt gültig angenommen ($E = 2\,100\,000$ kg/cm²).
2. Die Dicke t soll klein gegenüber den Seitenlängen a und b sein.
3. Ebene und zur Mittelebene ursprünglich senkrechte Querschnitte bleiben eben und zur Mittelebene senkrecht.
4. Längs des Randes greifen gleichmäßig verteilte Schubspannungen an (Bild 1).
5. Die Platte sei im spannungslosen Zustand vollkommen eben.
6. Eine Verschiebung der Ränder senkrecht zur Plattenebene sei ausgeschlossen, $w = 0$.
7. Die Ränder der Platte seien eingespannt, d. h. die Tangente der Biegelinie verlaufe an der Auflagerung horizontal; $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0$.

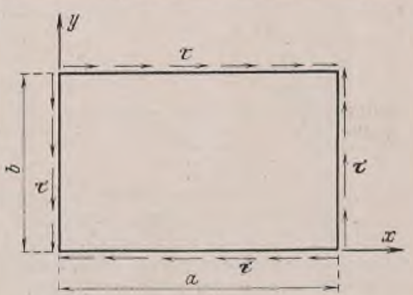


Bild 1.

8. Die Einspannung soll jedoch so beschaffen sein, daß eine Längsverschiebung möglich ist, um die sonst entstehenden Längsspannungen (Dehnungskräfte) außer acht lassen zu können. Diese Einschränkung bezieht sich hauptsächlich auf mitteldicke und dünne Platten, bei denen, falls die Ränder nicht längsverschieblich gelagert sind, ein nennenswerter Einfluß der Dehnungskräfte infolge der größeren Ausbiegungen sich einstellt, der aber durch die Annahmen, die der Ableitung der nachstehenden Differentialgleichung zugrunde gelegt wurden, gar nicht erfaßt wird. Will man mit der nachstehenden Differentialgleichung rechnen, so darf vorerst nicht nach dem Einfluß der Dehnungskräfte gefragt werden. Somit ist durch die genannte Einschränkung diesem Umstand Rechnung getragen. Bei dickeren Platten fällt dieser Bedingung keine Bedeutung zu, da hier ohnehin schon die Dehnungskräfte keine nennenswerte Rolle spielen.

Gesucht ist die kleinste kritische Schubspannung $\tau_k = k\,\sigma_e$, worin

$$\sigma_e = \frac{\pi^2 D}{b^2 t} \text{ mit } D = \frac{E t^3}{12(1-\mu^2)}$$

die Eulerknickspannung ist, so daß nur der kritische Wert k ermittelt wird.

Infolge der obengenannten Bedingungen können wir die auf den Grundlagen der linearen Plattenstatik entwickelte Differentialgleichung für Ausbeulen von Platten konstanter Dicke als Ausgangspunkt einer Lösung benutzen. Von einer Ableitung dieser Gleichung wird hier Abstand genommen[21]). Es sind bei dieser Ableitung im wesentlichen die gleichen Überlegungen maßgebend wie bei der Ableitung der Biegungsgleichung von Platten. Man kann sie z. B. entweder durch die Gleichgewichtsbedingung am Plattenelement (Nádai) oder durch eine Maximumbetrachtung an der Bryanschen Energiegleichung durch Bildung der ersten Variation (Reißner) gewinnen. Wird eine Platte nur durch reinen Schub beansprucht, so lautet die Differentialgleichung:

$$\nabla^2 \nabla^2 w - k \cdot \frac{2\pi^2}{b^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} = 0,$$

worin

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$

bedeutet. Die gesuchten kritischen Werte k ergeben sich hieraus als kleinste Zahlengrößen. Es sei nochmals betont, daß die Differentialgleichung nur zur Ermittlung der kritischen Beullast dient und daß sich mit ihrer Hilfe keine Aussagen über das Tragverhalten oberhalb der kritischen Beullast, über den Einfluß der Dehnungskräfte usw. machen lassen (Analogie: Linearisierte und nichtlinearisierte Differentialgleichung der Stabknickung).

Die Möglichkeit, mit Hilfe der Bryan-Timoshenko-Ritz[22])schen Energiegleichung zum Ziele zu gelangen, wurde hier nicht untersucht.

Für vorliegende Zwecke erschien es am zweckmäßigsten, zu Differenzengleichungen[23]) überzugehen. In ähnlicher Weise gingen auch K. Sattler[24]), O. Heesch[25]) und W. Burchard[26]) bei Stabilitätsuntersuchungen von Platten vor. Obwohl das Rechnen mit Differenzen keine absolut richtigen Werte liefert, kann mit Differenzengleichungen eine praktisch hinreichende Genauigkeit erzielt werden; denn man muß sich dessen bewußt sein, daß jede Genauigkeitssteigerung einer mathematischen Untersuchung wenig Zweck hat, wenn nicht die physikalischen Annahmen weitgehend erfüllt sind. Solange man sich auch hier nur auf Annahmen beruft, die von der Wirklichkeit mehr oder weniger abweichen, wird auch die „mathematisch strenge" Lösung nur eine Näherung bleiben. Im Zusammenhang mit den Versuchsergebnissen (vgl. Original) wird gezeigt, daß auch das Rechnen mit Differenzen praktisch hinreichend ist.

II. Die quadratische Platte.

1. Umwandlung der Differentialgleichung in eine Differenzengleichung.

An Stelle der Differentiale ∂x und ∂y benutzt man in der Differenzenrechnung die endlichen Größen λ_x und λ_y. Zu diesem Zwecke wird über die Platte ein Netz gelegt, das in diesem Fall quadratische Teilung besitze (Bild 2). $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$ sei der Netzabstand. Somit ist die Teilung: $n = \frac{a}{\lambda} = \frac{b}{\lambda}$.

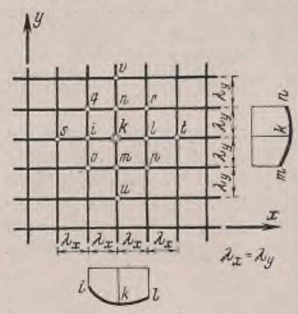


Bild 2.

Um zur Differenzengleichung für den Punkt k z. B. zu gelangen, werden die einzelnen Glieder der Differentialgleichung durch die entsprechenden Differenzenausdrücke ersetzt. Diese erhält man auf folgende Weise: Jede Kurve kann man auf eine gewisse Strecke ziemlich genau als eine Parabel ansehen. Denken wir uns also die benachbarten Punkte bei k sowohl in X- als auch in Y-Richtung durch eine Parabel an Stelle der tatsächlichen Schnittkurve verbunden, so erhält man für die X-Richtung

$$w = \frac{w_i - 2 w_k + w_l}{2\lambda^2} \cdot x^2 + \frac{w_l - w_i}{2\lambda} \cdot x + w_k$$

und für die Y-Richtung

$$w = \frac{w_m - 2 w_k + w_n}{2\lambda^2} \cdot y^2 + \frac{w_n - w_m}{2\lambda} \cdot y + w_k.$$

Die erste und zweite Ableitung dieser Gleichungen liefern uns die analogen Differenzenquotienten:

$$\frac{\partial w}{\partial x} \to \frac{w_l - w_i}{2\lambda} \qquad \frac{\partial w}{\partial y} \to \frac{w_n - w_m}{2\lambda}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \to \frac{w_i - 2 w_k + w_l}{\lambda^2} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \to \frac{w_m - 2 w_k + w}{\lambda^2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} \to \frac{w_o + w_r - w_p - w_q}{4\lambda^2}$$

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \to \frac{w_i + w_l + w_m + w_n - 4 w_k}{\lambda^2}.$$

Um nun zu den vierten Ableitungen zu gelangen, hätte man in gleicher Weise an Hand der zweiten Differentialkurve vorzugehen. Von der Zwischenrechnung soll hier jedoch Abstand genommen werden. Es ist

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \to$$

$$\frac{1}{\lambda^4}\,[20 w_k - 8 (w_i + w_l + w_m + w_n) + 2 (w_o + w_p + w_q + w_r) + (w_s + w_t + w_u + w_v)].$$

Führen wir noch die Vereinfachung $k \cdot \frac{\pi^2}{2 n^2} = \psi$ ein, so erhalten wir schließlich die gesuchte Differenzengleichung für den Netzknoten k einer quadratischen Platte:

$$20 w_k - 8 (w_i + w_l + w_m + w_n) + 2 (w_o + w_p + w_q + w_r) + (w_s + w_t + w_u + w_v) - \psi (w_o + w_r - w_p - w_q) = 0.$$

Für jeden Punkt des Netzes ist diese Gleichung aufzustellen. Wir bekommen also ebenso viele Gleichungen wie Netzpunkte. Sämtliche enthalten neben den Beulflächenordinaten w noch ψ als Unbekannte. Die Gleichungen sind homogen, die nur dann bekanntlich von Null verschiedene Werte liefern, wenn die Koeffizientendeterminante gleich Null ist. Die gleich Null gesetzte Determinante stellt die Beulbedingung dar, aus der wir ψ und schließlich den kritischen Wert k' bestimmen können.

Je enger das Netz gewählt wird, um so genauere Ergebnisse lassen sich erzielen. Wir wollen mit den einfachsten Netzen beginnen und die Rechnung nur so weit vortreiben, wie es auf Grund der Konvergenz der Untersuchung erforderlich ist, um dann durch Schluß von k_{endlich} auf $k_{\text{unendlich}}$ ein hinreichend genaues Ergebnis zu erlangen.

[21]) Hierüber kann nachgelesen werden bei: Nádai, Elastische Platten, S. 233. Berlin 1925, Springer. — Föppl, Drang und Zwang, Bd. I, S. 130. 1924, Oldenbourg — Reißner, Z. angew. Math. Mech. 1925, S. 475.

[22]) Ritz, Crelles Journal 1908, Bd. 135, S. 1.

[23]) Vgl. hierzu: Marcus, Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten, Bd. 1, 2. Aufl. Berlin 1932, Springer. — Funk, Die linearen Differenzengleichungen und ihre Anwendung in der Theorie der Baukonstruktionen. Berlin 1920, Springer. — Bleich-Melan, Die gewöhnlichen und partiellen Differenzengleichungen der Baustatik. Berlin u. Wien 1927, Springer.

[24]) Sattler, Mitt. Forsch.-Anst. GHH-Konzern 3 (1935), S. 257.

[25]) Heesch, Diss. Hannover 1936.

[26]) Burchard, Ing.-Arch. 1937, S. 332.

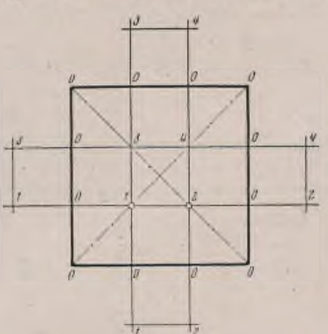
Die Ausrechnung der Determinanten erfolgt so, daß mit Hilfe der Gaußschen Elimination das Gleichungsschema nur auf Glieder oberhalb der Diagonale beschränkt und dann für geschätzte ψ so oft durchgerechnet wird, bis die Determinante der Stellenzahl von ψ entsprechend genügend genau Null wird. Das Gaußsche Eliminationsverfahren ist hier infolge seiner Übersichtlichkeit und Kontrollmöglichkeiten besonders geeignet.

2. Ermittlung der k'-Werte der quadratischen Platte.

Die Randbedingungen werden auf folgende Weise erfaßt:

1. Da die Plattenränder festgehalten sind, ist zu setzen $w = 0$.
2. Um die Randbedingung $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$ zu berücksichtigen, wird das Netz über die Ränder hinaus verlängert. Es ist dann für einen beliebigen Randpunkt k $\frac{w_l - w_i}{2\lambda} = 0$ oder $w_i = w_l$, d. h. die ersten Netzpunkte vor und hinter den Plattenrändern haben Durchbiegungen von gleicher Größe und Richtung.

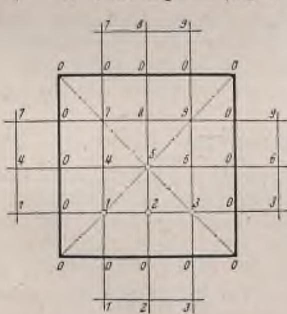
Der Untersuchung wären wohl bald Grenzen gesetzt, wenn man keine Vereinfachungen einführen könnte. Infolge Symmetrie der Platte und der äußeren Kräfte wird sicher auch die Beulfläche Symmetrie aufweisen. Es wird an Hand der ersten Durchrechnungen gezeigt, daß Symmetrie zu beiden Diagonalen vorliegt. Infolgedessen sind nur die Beulflächenordinaten unbekannt, die auf dem Plattenausschnitt zwischen zwei Diagonalen liegen.

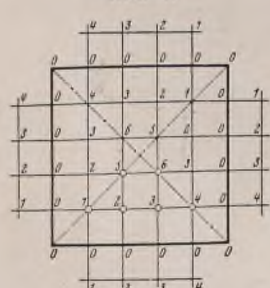

Bild 3.

1. Näherung: Teilung $n = 3$ (Bild 3).

Zunächst wird für jeden Netzpunkt die Gleichung aufgestellt, wobei zu beachten ist, daß schon in der Art der Knotenbezifferung die Randbedingungen berücksichtigt werden:

$$\text{Knoten 1: } +20\,w_1 - 8\,(w_2 + w_3) + 2\,w_4 + 2\,w_1 - \psi\, w_4 = 0$$
$$\text{„ 2: } +20\,w_2 - 8\,(w_1 + w_4) + 2\,w_3 + 2\,w_2 - \psi\,(-w_3) = 0$$
$$\text{„ 3: } +20\,w_3 - 8\,(w_1 + w_4) + 2\,w_2 + 2\,w_3 - \psi\,(-w_2) = 0$$
$$\text{„ 4: } +20\,w_4 - 8\,(w_2 + w_3) + 2\,w_1 + 2\,w_4 - \psi\, w_1 = 0.$$


Bild 4.


Bild 5.

Die entsprechenden Glieder zusammengefaßt ergeben das System der Tafel 1. Man erkennt, daß es Symmetrie zu beiden Diagonalen besitzt. Derartige Systeme lassen sich in bekannter Weise auf zwei getrennte Gleichungssysteme vereinfachen (Tafel 2).

Von diesen liefert nur dasjenige brauchbare Werte, bei dem die Ordinaten addiert werden. Das zweite System ist schon identisch Null, da $w_1 = w_4$ und $w_2 = w_3$ nach Tafel 3 ist. In dieser sind die Knotengleichungen der Punkte 1 und 2 dargestellt, die der rechten Seite der Tafel 2 entsprechen. Die Koeffizientendeterminante der Tafel 3 oder 2 rechts, gleich Null gesetzt, liefert die Beulbedingung. Hieraus ermittelt sich der kleinste Zahlenwert für ψ zu 17,8885. Der zugehörige Beulwert lautet:

$$k' = \psi \cdot \frac{2\,n^2}{\pi^2} = 17{,}8885 \cdot \frac{2 \cdot 3^2}{\pi^2} = 32{,}625.$$

Tafel 1.

	w_1	w_2	w_3	w_4	
1.	$+22$	-8	-8	$+2-\psi$	$=0$
2.	-8	$+22$	$+2+\psi$	-8	$=0$
3.	-8	$+2+\psi$	$+22$	-8	$=0$
4.	$+2-\psi$	-8	-8	$+22$	$=0$

Tafel 2.

$w_1 - w_4$	$w_2 - w_3$	$w_1 + w_4$	$w_2 + w_3$
$+2(20+\psi)$	0	0	0
0	$+2(20-\psi)$	0	0
0	0	$+2(24-\psi)$	-32
0	0	-32	$+2(24+\psi)$

2. Näherung: Teilung $n = 4$ (Bild 4).

Auch hier sei nochmals vom allgemeinsten Fall ausgegangen und für jeden Knoten die Gleichung angesetzt. Aus Platzrücksichten ist gleich das fertige Gleichungsschema zu allen neun Punkten gebracht (Tafel 4). Ebenfalls wie bei der 1. Näherung liegt hier Symmetrie zu beiden Diagonalen vor. Das System läßt sich wieder in zwei voneinander getrennte Systeme verwandeln, wie es in Tafel 5 dargestellt ist. Von diesen hat nur dasjenige weitere Bedeutung, bei dem die Ordinaten addiert werden. Nur das fünfgliedrige System führt zu einer Lösung. Dieses läßt sich nun nochmals auf ein viergliedriges zurückführen (Tafel 6), das aber nichts anderes als die Knotengleichungen der Punkte 1, 2, 3 und 5 darstellt. Das viergliedrige System der Tafel 5 liefert keine brauchbaren Lösungen; denn dies wird schon dadurch befriedigt, daß $w_4 - w_6 = w_3 - w_7 = w_2 - w_8 = w_1 - w_9 = 0$ ist.

Tafel 3.

$w_1 = w_4$	$w_2 = w_3$
$+24-\psi$	-16
-16	$+24+\psi$

Aus diesen beiden Näherungen erkennt man somit, daß die Beulfläche der quadratischen Platte doppelt symmetrisch ist.

In ähnlicher Weise könnte nun bei den übrigen Netzteilungen vorgegangen werden. Der Kürze halber wird aber im folgenden von obigem Ergebnis Gebrauch gemacht. Der kleinstmögliche Zahlenwert ψ bei Nullsetzung der Determinante der Tafel 6 ist gleich 6,2206, womit sich der kritische Wert k' zu $6{,}2206 \cdot \frac{2 \cdot 16}{\pi^2} = 20{,}169$ ergibt.

Tafel 4.

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1.	$+22$	-8	$+1$	-8	$+2-\psi$	0	$+1$	0	0
2.	-8	$+21$	-8	$+2+\psi$	-8	$+2-\psi$	0	$+1$	0
3.	$+1$	-8	$+22$	0	$+2+\psi$	-8	0	0	$+1$
4.	-8	$+2-\psi$	0	$+21$	-8	$+1$	-8	$+2-\psi$	0
5.	$+2-\psi$	-8	$+2+\psi$	-8	$+20$	-8	$+2+\psi$	-8	$+2-\psi$
6.	0	$+2-\psi$	-8	$+1$	-8	$+21$	0	$+2+\psi$	-8
7.	$+1$	0	0	-8	$+2+\psi$	0	$+22$	-8	$+1$
8.	0	$+1$	0	$+2-\psi$	-8	$+2+\psi$	-8	$+21$	-8
9.	0	0	$+1$	0	$+2-\psi$	-8	$+1$	-8	$+22$

Tafel 5.

$w_1 + w_9$	$w_2 + w_8$	$w_3 + w_7$	$w_4 + w_6$	w_5	$w_4 - w_6$	$w_3 - w_7$	$w_2 - w_8$	$w_1 - w_9$
$+44$	-16	$+4$	-16	$+2(2-\psi)$	0	0	0	0
-16	$+44$	-16	$+8$	-16	0	0	0	0
$+4$	-16	$+44$	-16	$+2(2+\psi)$	0	0	0	0
-16	$+8$	-16	$+44$	-16	0	0	0	0
$+2(2-\psi)$	-16	$+2(2+\psi)$	-16	$+20$	0	0	0	0
0	0	0	0	0	$+40$	$+16$	$+4\psi$	-16
0	0	0	0	0	$+16$	$+44$	-16	0
0	0	0	0	0	$+4\psi$	-16	$+40$	-16
0	0	0	0	0	-16	0	-16	$+44$

Tafel 6.

w_1	w_2	w_3	w_5
$+22$	-16	$+2$	$+2-\psi$
-8	$+26$	-8	-8
$+2$	-16	$+22$	$+2+\psi$
$+2(2-\psi)$	-32	$+2(2+\psi)$	$+20$

3. Näherung: Teilung $n = 5$ (Bild 5).

Unter Berücksichtigung des Vorhergesagten werden die einzelnen Punkte entsprechend numeriert. Das Gleichungssystem der sechs unbekannten w-Ordinaten zeigt Tafel 7. Hieraus ermittelt sich ψ zu 3,397. Somit beträgt der kritische Wert:

$$k' = 3{,}397 \cdot \frac{2 \cdot 25}{\pi^2} = 17{,}209.$$

Tafel 7.

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6
1.	+ 22	— 16	+ 2	0	+ 2 — ψ	0
2.	— 8	+ 23 + ψ	— 8	+ 1	— 8	+ 3 — ψ
3.	+ 1	— 8	+ 23 — ψ	— 8	+ 3 + ψ	— 8
4.	0	+ 2	— 16	+ 22	0	+ 2 + ψ
5.	+ 2 — ψ	— 16	+ 2 (3 + ψ)	0	+ 22 — ψ	— 16
6.	0	+ 2 (3 — ψ)	— 16	+ 2 + ψ	— 16	+ 22 + ψ

daß ein dem mathematischen naheliegender Wert durchaus hinreichend ist. Es zeigte sich, daß hier der von Burchard[26]) benutzte Grenzübergang auch brauchbare Ergebnisse liefert. Die von Burchard benutzte Funktion $k' = k'_\infty + \frac{C}{n^a}$, worin C, a und k'_∞ Konstante sind, schmiegt sich der in Bild 6 aufgetragenen Kurve gut an. Zur Bestimmung der Konstanten sind nur drei Punkte notwendig. Die restlichen können zum Vergleich dienen. Die Funktion ermittelt sich zu:

$$k' = 14{,}7404 + \frac{642{,}9375}{n^{3{,}4561}}.$$

Tafel 8.

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1.	+ 22	— 16	+ 2	0	0	+ 2 — ψ	0	0	0
2.	— 8	+ 23 + ψ	— 8	+ 1	0	— 8	+ 3 — ψ	0	0
3.	+ 1	— 8	+ 21	— 8	+ 1	+ 2 + ψ	— 8	+ 2 — ψ	+ 1
4.	0	+ 1	— 8	+ 23 — ψ	— 8	0	+ 3 + ψ	— 8	0
5.	0	0	+ 2	— 16	+ 22	0	0	+ 2 + ψ	0
6.	+ 2 — ψ	— 16	+ 2 (2 + ψ)	0	0	+ 20	— 16	+ 2	+ 2 — ψ
7.	0	+ 3 — ψ	— 8	+ 3 + ψ	0	— 8	+ 25	— 8	— 8
8.	0	0	+ 2 (2 — ψ)	— 16	+ 2 + ψ	+ 2	— 16	+ 20	+ 2 + ψ
9.	0	0	+ 4	0	0	+ 2 (2 — ψ)	— 32	+ 2 (2 + ψ)	+ 20

Tafel 9.

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}
1.	+ 22	— 16	+ 2	0	0	0	+ 2 — ψ	0	0	0	0	0
2.	— 8	+ 23 + ψ	— 8	+ 1	0	0	— 8	+ 3 — ψ	0	0	0	0
3.	+ 1	— 8	+ 21	— 8	+ 1	0	+ 2 + ψ	— 8	+ 2 — ψ	0	+ 1	0
4.	0	+ 1	— 8	+ 21	— 8	+ 1	0	+ 2 + ψ	— 8	+ 2 — ψ	0	+ 1
5.	0	0	+ 1	— 8	+ 23 — ψ	— 8	0	0	+ 3 + ψ	— 8	0	0
6.	0	0	0	+ 2	— 16	+ 22	0	0	0	+ 2 + ψ	0	0
7.	+ 2 — ψ	— 16	+ 2 (2 + ψ)	0	0	0	+ 20	— 16	+ 2	0	+ 2 — ψ	0
8.	0	+ 3 — ψ	— 8	+ 2 + ψ	0	0	— 8	+ 22 + ψ	— 8	+ 1	— 8	+ 3 — ψ
9.	0	0	+ 2 — ψ	— 8	+ 3 + ψ	0	+ 1	— 8	+ 22 — ψ	— 8	+ 3 + ψ	— 8
10.	0	0	0	+ 2 (2 — ψ)	— 16	+ 2 + ψ	0	+ 2	— 16	+ 20	0	+ 2 + ψ
11.	0	0	+ 2	0	0	0	+ 2 — ψ	— 16	+ 2 (3 + ψ)	0	+ 22 — ψ	— 16
12.	0	0	0	+ 2	0	0	0	+ 2 (3 — ψ)	— 16	+ 2 + ψ	— 16	+ 22 + ψ

4. Näherung: Teilung $n = 6$.

Unbekannt sind neun Beulflächenordinaten (Tafel 8). Die Koeffizientendeterminante liefert $\psi = 2{,}2008$, und somit ist

$$k' = 2{,}2008 \cdot \frac{2 \cdot 36}{\pi^2} = 16{,}055.$$

5. Näherung: Teilung $n = 7$.

Die in Tafel 9 dargestellte 12gliedrige Determinante ergibt als kleinsten ψ-Wert 1,5622 und somit den kritischen Wert:

$$k' = 1{,}5622 \cdot \frac{2 \cdot 49}{\pi^2} = 15{,}512.$$

Hiermit wird die Untersuchung abgeschlossen, denn mit 36 Ordinaten ist die Beulfläche schon sehr gut festgelegt, wie auch die verhältnismäßig gute Konvergenz (Bild 6) zeigt.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Zahlenwerte bis auf die letzte Dezimale genau bestimmt wurden. Trotz mehrmaligen Durchrechnens der Determinanten ist es kaum möglich, genau Null als Endergebnis zu erhalten. Dies ist aber bei der hier erforderlichen Stellenzahl der ψ-Werte auch nicht notwendig. Die Widersprüche, die meistens noch hohe Zahlenwerte sind, haben ihre Ursache in der großen Empfindlichkeit der Determinanten.

3. Grenzübergang: Bestimmung von k.

In Bild 6 sind sämtliche k'-Werte aufgetragen. Die hyperbelähnliche Kurve strebt von oben einem Grenzwert zu. Um $k'_\infty = k$ zu finden, muß die Annahme einer geeigneten Kurve gemacht werden, die sich asymptotisch einem wahrscheinlichen Grenzwert nähert. Wie schon früher zum Ausdruck gebracht, erlauben es die praktischen Verhältnisse,

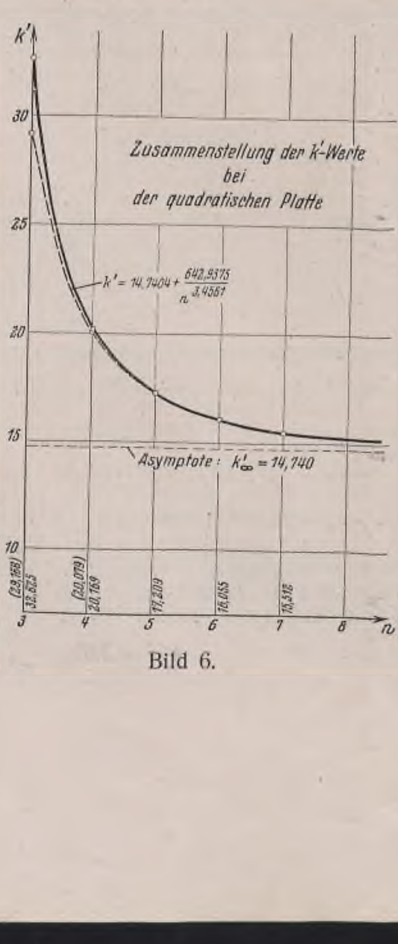


Bild 6.

Hiernach ist der gesuchte kritische Wert der quadratischen Platte für $n \to \infty$ $k = 14{,}7404$. Das ist der Wert, dem eine Netzunterteilung mit unendlich viel Maschen entspricht. Die Abweichung der beiden Kurven bei $n = 3$ und $n = 4$ (Bild 6) ist im ganzen betrachtet nur gering.

4. Beulform der quadratischen Platte.

Mit Hilfe der Knotengleichungen lassen sich die Beulflächenordinaten ermitteln. Homogene Gleichungssysteme haben bekanntlich unendlich viele Wertsysteme. Um diese Unbestimmtheit hinsichtlich der Lösungen zu beseitigen, werden alle Gleichungen durch eine der Unbekannten dividiert. Auf diese Weise erhält man das Bild der Beulform; die absolute Durchbiegung der Platte läßt sich mit Hilfe der benutzten



Bild 7.

Differentialgleichung nicht ermitteln. Bild 7 zeigt das Ergebnis, das durch Auflösung der 12 Gleichungen unter Berücksichtigung des genauen ψ-Wertes gewonnen wurde. Deutlich tritt, wie schon bei den ersten beiden Näherungen erläutert wurde, die Symmetrie zu beiden Diagonalen in Erscheinung.

III. Die rechteckige Platte ($\alpha = 2{,}00$).

Die Untersuchung der rechteckigen Platte gestaltet sich in ähnlicher Weise wie die der quadratischen.

1. Aufstellen der Differenzengleichung.

Von den mannigfachen Netzformen hinsichtlich des Teilungsverhältnisses sei hier diejenige gewählt, deren Verhältnis ebenfalls 2 : 1 beträgt. Somit ist (Bild 8) $\lambda_y = \frac{\lambda_x}{2}$ und $n = \frac{a}{\lambda_x} = \frac{b}{\lambda_y}$. In Anlehnung an die unter II, 1 benutzte Schreibweise ist hier bei einem beliebigen Punkt k zu setzen:

$$\frac{\partial w}{\partial x} \to \frac{w_l - w_i}{2\lambda_x} \qquad \frac{\partial w}{\partial y} \to \frac{w_n - w_m}{2\lambda_y}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \to \frac{w_i - 2w_k + w_l}{\lambda_x^2} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \to \frac{w_m - 2w_k + w_n}{\lambda_y^2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} \to \frac{(w_o + w_r) - (w_p + w_q)}{4\lambda_x \lambda_y}$$

$$\nabla^2\nabla^2 w \to \frac{1}{\lambda_x^4}\left[134\, w_k - 20(w_i + w_l) - 80(w_m + w_n) + 8(w_o + w_p + w_q + w_r) + (w_s + w_t) + 16(w_u + w_v)\right].$$

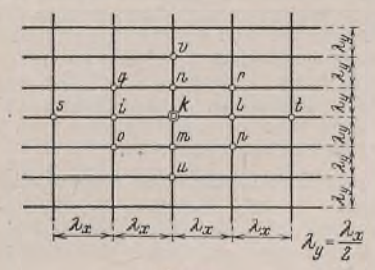


Bild 8.

Weiterhin ist:

$$k \cdot \frac{2\pi^2}{b^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} \to \frac{4k\pi^2}{\lambda_x^4 n^2}(w_o + w_r - w_p - w_q).$$

Indem wir $\frac{4k\pi^2}{n^2} = \psi$ setzen, erhalten wir die Knotengleichung zu:

$$134\, w_k - 20(w_i + w_l) - 80(w_m + w_n) + 8(w_o + w_p + w_q + w_r) + (w_s + w_t) + 16(w_u + w_v) - \psi(w_o + w_r - w_p - w_q) = 0.$$

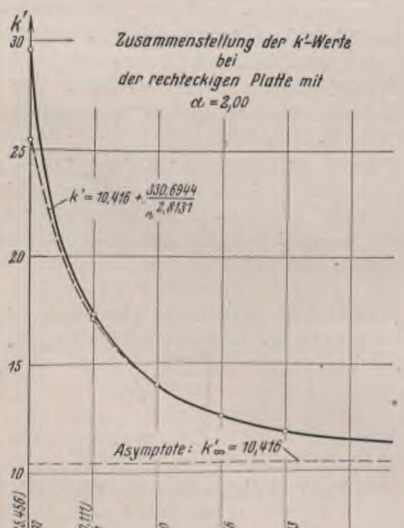


Bild 9.

Diese Knotengleichung ergibt ebenfalls bei einem zugrunde gelegten Netz ein System homogener Gleichungen, deren Koeffizientendeterminante, gleich Null gesetzt, die Beulbedingung liefert, welche schließlich die Ermittlung von ψ und k' gestattet. Die Berücksichtigung der Randbedingungen geschieht in gleicher Weise wie bei der quadratischen Platte.

2. Ermittlung der k'-Werte der rechteckigen Platte.

Erschwert wird die Untersuchung hier gegenüber der quadratischen Platte dadurch, daß nicht derartig günstige Vereinfachungen auf Grund der Beulfläche getroffen werden können; denn wie auch hier an Hand der ersten beiden Näherungen leicht festgestellt werden kann, besitzt die ausgebeulte Platte zwei antimetrisch gelegene größere Beulen. Somit kann also hier nur die Symmetrie zu einer Mittelachse ausgenutzt werden. Da das Ansetzen der Knotengleichungen und die Ausrechnung der Determinanten sich in angenähert gleicher Form vollzieht wie bei der quadratischen Platte, so sei hier die Wiedergabe nur auf die Ergebnisse beschränkt. In der Tafel 10 sind die ermittelten Ergebnisse bis zur fünften Näherung übersichtlich zusammengestellt.

Tafel 10.

Näherung	Teilung	Ordnung der Determinante (Beulbedingung)	ψ	$k' = \psi \cdot \frac{n^2}{4\pi^2} =$
1.	$n = 3$	2.	129,8037	29,5917
2.	$n = 4$	4.	42,6873	17,3005
3.	$n = 5$	8.	22,0921	13,990
4.	$n = 6$	12.	13,7692	12,556
5.	$n = 7$	18.	9,5095	11,803

Mit der fünften Näherung wurde die Untersuchung abgeschlossen; denn bei der nächsten Näherung hätte man schon eine 24gliedrige Determinante zu lösen, was mit einem ungemein großen Rechenaufwand verbunden wäre.

In Bild 9 sind die ermittelten k'-Werte aufgetragen. Im Vergleich zur quadratischen Platte ist hier die Konvergenz nicht so günstig. Trotzdem die gleiche Anzahl Punkte zur Festlegung der Beulform zur Verfügung steht, begründet sich die etwas bessere Konvergenz bei der quadratischen Platte damit, daß die Beulfläche einfacher in der Form ist und daß im Vergleich weniger Punkte erforderlich sind, um die Fläche eindeutig festzulegen. Die in Bild 9 angegebenen k'-Werte wurden mit der gleichen Genauigkeit wie bei der quadratischen Platte ermittelt.

3. Grenzübergang: Bestimmung von k.

Der Grenzübergang wird unter Zugrundelegung der gleichen Funktion vorgenommen. Sie lautet hier:

$$k' = 10{,}416 + \frac{330{,}6944}{n^{2,8131}}$$

und liefert uns für $n \to \infty$

$$k = 10{,}416.$$

Dieser Wert ist naturgemäß auch hier infolge der willkürlichen Annahme der Funktion nur ein wahrscheinlicher. Die Abweichung der Funktion von den errechneten k'-Werten bei $n = 3$ und $n = 4$ — in Bild 9 gestrichelt eingetragen — ist verhältnismäßig gering.

4. Beulform der rechteckigen Platte.

Mit Hilfe der fünften Näherungsrechnung werden die Beulflächenordinaten errechnet, die dann das Auftragen der Beulfläche (Bild 10) ermöglichen. Im Gegensatz zur quadratischen Platte treten hier in erster Linie zwei antimetrisch gelegene und quer zur Druckrichtung gelegene Beulen auf.

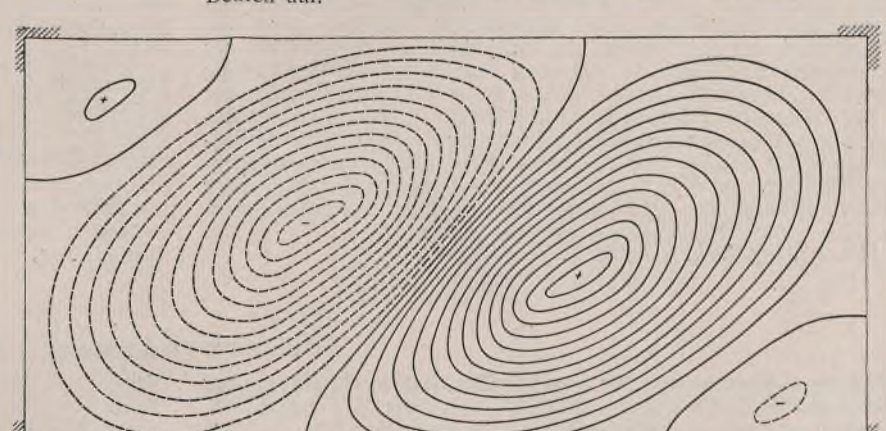


Bild 10.

IV. Zusammenfassung der Ergebnisse.

Nach Seydel[19]) beträgt für die unendlich lange, an den Längsrändern eingespannte Platte $k = 8{,}96$. Die ermittelten Werte für $\alpha = 1{,}0$ und $2{,}0$ ermöglichen uns in Verbindung mit den beiden Bedingungen, daß für $\alpha \to \infty$ sich $k \to 8{,}96$ und für $\alpha \to 0$ sich $k \to \infty$ nähert, sämtliche k-Werte mit praktisch hinreichender Genauigkeit festzulegen (Bild 11). Im gleichen Bilde sind auch die Ergebnisse von Cox und Iguchi[27]) eingetragen. Wie schon in der Einleitung bemerkt, veröffentlichte letzterer kurze Zeit nach Fertigstellung dieser Untersuchung eine Berechnung der allseits eingespannten Platte, in der er die Differentialgleichung durch einen Näherungsansatz zu lösen sucht. Er benutzte eine w-Funktion, die die zusammengesetzte trigonometrische Reihe

[27]) Iguchi, Ing.-Arch. 1938, S. 1.

$$w = \sum_m \sum_n A_{mn}$$

$$\cdot \left[\frac{c_m}{3} \left(\frac{x^3}{a^3} - \frac{x}{a} \right) - \frac{c_m'}{3} \left(\frac{x^3}{a^3} - \frac{3\,x^2}{a^2} + \frac{2\,x}{a} \right) + \frac{1}{m\,\pi} \cdot \sin \frac{m\,\pi}{a}\, x \right]$$

$$\cdot \left[\frac{d_n}{3} \left(\frac{y^3}{b^3} - \frac{y}{b} \right) - \frac{d_n'}{3} \left(\frac{y^3}{b^3} - \frac{3\,y^2}{b^2} + \frac{2\,y}{b} \right) + \frac{1}{n\,\pi} \cdot \sin \frac{n\,\pi}{b}\, y \right]$$

$$(m,\ n = 1,\ 2,\ 3\ \ldots)$$

ist, in der die Größen c_m, c_m', d_n, d_n' Konstante sind, die jeweils nach Art der Auflagerung gewählt werden. Bei allseitiger Einspannung betragen sie:

$$c_m = -1 - 2\,(-1)^m \qquad c_m' = 2 + (-1)^m$$

$$d_n = -1 - 2\,(-1)^n \qquad d_n' = 2 + (-1)^n.$$

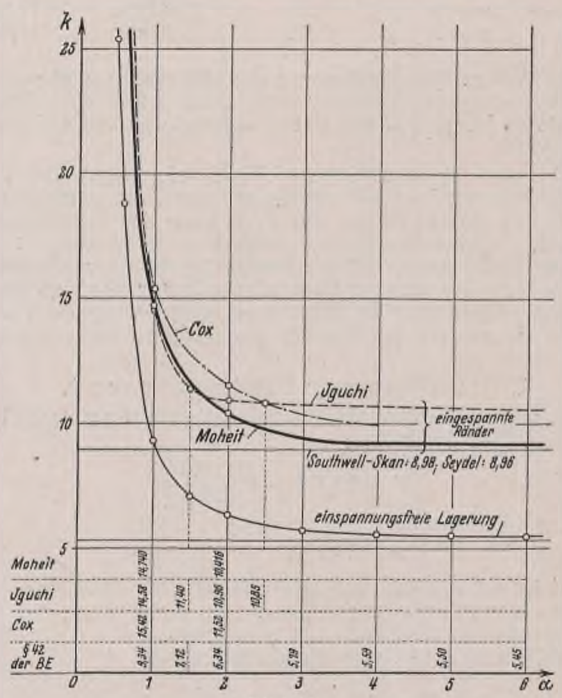


Bild 11.

Wie bei allen Ansätzen dieser Art erhält man auch immer nur Näherungslösungen, die um so genauer sind, je mehr $m\,n$-Glieder berücksichtigt werden. Nach Bild 11 weisen aber die von Iguchi ermittelten Werte bei Seitenverhältnissen $\alpha > 1{,}5$ gewisse Abweichungen gegenüber den hier ermittelten Ergebnissen auf. Irgendwelche Angaben über den Genauigkeitsgrad der Konvergenz wurden jedoch von Iguchi bei der allseits eingespannten Platte in der oben angeführten Veröffentlichung nicht gemacht. Ermittelte Iguchi für $\alpha = 1{,}0$ $k = 14{,}58$, so wurde hier mittels der Differenzenrechnung $k = 14{,}74$ errechnet, was mit einer Abweichung von $1{,}09\,\%$ eine gute Übereinstimmung darstellt. Beim Seitenverhältnis $\alpha = 2{,}0$ beträgt aber die Abweichung $4{,}93\,\%$ nach entgegengesetzter Richtung. In einer Ergänzung[28]) bringt Iguchi Beulflächen für die Seitenverhältnisse $\alpha = 1{,}0$ bis $2{,}0$. Diese Beulflächen werden hauptsächlich durch eine größere Beule mit zwei Knotenlinien gekennzeichnet. Bei $\alpha = 1{,}0$ stimmt die Beulfläche mit der von mir ermittelten (s. Bild 7) gut überein, während sich im Widerspruch zu Iguchi nach meiner Untersuchung bei $\alpha = 2{,}0$ (s. Bild 10) zwei größere Beulen mit drei Knotenlinien ergeben, was auch durch Versuche bestätigt wurde (vgl. Original). Hierin ist die Ursache des Unterschiedes bei den oben besprochenen k-Werten für $\alpha = 2{,}0$ zu suchen.

Die von Cox angegebenen Werte liegen durchweg höher als die hier und von Iguchi errechneten.

Bei der Bemessung der Hauptträger vollwandiger Brücken interessieren im allgemeinen nur Seitenverhältnisse bis etwa $\alpha = 2{,}0$. Bis zu dieser Grenze zeigen aber die beiden erstgenannten Kurven verhältnismäßig gute Übereinstimmung.

In Bild 11 sind weiterhin die k-Werte bei Annahme einspannungsfreier Lagerung aufgetragen, wie sie sich auf Grund des § 42 der Berechnungsgrundlagen stählerner Eisenbahnbrücken der Deutschen Reichsbahn ergeben. Hiernach ist bei $\alpha > 1$: $k = 5{,}34 + \frac{4{,}00}{\alpha^2}$ und $\alpha < 1$: $k = 4{,}00 + \frac{5{,}34}{\alpha^2}$ zu setzen. Man erkennt, daß der Einfluß allseitiger Einspannung nicht zu unterschätzen ist. Beim Seitenverhältnis $\alpha = 1{,}0$ beträgt der Zuwachs des Beulwertes $57{,}7\,\%$ und bei $\alpha = 2{,}0$ sogar $64{,}3\,\%$. Das günstigere Ergebnis bei letztgenanntem Seitenverhältnis kann damit begründet werden, daß der Zwang zum Ausbeulen der Platte infolge der vorgeschriebenen Knotenlinie größer sein muß. Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, daß Seydel[7]) die Halbwellenlänge bei der unendlich langen Platte mit einspannungsfrei gelagerten Rändern zu $l = 1{,}25\,b$ und bei eingespannten Rändern zu $l = 0{,}8\,b$ bestimmte. Aussteifungen erzielen im Hinblick auf die Stabilität eines Bleches erst dann eine gute Wirkung, wenn sie vollkommen neue Knotenlinien erzwingen.

Bei Annahme allseitiger Einspannung können also die Aussteifungen in größeren Abständen gesetzt werden. So beult z. B. eine unendlich lange Platte mit eingespannten Rändern etwa bei der gleichen kritischen Schubspannung aus wie eine einspannungsfrei gelagerte, quadratische Platte von gleicher Höhe.

Alle Betrachtungen hatten zur Voraussetzung, daß das Hookesche Gesetz unbegrenzt gilt und somit das Ausbeulen im elastischen Bereich stattfindet. Irgendwelche Untersuchungen über das Ausbeulen im plastischen Bereich, wie sie beim Knickstab erstmals von Engeßer und Kármán durchgeführt wurden, bestehen heute erst bei verschiedenen Sonderfällen. Lediglich bei homogenen Spannungszuständen und bei Voraussetzung der Isotropie des Werkstoffs auch oberhalb der Proportionalitätsgrenze läßt sich zeigen, daß die Differentialgleichung für die Plattenbeulung auch im unelastischen Bereich gültig ist, wenn nur für die Plattensteifigkeit D ein Wert D' eingesetzt wird, der dem Verlauf der tatsächlichen Gestaltänderungs-Spannungs-Linie entspricht[29]). Für inhomogene Spannungszustände ist diese Frage dagegen noch offen. In beiden Fällen geht man näherungsweise nach den Beulvorschriften so vor, daß man zur Abminderung der kritischen Vergleichsspannung $\sigma_{v\,k}$ einen Vergleichsschlankheitsgrad ermittelt und diesem entsprechend mit der abgeminderten Knickspannung σ_k als $\sigma_{v\,k}'$ weiter rechnet. Der Beweis, ob dieser Vergleich insbesondere bei inhomogenen Spannungszuständen berechtigt ist, ist heute noch nicht erbracht.

Solange das Ausbeulen im elastischen Bereich liegt, treten nur der Elastizitätsmodul E und die Querkontraktionsziffer μ als einzige Materialkonstanten auf. Diese sind aber bei St 37 und St 52 praktisch gleich. Somit ist — theoretisch gesehen — mit Blechen aus St 52 im elastischen Bereich kein Vorteil zu erwarten.

[28]) Iguchi, Ing.-Arch. 1939, S. 77.

[29]) Roš u. Eichinger, Vorbericht des Pariser Kongresses der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau 1932, S. 146. — Schleicher, Bauing. 1939, S. 217.

Verschiedenes.

DIN 4100 — Vorschriften für geschweißte Stahlhochbauten. Der Reichsarbeitsminister. IV 2 Nr. 9603/43/40. Berlin, den 6. Februar 1940. Unter Aufhebung meines Runderlasses vom 10. November 1938 — IV c 4 Nr. 8610a 72 — über das Schweißen von Baustahl St 52 wird auf Grund der inzwischen durchgeführten Erhebungen der § 2 Ziffer 1 der obengenannten Vorschriften durch folgende Fassung ersetzt:

„Als Werkstoff darf nur St 37.12 und St 37.21 (nach DIN 1612 und 1621) und St 52 nach den Vorschriften[1]) der Deutschen Reichsbahn verwendet werden[2]). St 52 in Dicken $\geqq 30$ mm ist nur von Werken zu verwenden, die auf Grund besonderer Prüfung von der Deutschen Reichsbahn zugelassen[3]) sind.

Bei St 37.12 kommt Thomasstahl für Breitflachstahl, Gurtplatten mit Stegansatz, bei Nasenprofilen u. dgl. nur in Betracht, wenn die Dicke $\leqq 25$ mm ist, bei sonstigen Walzwerkerzeugnissen bis 50 mm Dicke.

Bleche aus St 37.21 dürfen nur bei Dicken $\leqq 20$ mm in Thomasgüte verwendet werden.

Werden ausnahmsweise Gurtplatten (auch solche mit Stegansätzen usw.) verwendet, die dicker als 30 mm sind, so müssen diese den Sondervorschriften der Deutschen Reichsbahn für dicke Gurtplatten[1]) entsprechen. Das Zeugnis über das Ergebnis der dort vorgeschriebenen Aufschweißbiegeversuche ist bei Bauten aus St 37.12 und aus St 52 den Baugenehmigungsbehörden vorzulegen. Ich bitte, ihre nachgeordneten Behörden entsprechend zu unterrichten." Im Auftrag: Durst.

[1]) Zu beziehen vom Reichsbahn-Zentralamt Berlin, Hallesches Ufer 76.

[2]) Bei der Stahlbestellung ist anzugeben, daß der Stahl für geschweißte Bauteile verwendet werden soll.

[3]) Auskunft erteilt hierüber das Reichsbahn-Zentralamt Berlin, Dezernat 79.

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt.
Verlag: Wilhelm Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W 9.
Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

DER STAHLBAU

Schriftleitung:
Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule
Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599
Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61
Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage zur Zeitschrift **DIE BAUTECHNIK** Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

13. Jahrgang — BERLIN, 3. Mai 1940 — Heft 10/11

Gegenseitige Beeinflussung der Beanspruchungen durch Eigengewicht, Verkehrslast und Wärmeschwankungen bei Berücksichtigung der Verformung von Hängebrücken.

Von Abteilungspräsident Dr.-Ing. **Friedrich Wilhelm Krabbe†**, Hamburg[1]).

Im Stahlbau 1939, Heft 10, habe ich den Einfluß der Verformung auf die Beanspruchung von Tragwerken behandelt und mich dabei zunächst auf die Beanspruchungen infolge der Verkehrslast beschränkt, die das Ausschlaggebende dabei sind. Es wird sich jedoch zeigen, daß auch die Beanspruchungen aus Eigengewicht und Wärmeschwankungen nicht nur auch durch die Verformung beeinflußt werden, sondern daß dabei die Beanspruchungen aus Eigengewicht, Verkehrslast und Wärmeschwankungen sich gegenseitig beeinflussen. Die folgenden Untersuchungen darüber sollen sich auf Hängebrücken beschränken.

1. Eigengewicht und Verkehrslast.

Hängebrücken pflegt man so zu montieren, daß das Kabel das ganze Eigengewicht aufnimmt, der Versteifungsträger also durch Momente aus dem Eigengewicht nicht beansprucht wird. Daraus kann aber nicht gefolgert werden, daß bei durch Verkehrslast und Wärmeschwankungen verformter Brücke das Eigengewicht ohne Einfluß auf die Momente des Versteifungsträgers sei. Das ist besonders deshalb wichtig, weil ja bei großen Hängebrücken das Eigengewicht ein Vielfaches der Verkehrslast beträgt. Wir wollen die Untersuchungen der Übersichtlichkeit halber zunächst auf die einfache Hängebrücke (Bild 1a) beschränken.

Belasten wir diese mit der gleichmäßig über den ganzen Träger verteilten Last, die gleich dem Eigengewicht ist, so biegt sich der Versteifungsträger natürlich durch und wird dabei durch positive Momente beansprucht. Dementsprechend ist auch bei den Einflußflächen, die auf Grund der bei Belastung nur durch Eigengewicht bestehenden Systemform ermittelt sind, der positive Teil der Einflußfläche etwas größer als der negative Teil, denn sonst würden ja diese Einflußlinien für zusätzliche, gleichmäßig verteilte Belastung überhaupt keine Momente im Versteifungsträger ergeben (Bild 1b, ausgezogene Linie). Diese Einflußlinien gelten aber, streng genommen, nur für den lediglich durch sein Eigengewicht belasteten Träger. Auch schon aus diesem Grunde muß der positive Teil überwiegen, denn die vom Eigengewicht nicht belastete Brücke hatte natürlich im Versteifungsträger eine Vorspannung durch negative Momente. Diese Vorspannung im Punkte m wird durch den Unterschied des positiven und negativen Teils der Einflußfläche für M_m aufgehoben; der Träger ist bei Belastung nur durch Eigengewicht spannungslos.

Denken wir uns nun die Brücke mit dem negativen Eigengewicht, also durch von unten nach oben gerichtete Kräfte belastet, im ganzen also gänzlich unbelastet, so nimmt sie ihre ursprüngliche Form an, wobei der Versteifungsträger mit negativen Momenten vorbelastet ist. Für den so gedachten Zustand ist zur Ermittlung der richtigen Einflußlinie die ursprüngliche Gestalt der Brücke maßgebend, wobei die positive Einflußfläche gleich der negativen Einflußfläche sein muß, denn der Träger bekommt ja, abgesehen von seiner künstlichen Vorspannung, keine Momente. Die Einflußlinie für diesen unverformten Zustand des Trägers ist also durch die gestrichelte $H y_m$-Linie bestimmt, die so gelegt ist, daß positive und negative Einflußfläche einander gleich sind. Die $H y_m$-Fläche hat sich also infolge der Belastung durch Eigengewicht um die schraffierte Fläche verkleinert, deren Ordinate wir mit

(1) $$\Delta\eta_r = \eta_{ro} - \eta_{re}$$

bezeichnen wollen.

Durch die gestrichelte $H y_m$-Linie ist also die „echte Einflußlinie" für das gänzlich unbelastete System, durch die ausgezogene $H y_m$-Linie die echte Einflußlinie für das mit dem Eigengewicht belastete System gegeben. In allen Fällen ist natürlich zur Ermittlung des wirklichen Moments M_m die schraffierte Fläche als konstanter Wert abzuziehen, womit eben die Vorspannung berücksichtigt wird.

Belasten wir nun die unter Einwirkung des Eigengewichts stehende Brücke mit einer weiteren, gleichmäßig verteilten Belastung, die gleich dem Eigengewicht ist, so wird sich die $H y_m$-Linie weiter nach oben verschieben, und zwar entsprechend früheren Ermittlungen um das Maß

(2) $$\Delta\eta_r \cdot \frac{\eta_{re}}{\eta_{ro}} = (\eta_{ro} - \eta_{re})\,\frac{\eta_{re}}{\eta_{ro}}$$

(strichpunktiert gezeichnet). Sie bestimmt die echte Einflußlinie für das mit dem doppelten Eigengewicht belastete ursprüngliche System. Sie gilt sowohl für Eigengewicht als auch für die Zusatzbelastung, wobei aber für das Eigengewicht allein wiederum der durch die schraffierte Fläche gegebene konstante Wert abzuziehen ist. Der Einfluß des Eigengewichts hat sich also durch die weitere Belastung verändert. Der positive Anteil ist größer, der negative kleiner geworden; d. h. das Eigengewicht für sich ergibt im Falle der Vollbelastung ein größeres positives Moment wie bei der unbelasteten Brücke. Wenn auch der Unterschied nicht sehr groß sein wird, so ist er doch bei der überwiegenden Größe des Eigengewichts gegenüber der Verkehrslast beachtlich.

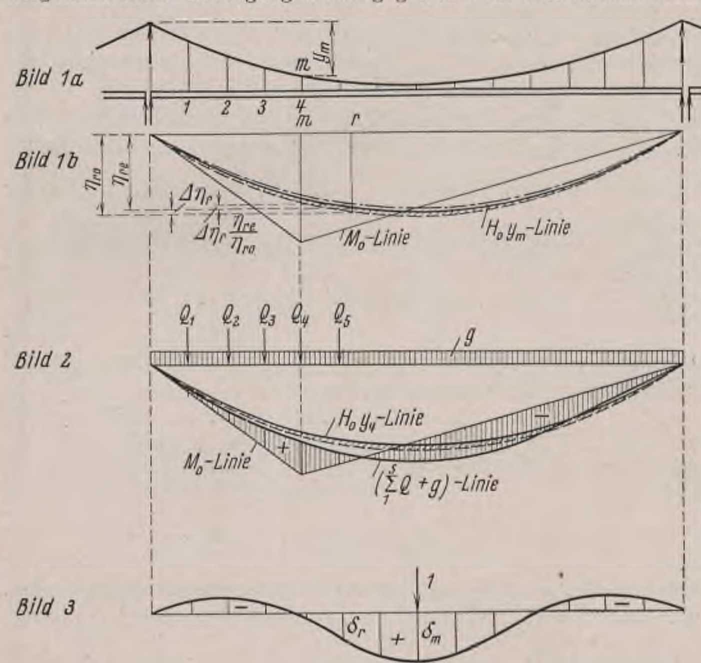


Bild 1 bis 3.

Ist, wie bei großen Hängebrücken immer, die volle Verkehrslast nur $\frac{1}{n}$ des Eigengewichts, so ist die Verschiebung der $H y_m$-Linie

(2a) $$\frac{1}{n}\cdot\Delta\eta_r\cdot\frac{\eta_{re}}{\eta_{ro}-\frac{1}{n}\cdot\Delta\eta_r}.$$

Es verändert sich aber auch, was zu beachten ist, der Einfluß des Eigengewichts auf den Kabelzug, denn die $H y_m$-Fläche ist kleiner geworden; da aber y_m größer geworden ist infolge der Durchbiegung, ist die H-Fläche erst recht kleiner geworden.

Betrachten wir nun die Entwicklung der für max M_4 gültigen echten $H y_m$-Linie nach Bild 15 meiner früheren Abhandlung, so ist zu beachten, daß damit nicht allein der Belastungs- und Verformungszustand durch die Verkehrslast Q_1 bis Q_5, sondern dazu der Belastungs- und Verformungszustand durch das Eigengewicht erfaßt ist, denn die $H_0 y_4$-Linie ist ja

[1]) Die Druckfahnen dieses Aufsatzes sind nach dem Tode des Verfassers von Herrn Dipl.-Ing. Krabbe, Mainz, durchgesehen worden.

bereits die echte Einflußlinie für die mit dem Eigengewicht belastete und dementsprechend verformte Brücke. Wir brauchen also nur die zuletzt gefundene (1 + 2 + 3 + 4 + 5)-Linie auf die ganze Trägerlänge auszudehnen (was natürlich voraussetzt, daß auch die früheren Linien so weit ausgedehnt wurden) und haben dann die für **Eigengewicht und Verkehrslast** gültige Einflußlinie für $\max M_4$, wobei der positive Teil mit $\sum_1^5 Q + g$, der negative Teil dagegen nur mit g zu belasten ist; an der Belastungsscheide ändert sich dadurch nichts. Wir erhalten dann eine Einflußlinie etwa nach Bild 2, wobei wiederum für Eigengewicht der durch die schraffierte Fläche gegebene Wert noch abzuziehen, d. h. negativ einzuführen ist.

Man wird nun der Umständlichkeit der Rechnung wegen im allgemeinen darauf verzichten müssen, die Verkehrslasten Q_1 bis Q_5 einzeln aufzubringen, sondern man wird die gesamte Verkehrslast p gemeinsam aufbringen, wie das von mir früher bereits angedeutet wurde. Die sich dabei ergebende endgültige Hy-Linie bezeichnen wir dann als die $H_1(y + \delta_{ip})$-Linie, wobei δ_{ip} die lotrechte Verschiebung des Punktes i infolge der Verkehrslast bedeutet. Die neue Belastungsscheide ergibt sich auch dann, und es können die Verkehrslasten derselben entsprechend aufgebracht werden, wobei es nichts ausmacht, daß die Verbiegungen des Systems auf Grund einer etwas abweichenden Belastung ermittelt wurden, denn eine erhebliche Verschiebung der Belastungsscheide tritt im allgemeinen nicht ein.

Nun ist aber noch folgendes zu beachten. Es hat sich nämlich durch die Verformung infolge der Verkehrslast nicht nur der Einfluß des Eigengewichts auf die Beanspruchung, sondern auch auf die Durchbiegung geändert, es ist insbesondere die Durchbiegung δ_{ip}, welche die endgültige $H_1(y_i + \delta_{pi})$-Linie bzw. die unterschiedliche Einflußfläche $H_1(y_i + \delta_{ip}) - H_0 y_i$ maßgebend beeinflußt, verändert.

Wir bezeichnen nun mit

δ_{ip} die Senkung des Punktes i unter der Verkehrslast,
δ_i die wirkliche Senkung des Punktes i,
η_{i_0} die Senkung des Punktes i infolge $H = -1$,
η_{i_1} die Senkung des Punktes i infolge $H = -1$ im verformten System,
H_{g_0} den Kabelzug infolge Eigengewichts im unverformten System,
H_{g_1} den Kabelzug infolge Eigengewichts im verformten System.

Vor Aufbringen der Verkehrslast war der Kabelzug H_{g_0} vorhanden, er übte auf die Durchbiegung δ_i den Einfluß $-H_{g_0}\eta_{i_0}$ aus, der aber als Ausgangsstellung angesehen $= 0$ gesetzt wurde. Nach Aufbringen der Verkehrslast ist der Kabelzug H_{g_1} vorhanden; er würde auf die Durchbiegung δ_i den Einfluß $-H_{g_1}\eta_{i_1}$ haben, wenn die Durchbiegung δ_{ip} geblieben wäre. Wir können dafür auch schreiben $-H_{g_1}[\eta_{i_0} + (\eta_{i_1} - \eta_{i_0})]$. Es kann nun bei den kleinen sich für η_{i_1} und η_{i_0} ergebenden Unterschieden (sie betragen praktisch etwa 1 ‰) angenommen werden, daß der Unterschied sich im Verhältnis $\frac{\delta_i}{\delta_{ip}}$ ändert; wir setzen also dafür $(\eta_{i_1} - \eta_{i_0})\frac{\delta_i}{\delta_{ip}}$. Damit wird der Einfluß von H_{g_1} auf die Durchbiegung δ_i

$$-H_{g_1}\left[\eta_{i_0} + (\eta_{i_1} - \eta_{i_0})\frac{\delta_i}{\delta_{ip}}\right].$$

Der Unterschied des Einflusses von H_g auf die Durchbiegung vor und nach Aufbringen der Verkehrslast ist also

$$H_{g_0}\eta_{i_0} - H_{g_1}\left[\eta_{i_0} + (\eta_{i_1} - \eta_{i_0})\frac{\delta_i}{\delta_{ip}}\right];$$

damit wird

$$(3) \qquad \delta_i = \delta_{ip} + (H_{g_0} - H_{g_1})\eta_{i_0} - (\eta_{i_1} - \eta_{i_0})H_{g_1}\cdot\frac{\delta_i}{\delta_{ip}}.$$

Nun hat sich aber auch H_{g_1} infolge der Veränderung von δ_{ip} geändert, und wir können auch hier annehmen, daß der Unterschied $H_{g_0} - H_{g_1}$ sich im Verhältnis $\frac{\delta_i}{\delta_{ip}}$ geändert hat. Wenn wir dann in Gl. (3) schreiben

$$H_{g_1} = H_{g_0} - (H_{g_0} - H_{g_1}),$$

so wird daraus unter Berücksichtigung der Änderung von $H_{g_0} - H_{g_1}$

$$(4) \qquad (H_{g_0} - H_{g_1})\frac{\eta_{i_1} - \eta_{i_0}}{\delta_{ip}^2}\cdot\delta_i^2 - \left[1 - \frac{(H_{g_0} - H_{g_1})\eta_{i_0} - H_0(\eta_{i_1} - \eta_{i_0})}{\delta_{ip}}\right]\delta_i + \delta_{ip} = 0.$$

Bezeichnen wir den Beiwert von δ_i^2 mit α, den von δ_i mit β, so erhalten wir

$$\delta_i = \frac{\beta}{2\alpha} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\delta_{ip}}{\alpha}},$$

wobei in dem vorliegenden Falle nur die negative Wurzel in Frage kommt. Es sind nun die Ordinaten $\varDelta\eta_r$ der $[H_1(y_i + \delta_{pi}) - H_0 y_i]$-Fläche außer dem früher ermittelten Beiwert μ_r mit einem weiteren Beiwert

$$(5) \qquad \mu_{rg} = \frac{\left[h_0 - (h_0 - h_1)\frac{\delta_i}{\delta_{ip}}\right](y_i + \delta_i) - h_0 y_i}{h_1(y + \delta_{ip}) - h_0 y_i}$$

zu vervielfachen, wobei h_0 und h_1 die Ordinaten der aus dem unverformten und dem verformten System ermittelten H-Linie bezeichnen.

Um eine Vorstellung über die Größenordnung zu geben, sei bemerkt, daß sich in einem durchgerechneten Beispiel ergab:

$$\delta_{ip} = 1{,}15 \text{ m} \qquad \delta_i = 0{,}88 \text{ m}$$
$$\mu_r = 1{,}06 \qquad \mu_{rg} = 0{,}730;$$

der gesamte Beiwert wurde also $\mu_r\,\mu_{rg} = 1{,}06 \cdot 0{,}730 = 0{,}776$, so daß also die Ordinaten $\varDelta\eta_r$, die unter dem alleinigen Einfluß der Verformung durch die Verkehrslast größer geworden wären, in Wirklichkeit unter dem erheblichen Einfluß der veränderten Wirkung des Eigengewichts kleiner werden.

Es zeigt sich hier sehr deutlich, daß der Einfluß des Eigengewichts die Durchbiegungen infolge von Verkehrslast abmindert, also die Brücke wesentlich versteift, da δ_i erheblich kleiner als δ_{ip} ist.

Bemerkt sei nun schon hier, daß alle die umständlichen Berichtigungen sowohl durch μ_r als auch durch μ_{rg} überflüssig werden, wenn wir, wie später unter 4 gezeigt wird, die Durchbiegungen nicht rechnerisch, sondern an einem Modell ermitteln, denn dabei wirkt sich der Einfluß des Eigengewichts sowie der Einfluß der Verformung durch die Verkehrslast auf die Durchbiegung von selbst richtig aus.

2. Eigengewicht, Verkehrslast und Wärmeschwankungen.

Bei Hängebrücken wird in der Regel der Versteifungsträger im Schatten der Fahrbahn liegen, das Kabel dagegen freier Sonnenbestrahlung ausgesetzt sein. Es fragt sich also, ob für die Brücke gleichmäßiger Wärmeunterschied von ± 35° oder für das Kabel allein ± 15° gegenüber dem Versteifungsträger anzunehmen ist. Nun wirkt sich aber Erwärmung auf den Versteifungsträger nicht aus, bei durchlaufenden Trägern nur, wenn Ober- und Untergurt verschieden erwärmt werden, was wohl nicht angenommen zu werden braucht. Es ist also anzunehmen, daß ± 35° für die ganze Brücke die ungünstigeren Werte liefern wird.

Wir ermitteln zunächst den Kabelzug H_{tg} für die nur durch Eigengewicht belastete Brücke, sodann für die durch die volle Verkehrslast verbogene Brücke. Für die Berechnung der Verbiegung gehen wir von der Brückenform bei Eigengewicht aus; die Berichtigung erfolgt später. Die Berechnung der Verformung bei voller Verkehrslast ist in diesem Falle sehr einfach. Die in üblicher Weise dargestellten Einflußlinien für die Momente der einzelnen Trägerpunkte ergeben alle einen Überschuß der positiven Anteile, also die Momentenbelastung, welche den Träger aus seiner ursprünglichen Form in die unter dem Eigengewicht bestehende Form gebracht hat. Ist nun die volle Belastung $\frac{1}{n}$ des Eigengewichts, so entstehen hierdurch im Versteifungsträger $\frac{1}{n}$ dieser Momente; aus dieser Momentenbelastung kann die Biegelinie ohne weiteres ermittelt werden.

Der sich dafür ergebende Kabelzug ist $H_{t(g+p)}$, der Unterschied ist

$$H_{t(g+p)} - H_{tg} = \varDelta H_t.$$

Dieser Wert $\varDelta H_t$ ist infolge der Einwirkung der Lasten Q entstanden. Man kann nun annehmen, daß die Wirkung jeder einzelnen Last Q in demselben Verhältnis zu $\varDelta H_t$ beiträgt, in welchem sie die Durchbiegung in der Trägermitte δ_m beeinflußt. Die Einflußlinie für die Durchbiegung δ_m ist in Bild 3 dargestellt; ihre Ordinaten seien δ_r. Der Anteil der einzelnen Lasten Q_r an dem Wert $\varDelta H_t$ ist dann

$$(6) \qquad \eta_r = \delta_r \cdot \frac{\varDelta H_t}{\Sigma\,\delta_r};$$

dem entspricht in einem Punkte i des Trägers ein Moment, welches diese Last infolge der Erwärmung zusätzlich erzeugt hat

$$(7) \qquad M_{\varDelta ti} = y_i\,\eta_r,$$

wobei y_i zunächst auf das ursprüngliche System bezogen ist. Wir können diesen Wert in die Einflußlinie für irgendeinen Punkt i hineinbringen, müssen aber dabei, da ja auf die Einflußfläche die Einzellasten $Q_i + a\,g$ aufgesetzt werden, durch $Q_r + a\,g$ dividieren und erhalten

$$(8) \qquad \eta_{r\varDelta H_t} = \frac{y_i\,\eta_r}{Q_r + a\,g} \quad (a = \text{Feldweiten}).$$

Nun wirkt aber H_{tg} so, daß in einem Punkt i ein Moment entsteht:

$$M_{gt} = H_{tg}\,y_i.$$

Auch dieses kann in die (ja mit $Q_r + a\,g$ zu belastende) Einflußfläche eingesetzt werden. Die Wirkung ist dieselbe, als ob der Inhalt der $H y_i$-Fläche sich um den Wert $\frac{H_t y_i}{Q_r + a\,g}$ vergrößert hätte, wobei man annehmen kann, daß diese Vergrößerung durch eine affine Verschiebung der $H y_i$-

Linie erfolgt. Es müssen dann also die Ordinaten der Hy_i-Linie η_{r_0} mit $\frac{H_t y_i}{Q_r + a g}$ vervielfacht werden, um den Zuwachs der einzelnen Ordinaten zu erhalten. Es ist also

(9) $$\varDelta \eta_{r H_t} = \eta_{r_0} \cdot \frac{H_t y_i}{(Q_r + a g)\mathfrak{F}_0},$$

wobei $\mathfrak{F}_0$ den Inhalt der ursprünglichen $H y_m$-Fläche bedeutet. Insgesamt ist also der Zuwachs der Ordinaten η_{r_0} infolge der Wärmewirkung

(10) $$\varDelta \eta_{r(H_t+\varDelta H_t)} = \varDelta \eta_{r \varDelta H_t} + \varDelta \eta_r H_t = \frac{y_i \eta_r}{Q_r + a g} + \eta_{r_0} \cdot \frac{H_t y_i}{(Q_r + a g)\mathfrak{F}_0}$$

(11) $$\varDelta \eta_{r(H_t+\varDelta H_t)} = \frac{y_i}{Q_r + a g}\left(\eta_r + \eta_{r_0} \cdot \frac{H_t}{\mathfrak{F}_0}\right).$$

Diese Untersuchung ist natürlich für $\varDelta t = \pm 35°$ getrennt durchzuführen, und wir erhalten die beiden Werte

$$\varDelta_+ \eta_{r(H_t+\varDelta H_t)} \text{ und } \varDelta_- \eta_{r(H_t+\varDelta H_t)}.$$

Sie sind noch nicht endgültig richtig, denn ihrer Ermittlung wurde ja die Form des nur durch Eigengewicht belasteten Systems zugrunde gelegt, während die endgültige, dem jeweiligen Belastungszustand entsprechende Verformung hätte zugrunde gelegt werden müssen. Das wird in entsprechender Weise berichtigt werden wie früher.

Wenden wir diese Ergebnisse auf die frühere Untersuchung der echten Einflußlinie für bestimmte $\max M_i$ an (Bild 15 meiner früheren Abhandlung), wobei, wie oben bemerkt, die Schlußlinie ja bereits für die Belastung einschließlich des Eigengewichts gültig ist, so bedarf diese mit Rücksicht auf Wärme noch einer Ergänzung. Wir tragen von dieser Linie aus nun die einzelnen Ordinaten, und zwar entweder $\varDelta_+ \eta_{r(H_t+\varDelta H_t)}$ oder $\varDelta_- \eta_{r(H_t+\varDelta H_t)}$ auf, je nachdem sie die positive Einflußfläche vergrößern oder verkleinern; es ist natürlich der Wert zu nehmen, welcher die Fläche vergrößert. Nun ist aber, da wir bei der Ermittlung der Verformung durch die Wärme vom durch das Eigengewicht belasteten System ausgingen und den Wert y benutzten, nun wieder zu berichtigen, und zwar, da wir nicht von der $H_0 y_4$-Linie, sondern von der $(1 + 2 + 3 + 4 + 5)$-Linie aus auftragen, ist der Wert $\varDelta \eta_{r(H_t+\varDelta H_t)}$ gemäß Gl. (12) meiner früheren Abhandlung zu vervielfachen mit

(12) $$\mu_r = \frac{\eta_{r_0}}{\eta_{r_0} - \varDelta \eta_{r(H_t+\varDelta H_t)}}.$$

Wir erhalten also aus der $(1 + 2 + 3 + 4 + 5)$-Linie die $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + t)$-Linie, indem wir von ersterer aus die Ordinaten

(13) $$\eta_{rt} = \varDelta_\pm \eta_{r(H_t+\varDelta H_t)} \frac{\eta_{r_0}}{\eta_{r_0} - \varDelta \eta_{r(H_t+\varDelta H_t)}}$$

auftragen. Dabei ist natürlich zu beachten, daß wir in Gl. (11) im unbelasteten, also negativen Bereich der Einflußlinie $Q_r = 0$ setzen müssen.

Dabei ändert sich natürlich die Belastungsscheide, und es kann sein, daß eine Last mehr, also auch noch Q_6, einbezogen werden müßte, was dann zu berichtigen ist.

Wir erhalten so die endgültige Einflußfläche für $\max M_4$ unter Berücksichtigung von Eigengewicht, Verkehrslast und Wärmeschwankung. Durch Berücksichtigung des Wärmeeinflusses wird also $\max M_4$ unter allen Umständen größer.

3. Kabelzug.

Es ist nun noch der Kabelzug zu ermitteln, wenn auch der Einfluß der Verformung auf diesen nicht sehr erheblich sein wird.

Er wird natürlich am größten unter voller Belastung und $\varDelta t = -35°$, am kleinsten unter dem Eigengewicht $\varDelta t = +35°$.

Wir ermitteln also zunächst die Einflußlinie für den nur durch Eigengewicht belasteten Träger für das Moment in der Trägermitte, für denselben Punkt die echte Einflußlinie bei voller Belastung. Dabei kann natürlich von der $H_0 y_m$-Linie aus sofort auf die für volle Belastung gültige $H y_m$-Linie übergegangen werden, nachdem die Biegelinie unter voller Belastung bestimmt ist[2]. Dann fügen wir für Eigengewicht den Ordinaten die Werte $_+\eta_{rt}$ nach Gl. (13) zu (wobei sämtliche Werte Q_r in Gl. (11) gleich 0 zu setzen sind) und für volle Belastung die Werte $_-\eta_{rt}$ zu. Wir erhalten so die Einflußlinien für

$$H_{g+p\pm t}(y_m + \delta_m)$$

für Eigengewicht und $+ 35°$ und für volle Belastung und $- 35°$, wobei der Wert δ_m noch unbekannt ist.

Wir können aber nun auch in sehr einfacher Weise die echten Einflußlinien für die Momente M_i der übrigen Punkte des Trägers bestimmen. In der hier wohl zulässigen Annahme, daß sich bei voller Belastung und Wärme die Ordinaten des Kabels verhältnisgleich ändern, kann die für y_m bemessene Berichtigung der $H_0 y_m$-Linie für die Momenteneinflußlinie aller Punkte i ohne weiteres benutzt werden, wenn wir nur die Ordinaten der M_{i_0}-Linie mit $\frac{y_m}{y_i}$ vervielfachen. Die sich dann ergebenden Momenteneinflußlinien haben dann den Beiwert

$$\mu_i = \frac{y_i}{y_m}.$$

Damit haben wir die Momentenbelastung des Trägers und erhalten daraus in einfacher Weise seine Biegelinie und damit seine Durchbiegung δ_m in der Mitte. Dividieren wir nun die vorhin erhaltenen Ordinaten der $H_{g+p+t}(y_m + \delta_m)$-Linie durch $y_m + \delta_m$, so erhalten wir die Einflußlinie für die Kabelzüge

$$\max H_{g+p+t} \text{ und } \min H_{g+t}.$$

Im allgemeinen wird man auf die Berücksichtigung der Verformung bei Ermittlung der Grenzwerte des Kabelzuges verzichten können. Zu beachten ist, daß $\max H_{g+p+t}$ infolge des Einflusses der Verkehrslast kleiner, infolge des Einflusses von $\varDelta t = -35°$ aber größer wird, als er werden würde, wenn man die Verformung unberücksichtigt lassen würde. Im ganzen wird er also wenig kleiner werden wie ohne Berücksichtigung der Verformung. Die H-Linie hat nicht die charakteristische Form der Momenteneinflußlinien, auch ist die größte Durchbiegung in der Mitte unter voller Verkehrslast wesentlich kleiner als die größte Durchbiegung im Viertelpunkt unter Teilbelastung. Man kann sie einschließlich des abmindernden Wärmeeinflusses auf höchstens $^1/_{500}\, l$, also bei einer Pfeilhöhe von $^1/_8\, l$ auf etwa $^1/_{60}$ der Pfeilhöhe schätzen, wobei sich ein Unterschied des Kabelzuges $\max H_{g+p+t}$ von etwa 2 % ergeben würde. Für $\min H_{g+t}$ ist der Unterschied noch wesentlich kleiner.

4. Benutzung von Modellen für die Berechnungen.

Es ist schon mehrfach erwogen worden, schwierige Berechnungen, wie die hier behandelten, an Hand von Modellen auszuführen, wobei ja in bekannter Weise die Einflußlinien mittels der Zeißschen Winkeldrehungslehre unmittelbar aufgezeichnet werden können. Dieses Verfahren würde in unserem Falle nicht zum Ziele führen, wohl aber kann die Benutzung von Modellen zum Zweck der Ermittlung von Verformungen meines Erachtens große Vorteile bringen, auf die man nicht verzichten sollte.

Erstens macht nämlich, besonders bei mehrfach statisch unbestimmten Systemen, etwa der wichtigen Hängebrücke mit durchlaufendem Versteifungsträger, die Berechnung der unter den verschiedenen Belastungen benötigten Durchbiegungen ziemlich viel Mühe.

Zweitens halte ich es für eine etwas gewagte Sache, auf Grund der theoretisch ermittelten Durchbiegungen Berechnungen anzustellen, die eine ganz erhebliche Abminderung der Beanspruchungen herbeiführen sollen. Theoretisch ermittelte Durchbiegungen sind fast stets aus verschiedenen Gründen wesentlich größer als die wirklichen Durchbiegungen, wie zahlreiche Belastungsversuche selbst an Brücken einfachster Art beweisen. Es besteht daher die Gefahr, daß die auf Grund dieser errechneten Durchbiegungen ermittelten Beanspruchungen zu klein ermittelt werden[3].

Drittens bedürfen die theoretisch ermittelten Durchbiegungen stets einer Berichtigung, da nicht das verformte, sondern das unverformte System den Berechnungen zugrunde gelegt werden muß, Berichtigungen, welche in Form von Reihenentwicklungen in meinem früheren Aufsatz durchgeführt wurden. Sie können bei Bestimmung der Durchbiegung an Modellen erspart werden.

Es soll nun zunächst einmal festgestellt werden, welche Anforderungen an ein hierzu geeignetes Modell hinsichtlich des Maßstabs der Abmessungen und der Lasten zu stellen sind.

Wir stellen ein Modell der Brücke mit Maßstab $1 : n$ her, und zwar aus denselben Baustoffen, wie sie für das wirkliche Bauwerk vorgesehen sind. Dann ist der Kabelquerschnitt

$$F_k' = \frac{F_k}{n^2}.$$

Das Trägheitsmoment des Versteifungsträgers ist

$$J_v' = \frac{J_v}{n^4}.$$

Es ist nun die Belastung zu suchen, welche Stabverlängerung und Durchbiegung von $\frac{1}{n}$ der wirklichen verursacht, um verhältnisgleiche Verformungen zu erzielen.

Die Stabverlängerung ist

$$\varDelta s = \frac{S s}{\varepsilon F},$$

im Modell also

$$\varDelta s' = \frac{S' s'}{\varepsilon F'}.$$

Da nun $\varDelta s' = \frac{\varDelta s}{n}$ sein soll, ergibt sich

$$\frac{S s}{F} = n \cdot \frac{S' s\, n^2}{n F} \quad \text{oder} \quad S' = \frac{S}{n^2}.$$

---

[2]) Vgl. 2, Abs. 2.

[3]) Die Benutzung von errechneten Biegelinien für die Einflußlinien statisch unbestimmter Systeme ist unbedenklich, da hier nicht Kraftgrößen, sondern Verschiebungsgrößen die Verformung bestimmen.

In irgendeinem Fachwerk ist nun das Moment im Punkt i infolge einer Last P im Punkte k

$$M_i = c\,P\,l,$$

wobei c nur von der Form, den Elastizitätsverhältnissen des Fachwerks und der Stellung der Last abhängt. Die zugehörige Stabkraft ist $S = \frac{c\,P\,l}{r}$, wobei r den Hebelarm bedeutet.

Dann ist im Bauwerk selbst $S = \frac{c\,P\,l}{r}$, im Modell $S' = \frac{c\,P'\,l'}{r'}$; mit $S' = \frac{S}{n^2}$, $l' = \frac{l}{n}$, $r' = \frac{r}{n}$ wird dann $P' = \frac{P}{n^2}$. Daraus folgt für eine über die Länge gleichmäßig verteilte Last q beziehungsweise q' im Modell

$$q' \cdot \frac{a}{n} = q \cdot \frac{a}{n^2}; \qquad q' = \frac{q}{n};$$

das gilt für Kabel und Hängestangen. Für den Versteifungsträger aber ist die Durchbiegung immer $\delta = c \cdot \frac{P\,l^3}{J}$, also $\frac{P\,l^3}{J} = n \cdot \frac{P'\,l^3\,n^4}{n^3\,J}$, also wieder $P' = \frac{P}{n^2}$ und ebenso q, auf die Länge bemessen,

$$q' = \frac{q}{n}.$$

Nun ist aber, da die Querschnitte des Modells nur $\frac{1}{n^2}$ der Querschnitte im Bauwerk betragen, das Stahlgewicht des Modells, auf die Längeneinheit bemessen, nur $\frac{1}{n^2}$ des Gewichts des Bauwerks, während es zur Erzielung verhältnisgleicher Verformungen $\frac{1}{n}$ betragen sollte. Das fehlende Eigengewicht muß also durch aufgebrachte ständige Belastung ersetzt werden.

Wenn wir also das Tragwerk genau im Maßstabe $\frac{1}{n}$ herstellen, müssen wir, um Verformungen zu erhalten, die denen des Tragwerks verhältnisgleich sind, anstatt einer Einzellast P die Einzellast $\frac{P}{n^2}$ und anstatt einer gleichmäßig auf die Längeneinheit des Tragwerks verteilten Belastung q die Belastung $\frac{q}{n}$ aufbringen. Die Spannungen werden dann im Modell und Tragwerk gleich.

Nun ist aber nicht erforderlich, den Versteifungsträger hinsichtlich seines Querschnitts genau der Wirklichkeit nachzubilden. Er kann durch einen Träger rechteckigen Querschnitts ersetzt werden, welcher $\frac{1}{n}$ der Höhe und $\frac{1}{n^4}$ des Trägheitsmoments des wirklichen Trägers hat, wonach sich die Breite des rechteckigen Querschnitts bestimmt. Ein weiterer Vorteil des Modells ist der, daß dabei auch die Verlängerung der Hängestangen berücksichtigt wird, die sich theoretisch schwer erfassen läßt. Auch die Mitwirkung der Querkräfte bei der Verformung gibt das Modell wieder, allerdings bei Ersatz des genauen Querschnitts des Versteifungsträgers durch ein Rechteck nicht genau, was aber bei der geringen Bedeutung des Beitrags der Querkräfte zur Verformung keine Rolle spielt.

Für unsere hier vorliegenden Zwecke genügt es auch, statt des Brückenmodells nur das Modell eines Hauptträgers herzustellen, bei welchem man dann die Feldbelastung $a\,q$ durch eine im Knotenpunkt angebrachte Einzellast $a\,q$ ersetzen kann.

Die Benutzung des Modells gestaltet sich nun folgendermaßen: Wir bringen zunächst den fehlenden Teil des Stahlgewichts des Hauptträgers und dann das Eigengewicht durch Anhängen entsprechender Einzellasten an die Knotenpunkte an.

Dann belasten wir, wenn wir das in Bild 15 meiner früheren Abhandlung verfolgte Beispiel annehmen wollen, zunächst mit der Last Q_1 und stellen die Durchbiegungen genau fest. Sie müssen aber wegen der Längenänderung der Hängestangen am Kabel, nicht am Versteifungsträger gemessen werden. Diese Verbiegungen sind richtig und bedürfen keiner Berichtigung mehr. Auf Grund der erhaltenen Systemform ermitteln wir nun rechnerisch die $H_1\,(y_4 + \delta_{41})$-Linie als Einflußlinie. Auch deren Ermittlung bleibt streng richtig. Wir erhalten nun also die richtige $[H_1\,(y_4 + \delta_{41}) - H_0\,y_4]$-Linie mit den Ordinaten $\varDelta\,\eta_{r_1}$, die nun unmittelbar von der $H\,y_4$-Linie aus aufgetragen werden und keiner Berichtigung durch einen Wert μ mehr bedürfen. Aus Gl. (10) der früheren Abhandlung wird

$$\eta_{11} - \eta_{10} = \varDelta\,\eta_{11}. \tag{14}$$

Nun entfernen wir die Last Q_1 und bringen die Last Q_2 auf. Aus der nun erzielten Verformung bestimmen wir die $[H_2\,(y_4 + \delta_{42}) - H_0\,y_4]$-Linie mit den Ordinaten $\varDelta\,\eta_{r_2}$. Diese sind nun aber, da sie nicht von der 0-Linie, sondern von der l-Linie aus aufgetragen werden, mit

$$\mu_{r_2} = \frac{\eta_{r_1}}{\eta_{r_0}} \tag{15}$$

zu vervielfachen.

Allgemein ergibt sich: Wir können ganz entsprechend verfahren wie bei theoretischer Ermittlung der Biegelinien, nur wird die allgemeine Gleichung für den Berichtigungsbeiwert $\mu_{r\,k}$ [Gl. (16) der früheren Abhandlung]

$$\mu_{r\,k} = \frac{\eta_{r\,(k-1)}}{\eta_{r_0}} \tag{16}$$

[vgl. dazu auch Gl. (23) der früheren Abhandlung].

Für die Auftragung der l-Linie wird mit $k = 1$

$$\mu_{r_1} = \frac{\eta_{r_0}}{\eta_{r_0}} = 1.$$

Damit ist ein Weg gezeigt, wie man die Ermittlung des Einflusses des Eigengewichts und der Verkehrslast durch Benutzung von Modellen zur Feststellung von Verformungszuständen wesentlich vereinfachen kann; man wird überdies auf diese Weise zuverlässigere Ergebnisse erhalten wie auf rein theoretischem Wege. Der Vorteil wird sich besonders bei mehrfach statisch unbestimmten Hängebrücken bemerkbar machen.

Es wäre nun zwar vielleicht auch möglich, Verformungszustände infolge von Wärmeschwankungen an dem Modell zu ermitteln. Das stößt jedoch auf Schwierigkeiten, weil es praktisch schwierig sein wird, das Modell Wärmeschwankungen von $\pm 35°$ auszusetzen und bei Anwendung geringerer Schwankungen Verhältnisgleichheit der Ergebnisse nicht besteht. Der hier gezeigte Weg der Rechnung zur Erfassung der Wärmeschwankungen ist auch so einfach, daß man hier besser von der Verwendung des Modells absehen wird.

Die Knickfestigkeit elastisch eingespannter Stäbe.

Von Dr.-Ing. **Hans Sievers**, Duisburg.

Die strenge Theorie des elastisch eingespannten Druckstabes führt bekanntlich zu transzendenten Gleichungen mit meist mehreren Unbekannten, deren Lösung nur durch Probieren möglich und daher in hohem Maße unübersichtlich und zeitraubend ist. Im folgenden wird ein Näherungsverfahren entwickelt, das auch in komplizierten Fällen eine einfache und verblüffend genaue Berechnung des Einspannungsgrades ermöglicht.

A. Der Grundgedanke des Verfahrens.

Die Knicklast eines einseitig oder beiderseits fest eingespannten Stabes von der Länge $\zeta\,l$ ist

$$P = \frac{\pi^2\,T\,J}{(\varepsilon\,\zeta\,l)^2} = \frac{\pi^2\,T\,J}{(\varkappa\,l)^2}. \tag{1}$$

Hierin ist J das Trägheitsmoment, $T = \tau E$ der Knickmodul, ε ein von der Art der Auflagerung abhängiger Wert, dessen Größe für die in Frage kommenden Fälle in Bild 1 angegeben ist.

Man vergleicht nun die Formänderungsarbeit, die beim Knicken eines elastisch eingespannten Stabes von der Länge l auftritt, mit der Formänderungsarbeit eines fest eingespannten Stabes von der Länge $\zeta\,l$. Bei elastischer Einspannung ist die Formänderungsarbeit gegenüber der bei fester Einspannung um den Anteil $\mathfrak{A}_1$, den die Strecke $\zeta\,l - l$ an der Formänderungsarbeit hat, geringer; dafür kommt die Formänderungsarbeit $\mathfrak{A}_2$ der Stäbe, durch die der Druckstab eingespannt wird (Einspannstäbe), hinzu. Die Knickbedingung

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2\,^{1)} \tag{2}$$

ergibt den Wert ζ, der stets größer als 1 ist.

Da nun das Biegemoment des Druckstabes in der Nähe der Einspannstellen, also auf der Strecke $\zeta\,l - l$, nur wenig variiert, kann man seinen Verlauf angenähert durch eine lineare Funktion wiedergeben. Die Formänderungsarbeit $\mathfrak{A}_1$ ist dann eine rationale Funktion von ζ. Weil auch $\mathfrak{A}_2$ eine rationale Funktion von ζ wird, tritt bei unserem Näherungsverfahren an Stelle der transzendenten Knickbedingung eine algebraische Gleichung. Voraussetzung ist lediglich, daß etwaige in den Einspannstäben auftretende Längskräfte ohne nennenswerten Einfluß auf deren Formänderung sind. Wir werden später an zwei nach der strengen Theorie durchgerechneten Beispielen zeigen, daß dieser Einfluß unbedeutend ist und vernachlässigt werden kann, solange nicht die Druckkräfte in den Einspannstäben sich ihrerseits der Knicklast nähern.

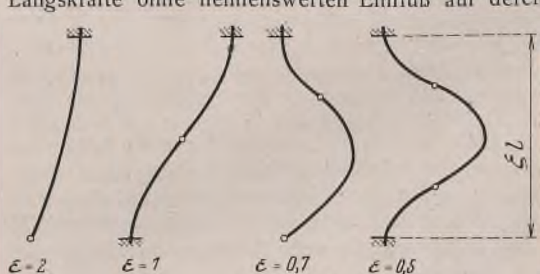


Bild 1.

Im folgenden soll am Beispiel des durchlaufenden Stabes und des antisymmetrischen Knickens von Rahmen die Anwendung des Verfahrens gezeigt und seine Genauigkeit durch Vergleich mit den Ergebnissen der strengen Theorie nachgewiesen werden.

B. Der durchlaufende Druckstab.

Wenn in allen Feldern eines durchlaufenden Stabes Knickgefahr besteht, dann knickt der Stab in Wellen aus, deren Länge gleich der Stützweite der einzelnen Felder ist. Eine elastische Einspannung wird nicht wirksam. Für jedes Feld ist $\varkappa = 1$. Wir können uns also auf die

[1]) Über den Geltungsbereich dieser Gleichung siehe unter D.

Untersuchung des Falles beschränken, daß nur ein Teil der Felder auf Druck beansprucht ist.

Zunächst berechnen wir den zweifeldrigen gelenkig gelagerten Stab. In Bild 2 sind Knicklinie und Momentenlinie des Stabes und des Vergleichsstabes dargestellt. Ersetzt man auf der Strecke l_1 $(\zeta - 1)$ die krummlinig begrenzte Momentenfläche $ABCD$ durch das Viereck $A'BCD$ und setzt man weiter das in $\mathfrak{A}_1$ wie in $\mathfrak{A}_2$ auftretende Moment $BC = 1$, so wird

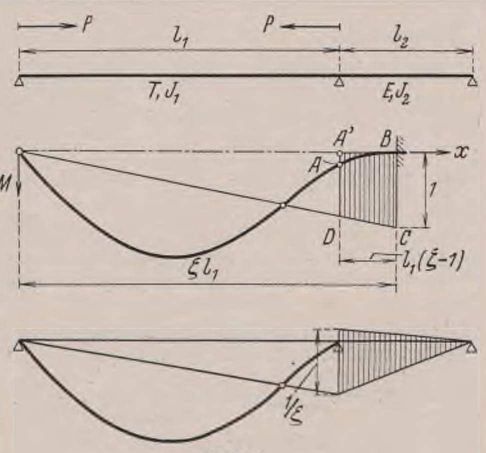


Bild 2.

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{1}{2\,T\,J_1}\int_{l_1}^{\zeta l_1}\left(\frac{x}{\zeta l_1}\right)^2 d\,x = \frac{l_1}{6\,T\,J_1}\cdot\frac{\zeta^3 - 1}{\zeta^2},$$

$$\mathfrak{A}_2 = \frac{l_2}{6\,E\,J_2}\cdot\frac{1}{\zeta^2}.$$

Die Knickbedingung liefert

$$(3) \qquad \zeta = \sqrt[3]{1 + \nu},$$

wenn wir das Verhältnis der Schlankheit beider Felder

$$(4) \qquad \frac{T\,J_1}{E\,J_2}\cdot\frac{l_2}{l_1} = \tau\cdot\frac{J_1}{J_2}\cdot\frac{l_2}{l_1} = \nu$$

setzen. Mit $\varepsilon = 0{,}7$ (vgl. Bild 1) wird

$$(5) \qquad \varkappa = \varepsilon\,\zeta = 0{,}7\,\sqrt[3]{1 + \nu}\,.$$

Zahlenbeispiel: $l_1 = 300$ cm, $l_2 = 150$ cm, $J_1 = J_2 = 800$ cm⁴, $\tau = 1$.

Nach Gl. (4) wird $\nu = \dfrac{150}{300} = 0{,}5$,

nach Gl. (5) $\varkappa = 0{,}7\,\sqrt[3]{1 + 0{,}5} = 0{,}8015$,

somit nach Gl. (1) $P = \dfrac{\pi^2 \cdot 2100 \cdot 800}{(0{,}8015 \cdot 300)^2} = 28{,}7$ t.

Das gleiche Beispiel ist von Unold im Stahlbau-Kalender 1939, S. 100, behandelt worden, nur mit dem Unterschied, daß in beiden Feldern die gleiche Druckkraft angenommen wurde. Allerdings ist bei Auswertung des strengen Ansatzes ein Fehler unterlaufen. Die richtige Lösung lautet $P = 27{,}8$ t.

Am zweiten Beispiel soll die Anwendung im plastischen Bereich gezeigt werden. Um die Berechnung bequem durchführen zu können, ermitteln wir zunächst τ als Funktion von $\lambda = \dfrac{\varkappa\,l}{i}$. Im Bereich $\lambda < 60$ ist nach den amtlichen Vorschriften

$$\sigma_k = \sigma_Q = \frac{\pi^2\,\tau\,E}{\lambda^2}$$

zu setzen. Daraus folgt

$$\tau = \frac{\sigma_Q}{\pi^2\,E}\cdot\lambda^2.$$

Für St 37 mit $\sigma_Q = 2{,}4$ t/cm² wird $\tau = (1{,}157\,\lambda^2)\,10^{-4}$,

für St 37 mit $\sigma_Q = 3{,}6$ t/cm² wird $\tau = (1{,}735\,\lambda^2)\,10^{-4}$.

Im Bereich $60 < \lambda < 100$ ist

$$\sigma_k = \sigma_Q - (\sigma_Q - \sigma_{100})\cdot\frac{\lambda - 60}{40} = \frac{\pi^2\,\tau\,E}{\lambda^2}.$$

Hieraus ergibt sich mit $\sigma_{100} = 2{,}073$ t/cm²

für St 37: $\tau = (1{,}393\,\lambda^2 - 0{,}003\,93\,\lambda^3)\,10^{-4}$,

für St 52: $\tau = (2{,}84\ \ \lambda^2 - 0{,}0184\,\lambda^3)\,10^{-3}$.

In Tafel 1 sind für den Bereich $60 < \lambda < 100$ die Werte τ als Funktion von λ angegeben.

Tafel 1.

λ	τ St 37	τ St 52
60	0,417	0,626
65	0,481	0,694
70	0,547	0,759
75	0,616	0,821
80	0,688	0,875
85	0,762	0,922
90	0,840	0,960
95	0,919	0,981
100	1,000	1,000

Zahlenbeispiel:

$l_1 = l_2 = 450$ cm, $\quad J_1 = J_2 = 1400$ cm⁴,

$F_1 = F_2 = 52{,}5$ cm²,

$$i = \sqrt{\frac{1400}{52{,}5}} = 5{,}17 \text{ cm}.$$

Nach Gl. (4) wird $\nu = \tau$. Für $\lambda = \dfrac{0{,}7\,l_1}{i} = \dfrac{0{,}7 \cdot 450}{5{,}17} = 61$ ist bei St 37 $\tau = 0{,}43$.

Somit wird nach Gl. (3) $\zeta = \sqrt[3]{1 + 0{,}43} = 1{,}125$. Für den verbesserten Wert $\lambda = 1{,}125 \cdot 61 = 68{,}7$ ergibt sich $\tau = 0{,}53$ und damit $\lambda = 70{,}3$, hieraus weiter $\tau = 0{,}551$, $\lambda = 70{,}6$. Eine nochmalige Verbesserung ist nicht erforderlich. Das Endergebnis ist

$$P = \frac{\pi^2 \cdot 0{,}551 \cdot 2100}{70{,}6^2}\cdot 52{,}5 = 120{,}4 \text{ t}.$$

Unold erhält mit den gleichen Abmessungen und mit $P_2 = 0{,}5\,P$ den Wert $P = 121$ t, also fast genau das gleiche Ergebnis.

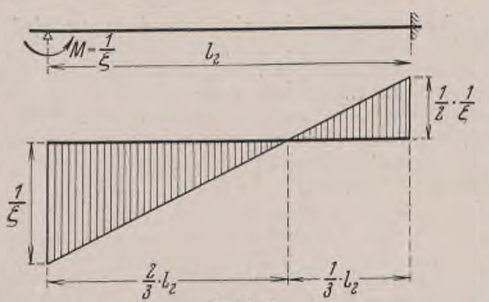


Bild 3.

Die beiden Zahlenbeispiele zeigen, daß man den Einfluß einer Druckkraft P_2 unbedenklich vernachlässigen kann, solange P_2 genügend weit von der Knicklast entfernt bleibt. Nähert sich P_2 der Knicklast, sind also beide Felder auf Knicken dimensioniert, dann ist aus Sicherheitsgründen $\varkappa = 1$ zu setzen.

Ist das zweite Feld eingespannt, so liegt der Wendepunkt der Biegelinie in $^1/_3\,l_2$. Die Formänderungsarbeit berechnet sich dann nach Bild 3 zu

$$\mathfrak{A}_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{l_2}{3\,E\,J_2}\cdot\frac{1}{\zeta^2}\left[1\cdot\frac{2}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{3}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{l_2}{3\,E\,J_2}\cdot\frac{1}{\zeta^2}\cdot\frac{3}{4}.$$

Bei Berechnung des Endfeldes eines durchlaufenden Trägers über 4 und mehr Stützen sind bei Ermittlung von $\mathfrak{A}_2$ alle an l_2 anschließenden Felder zu berücksichtigen. Die Untersuchung ist in einfachster Weise durchführbar, sobald die Lage der Festpunkte bekannt ist oder einigermaßen richtig geschätzt wird, da deren Lage, wie der Vergleich des frei aufliegenden mit dem fest eingespannten Felde zeigt, nur von geringem Einfluß ist. Man kann also allgemein

$$\varkappa = 0{,}7\,\sqrt[3]{1 + \gamma\,\nu}$$

setzen, worin γ ein Wert ist, der von der Zahl und Auflagerung der Einspannstäbe abhängt. Schließen an den Druckstab z. B. zwei Felder mit gleicher Steifigkeit an, so wird $\gamma = \dfrac{7}{8}$. Da die Grenzwerte $\gamma = 1$ bei freier Auflagerung und $\gamma = 0{,}75$ bei fester Einspannung nur unwesentlich differieren, kann man sich unbedenklich darauf beschränken, nur das an den Druckstab anschließende Feld zu berücksichtigen und dessen Ende als frei gelagert zu betrachten.

Nach einer bekannten mathematischen Beziehung ist für Werte von ζ, die nur wenig größer als 1 sind,

$$(3\,\text{a}) \qquad \zeta = \sqrt[3]{1 + \nu} = \sim 1 + \frac{\nu}{3}.$$

Man erhält damit $\varkappa = \sim 0{,}7\left(1 + \dfrac{\nu}{3}\right)$.

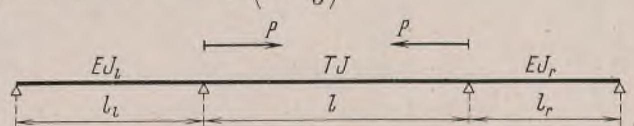


Bild 4.

Zu dem gleichen Ergebnis wäre man gelangt, wenn man bei der Ableitung der Knickbedingung das Moment auf der Strecke l_1 $(\zeta - 1)$ konstant angenommen hätte. Diese Feststellung berechtigt uns dazu, bei beiderseits eingespannten Druckstäben die Neigung der Momentenschlußlinie zu vernachlässigen. Wenn also z. B. das Feld l_1 an der Randstütze fest eingespannt ist, kann man, da dann $\varepsilon = 0{,}5$ ist,

$$(6) \qquad \varkappa = 0{,}5\left(1 + \frac{\nu}{3}\right)$$

setzen. Für die Mittelfelder durchlaufender Träger wird

$$(7) \qquad \varkappa = 0{,}5\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\nu_l + \frac{1}{3}\cdot\nu_r\right),$$

worin

$$\nu_l = \tau\cdot\frac{J}{J_l}\cdot\frac{l_l}{l}, \qquad \nu_r = \tau\cdot\frac{J}{J_r}\cdot\frac{l_r}{l}$$

ist (vgl. Bild 4).

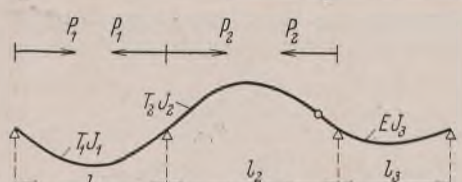


Bild 5.

Kommt das Knicken von mehreren aufeinander folgenden Feldern in Betracht, so ergeben sich die richtigen Ansätze aus der Gestalt der Knicklinie. Im Falle des Bildes 5 wird z. B.

$$\zeta_1 = 1, \quad \zeta_2 = 0{,}7\,\sqrt[3]{1 + \nu},$$

worin $\qquad \nu = \tau_2\cdot\dfrac{J_2}{J_3}\cdot\dfrac{l_2}{l_3}$ ist.

C. Das antisymmetrische Knicken von Rahmen.

Wie bereits die Untersuchung des durchlaufenden Stabes zeigt, ist das Steifigkeitsverhältnis ν abhängig von dem Verhältnis der Knickmodule T von Druckstab und Einspannstab, beim Rahmen also von Pfosten und Riegel. Sind die Riegel unbelastet, so ist bei ihnen $T = E$ zu setzen. Dieser Fall wird jedoch nur ausnahmsweise eintreten, da die Riegel bei der überwiegenden Zahl der in Frage kommenden Konstruktionen zum mindesten durch Biegemomente aus Wind beansprucht sind. Unter der n-fachen Gebrauchslast (n = Sicherheit) wird also auch in den Riegeln

die Proportionalitätsgrenze streckenweise überschritten, d. h. an Stelle von E tritt ein kleinerer Wert. Das Maß der dadurch entstehenden Vergrößerung von $\mathfrak{A}_2$ hängt von der Verteilung der Biegemomente über den Riegel ab. Anderseits ist auch $\mathfrak{A}_1$ nicht, wie beim reinen Druckstab, eine einfache Funktion von $T = f(\lambda)$, da infolge Auftretens von Biegemomenten die Proportionalitätsgrenze ebenfalls nur streckenweise und auch nicht im ganzen Stabquerschnitt überschritten wird. Nun dimensioniert man allerdings bei Anwendung der Formel

$$\sigma = \frac{P\,\omega}{F} + \frac{M}{W}$$

so, als ob auf der ganzen Länge des Druckstabes im Querschnittsschwerpunkt die zu der Knickzahl $\omega = f(\lambda)$ bzw. dem Knickmodul $T = f(\lambda)$ zugeordnete Spannung σ_k erreicht würde. Die Berechtigung zu diesem Vorgehen ist jedoch darin begründet, daß die Ergebnisse dann auf der sicheren Seite liegen. Wollte man aber bei der Untersuchung des Knickens von Rahmen ebenfalls für die Pfosten $E = T$ setzen, so würde man sich u. U. auf die unsichere Seite begeben. Es empfiehlt sich daher, für die Pfosten sowohl wie für die Riegel $E = \text{const}$ zu setzen, d. h. bei der Berechnung von $\varkappa$ (natürlich nicht bei der Dimensionierung) so zu verfahren, als ob das Knicken vollkommen im elastischen Bereiche vor sich ginge[2]. Dementsprechend ist auch bei der folgenden Untersuchung verfahren. Bei den Ausnahmefällen, bei denen Riegel und Pfosten frei von Biegemomenten sind, kann der Verringerung von E in den Pfosten dadurch Rechnung getragen werden, daß die ν-Werte mit $\tau = \dfrac{T}{E}$ multipliziert werden.

a) Die strenge Knickbedingung des Einfeldrahmens.

Bild 6 gibt die Knicklinie von 2 Stockwerken wieder, in deren Pfosten gleichzeitig die Knicklast erreicht wird. Das Verhältnis der Knicklängen der Pfosten $m,\ m+1$ und $m,\ m-1$ ist

$$(8)\qquad \frac{\varkappa_{m,m+1}\,h_{m,m+1}}{\varkappa_{m,m-1}\,h_{m,m-1}} = \sqrt{\frac{J_{m,m+1}\,P_{m,m-1}}{J_{m,m-1}\,P_{m,m+1}}} = \alpha_m.$$

Daraus folgt

$$(9)\qquad \frac{\varkappa_{m,m+1}}{\varkappa_{m,m-1}} = \alpha_m \cdot \frac{h_{m,m-1}}{h_{m,m+1}}.$$

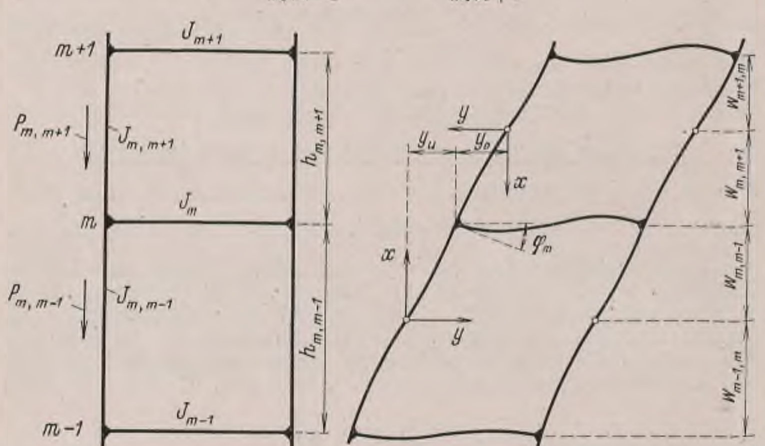


Bild 6.

Bei Symmetrie zur lotrechten Schwerachse bleiben die Riegel beim Knicken frei von Längskräften. Dann sind die Biegelinien der Pfosten reine Sinuslinien, die der Gleichung

$$(10)\qquad y = f \cdot \sin\frac{\pi x}{\varkappa h}$$

genügen, wenn man den Koordinatenanfang jeweils in den Wendepunkt der Biegelinie legt. Der Neigungswinkel der Biegelinie im Knoten m wird dann

$$\varphi_m = \pi \cdot \frac{f_{m,m-1}}{\varkappa_{m,m-1}\,h_{m,m-1}} \cdot \cos\pi \cdot \frac{w_{m,m-1}}{\varkappa_{m,m-1}\,h_{m,m-1}}$$
$$= \pi \cdot \frac{f_{m,m+1}}{\varkappa_{m,m+1}\,h_{m,m+1}} \cdot \cos\pi \cdot \frac{w_{m,m+1}}{\varkappa_{m,m+1}\,h_{m,m+1}}.$$

Mit den Bezeichnungen

$$(11)\qquad \frac{\varkappa_{m,m-1}\,h_{m,m-1}}{w_{m,m-1}} = \eta_{m,m-1} \text{ und } \frac{\varkappa_{m,m+1}\,h_{m,m+1}}{w_{m,m+1}} = \eta_{m,m+1}$$

lautet die Kontinuitätsbedingung im Knoten m

$$(12)\qquad \varphi_m = \pi \cdot \frac{f_{m,m-1}}{\varkappa_{m,m-1}\,h_{m,m-1}} \cdot \cos\frac{\pi}{\eta_{m,m-1}}$$
$$= \pi \cdot \frac{f_{m,m+1}}{\varkappa_{m,m+1}\,h_{m,m+1}} \cdot \cos\frac{\pi}{\eta_{m,m+1}}.$$

Hieraus folgt

$$(13)\qquad f_{m,m+1} = f_{m,m-1} \cdot \frac{\varkappa_{m,m+1}\,h_{m,m+1}}{\varkappa_{m,m-1}\,h_{m,m-1}} \cdot \frac{\cos\dfrac{\pi}{\eta_{m,m-1}}}{\cos\dfrac{\pi}{\eta_{m,m+1}}}$$

oder nach Gl. (8)

$$(14)\qquad f_{m,m+1} = f_{m,m-1}\,\alpha_m \cdot \frac{\cos\dfrac{\pi}{\eta_{m,m-1}}}{\cos\dfrac{\pi}{\eta_{m,m+1}}}.$$

Die horizontalen Abstände der Wendepunkte der Biegelinien vom Rahmenknoten m sind nach Gl. (10) u. (14)

$$y_u = f_{m,m-1} \cdot \sin\frac{\pi}{\eta_{m,m-1}},$$
$$y_o = f_{m,m+1} \cdot \sin\frac{\pi}{\eta_{m,m+1}}$$
$$= f_{m,m-1}\,\alpha_m \cdot \cos\frac{\pi}{\eta_{m,m-1}} \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{\eta_{m,m+1}}.$$

Das Moment der Knicklasten P im Rahmenknoten m wird damit

$$(15)\qquad M_m = P_{m,m-1}\,y_u + P_{m,m+1}\,y_o$$
$$= P_{m,m-1}\left(y_u + \frac{P_{m,m+1}}{P_{m,m-1}} \cdot y_o\right)$$
$$= \frac{\pi^2\,E J_{m,m-1}}{\varkappa^2_{m,m-1}\,h^2_{m,m-1}} \cdot f_{m,m-1}\left(\sin\frac{\pi}{\eta_{m,m-1}} + \beta_m \cdot \cos\frac{\pi}{\eta_{m,m-1}} \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{\eta_{m,m+1}}\right).$$

Hierin ist

$$(16)\qquad \beta_m = \frac{P_{m,m+1}}{P_{m,m-1}} \cdot \alpha_m = \sqrt{\frac{J_{m,m+1}\,P_{m,m+1}}{J_{m,m-1}\,P_{m,m-1}}}.$$

Dieses Moment ruft eine Verdrehung des Riegelendes

$$(17)\qquad \varphi_m = \frac{M_m\,b}{6\,E J_m}$$
$$= \pi \cdot \frac{f_{m,m-1}}{\varkappa_{m,m-1}\,h_{m,m-1}} \cdot \pi \cdot \frac{E J_{m,m-1}}{\varkappa_{m,m-1}\,h_{m,m-1}}$$
$$\left(\sin\frac{\pi}{\eta_{m,m-1}} + \beta_m \cdot \cos\frac{\pi}{\eta_{m,m-1}} \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{\eta_{m,m-1}}\right)\frac{b}{6\,E J_m}$$

hervor. Aus Gl. (12) u. (17) folgt

$$\frac{\pi}{6} \cdot \frac{b}{\varkappa_{m,m-1}\,h_{m,m-1}} \cdot \frac{J_{m,m-1}}{J_m}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{\eta_{m,m-1}} + \beta_m \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{\eta_{m,m+1}}\right) = 1$$

oder mit

$$(18)\qquad \nu_{m,m-1} = \frac{b}{h_{m,m-1}} \cdot \frac{J_{m,m-1}}{J_m}$$

$$(19)\qquad \frac{\pi}{\varkappa_{m,m-1}}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{\eta_{m,m-1}} + \beta_m \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{\eta_{m,m+1}}\right) = \frac{6}{\nu_{m,m-1}}.$$

Die Beziehung

$$w_{m-1,m} + w_{m,m-1} = h_{m,m-1}$$

liefert in Verbindung mit Gl. (11)

$$(20)\qquad \frac{1}{\eta_{m-1,m}} + \frac{1}{\eta_{m,m-1}} = \frac{1}{\varkappa_{m,m-1}}.$$

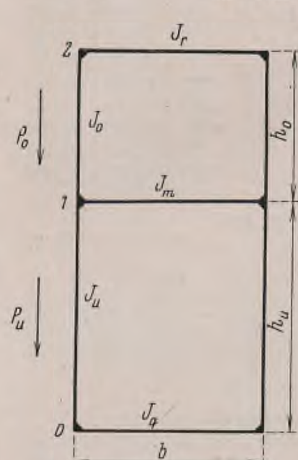


Bild 7.

Aus Gl. (9), der Kontinuitätsbedingung (19) und der geometrischen Bedingung (20) lassen sich alle Unbekannten ermitteln.

Beim zweistöckigen Rahmen erhält man mit den Bezeichnungen von Bild 7

$$(21)\qquad \begin{cases} \alpha = \sqrt{\dfrac{J_o}{J_u} \cdot \dfrac{P_u}{P_o}} \\ \beta = \sqrt{\dfrac{J_o}{J_u} \cdot \dfrac{P_o}{P_u}} \\ \dfrac{\varkappa_o}{\varkappa_u} = \alpha \cdot \dfrac{h_u}{h_o}. \end{cases}$$

Für Punkt 2 wird mit $J_{m,m+1} = 0$ der Wert $\beta = 0$, und man erhält aus Gl. (19) mit

$$\nu_r = \frac{J_o}{J_r} \cdot \frac{b}{h_o} \qquad \frac{\pi}{\eta_{2,1}} = \operatorname{arc\,tg}\frac{6}{\nu_r} \cdot \frac{\varkappa_o}{\pi}.$$

---

[2]) Diese Überlegungen bedürfen einer Nachprüfung an Hand der neuen im Entwurf vorliegenden Knickvorschriften.

Entsprechend wird mit $\nu_q = \frac{J_u}{J_q} \cdot \frac{b}{h_u}$ $\quad \frac{\pi}{\eta_{0,1}} = \operatorname{arc\,tg} \frac{6}{\nu_q} \cdot \frac{\varkappa_u}{\pi}$.

Aus der geometrischen Bedingung (20) folgt damit

$$\frac{\pi}{\eta_{1,0}} = \frac{\pi}{\varkappa_u} - \frac{\pi}{\eta_{0,1}} = \frac{\pi}{\varkappa_u} - \operatorname{arc\,tg} \frac{6}{\nu_q} \cdot \frac{\varkappa_u}{\pi},$$

$$\frac{\pi}{\eta_{1,2}} = \frac{\pi}{\varkappa_o} - \operatorname{arc\,tg} \cdot \frac{6}{\nu_r} \cdot \frac{\varkappa_o}{\pi}.$$

Die Kontinuitätsbedingung für den Rahmenknoten 1 lautet dann mit der Abkürzung

$$\nu_m = \frac{J_u}{J_m} \cdot \frac{b}{h_u}$$

(22) $$\frac{\pi}{\varkappa_u}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{\varkappa_u} - \operatorname{arc\,tg} \cdot \frac{6}{\nu_q} \cdot \frac{\varkappa_u}{\pi}\right) + \beta \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{\varkappa_o} - \operatorname{arc\,tg} \cdot \frac{6}{\nu_r} \cdot \frac{\varkappa_o}{\pi}\right)\right] = \frac{6}{\nu_m}.$$

Beim zweistöckigen Rahmen mit eingespannten Pfostenfüßen ist $J_q = \infty$ zu setzen.

Damit wird $\quad \nu_q = 0, \quad \operatorname{arc\,tg} \frac{6}{\nu_q} \cdot \frac{\varkappa_u}{\pi} = \frac{\pi}{2}$

und nach Gl. (22)

(23) $$\frac{\pi}{\varkappa_u}\left[\beta \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{\varkappa_o} - \operatorname{arc\,tg} \frac{6}{\nu_r} \cdot \frac{\varkappa_o}{\pi}\right) - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\varkappa_u}\right] = \frac{6}{\nu_m}.$$

Für $J_m = J_r = 0$ ergibt sich hieraus

(24) $$\operatorname{tg} \frac{\pi}{\varkappa_u} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{\varkappa_o} = \frac{1}{\beta},$$

und man erhält weiter, wenn man

$$\varkappa_u h_u = \varkappa (h_o + h_u)$$

setzt, mit Hilfe der Beziehungen (1) und (21) die bekannte Knickbedingung des einseitig fest eingespannten Stabes mit konstanter Stabkraft und veränderlichem Trägheitsmoment

(25a) $$\operatorname{tg} \frac{\pi}{\varkappa} \cdot \frac{h_u}{h_u + h_o} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{\varkappa} \cdot \frac{h_o}{h_u + h_o} \sqrt{\frac{J_u}{J_o}} = \sqrt{\frac{J_u}{J_o}}$$

sowie die Knickbedingung des Stabes mit konstantem Trägheitsmoment und veränderlicher Stabkraft

(25b) $$\operatorname{tg} h_u \sqrt{\frac{P_u}{EJ}} \cdot \operatorname{tg} h_o \sqrt{\frac{P_o}{EJ}} = \sqrt{\frac{P_u}{P_o}}.$$

Für den zweigeschossigen Rahmen mit Fußgelenken folgt aus Gl. (22) mit $J_q = 0$, $\nu_q = \infty$

(26) $$\frac{\pi}{\varkappa_u}\left[\operatorname{tg} \frac{\pi}{\varkappa_u} + \beta\left(\frac{\pi}{\varkappa_o} - \operatorname{arc\,tg} \frac{6}{\nu_r} \cdot \frac{\varkappa_o}{\pi}\right)\right] = \frac{6}{\nu_m}.$$

Die Knickbedingung des vierseitigen Rahmens erhält man in Anlehnung an die Untersuchung des zweistöckigen Rahmens mit den Bezeichnungen (vgl. Bild 8)

(27) $$\nu_q = \frac{J}{J_q} \cdot \frac{b}{h} \quad \nu_r = \frac{J}{J_r} \cdot \frac{b}{h}$$

zu

(28) $$\operatorname{arc\,tg} \frac{\varkappa}{\pi} \cdot \frac{6}{\nu_q} + \operatorname{arc\,tg} \frac{\varkappa}{\pi} \cdot \frac{6}{\nu_r} = \frac{\pi}{\varkappa}.$$

Für $J_q = \infty$, $\nu_q = 0$ folgt die Knickbedingung des Rahmens mit fest eingespannten Pfostenfüßen

(29) $$-\frac{\pi}{\varkappa} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\varkappa} = \frac{6}{\nu_r}$$

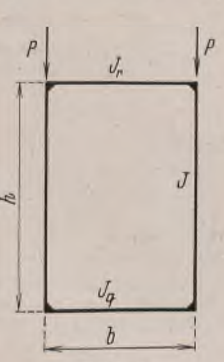


Bild 8.

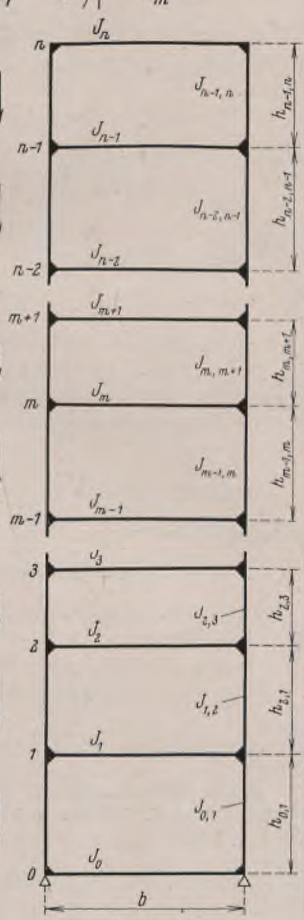


Bild 9.

und schließlich mit $J_q = 0$, $\nu_q = \infty$ die Knickbedingung des Zweigelenkrahmens

(30) $$\frac{\pi}{\varkappa} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{\varkappa} = \frac{6}{\nu_r}$$

b) Die Näherungslösung für den Einfeldrahmen.

Wir setzen zunächst voraus, daß der Rahmen keine Gelenkknoten enthält. Dann wird nach Bild 1 $\varepsilon = 1$, $\zeta = \varkappa$. Die Formänderungsarbeit auf den Strecken $h(\zeta - 1) = h(\varkappa - 1)$ wird, wenn wir das Moment in der Nähe der Einspannstellen konstant annehmen (vgl. Bild 9) und die Summenbildung über einen Pfostenstrang erstrecken,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_1 &= \sum_0^n \frac{P_{m,m-1}^2 f_{m,m-1}^2}{EJ_{m,m-1}} (\varkappa_{m,m-1} - 1)\, h_{m,m-1} \\
&= \sum_0^n \gamma_{m,m-1} (\varkappa_{m,m-1} - 1) \\
&= \gamma_{0,1}\left[(\varkappa_{0,1} - 1) + \left(\varkappa_{0,1} \cdot \frac{\varkappa_{1,2}}{\varkappa_{0,1}} - 1\right)\frac{\gamma_{1,2}}{\gamma_{0,1}} \right.\\
&\qquad \left. + \left(\varkappa_{0,1} \cdot \frac{\varkappa_{1,2}}{\varkappa_{0,1}} \cdot \frac{\varkappa_{2,3}}{\varkappa_{1,2}} - 1\right)\frac{\gamma_{1,2}}{\gamma_{0,1}} \cdot \frac{\gamma_{2,3}}{\gamma_{1,2}} + \ldots\right] \\
&= \gamma_{0,1}\left[\varkappa_{0,1}\left(1 + \frac{\varkappa_{1,2}}{\varkappa_{0,1}} \cdot \frac{\gamma_{1,2}}{\gamma_{0,1}} + \frac{\varkappa_{1,2}}{\varkappa_{0,1}} \cdot \frac{\varkappa_{2,3}}{\varkappa_{1,2}} \cdot \frac{\gamma_{1,2}}{\gamma_{0,1}} \cdot \frac{\gamma_{2,3}}{\gamma_{1,2}} + \ldots\right)\right.\\
&\qquad \left. - \left(1 + \frac{\gamma_{1,2}}{\gamma_{0,1}} + \frac{\gamma_{1,2}}{\gamma_{0,1}} \cdot \frac{\gamma_{2,3}}{\gamma_{1,2}} + \ldots\right)\right].
\end{aligned}$$

Hierin ist

$$\gamma_{0,1} = \frac{P_{0,1}^2 f_{0,1}^2}{EJ_{0,1}} \cdot h_{0,1},$$

$$\frac{\gamma_{m,m+1}}{\gamma_{m,m-1}} = \frac{P_{m,m+1}^2}{P_{m,m-1}^2} \cdot \frac{J_{m,m-1}}{J_{m,m+1}} \cdot \frac{f_{m,m+1}^2}{f_{m,m-1}^2} \cdot \frac{h_{m,m+1}}{h_{m,m-1}}.$$

Setzt man näherungsweise $\eta_{m,m+1} = \eta_{m,m-1}$, dann wird nach Gl. (13) und (8)

(31) $$\frac{f_{m,m+1}^2}{f_{m,m-1}^2} = \alpha_m^2 = \frac{J_{m,m+1}}{J_{m,m-1}} \cdot \frac{P_{m,m-1}}{P_{m,m+1}}$$

und damit

(32) $$\frac{\gamma_{m,m+1}}{\gamma_{m,m-1}} = \frac{P_{m,m+1}}{P_{m,m-1}} \cdot \frac{h_{m,m+1}}{h_{m,m-1}} = \delta_m.$$

Unter Benutzung von Gl. (8) und (16) wird weiter

(33) $$\frac{\varkappa_{m,m+1}}{\varkappa_{m,m-1}} \cdot \frac{\gamma_{m,m+1}}{\gamma_{m,m-1}} = \alpha_m \cdot \frac{P_{m,m+1}}{P_{m,m-1}} = \beta_m.$$

Damit ergibt sich schließlich

(34) $$\mathfrak{A}_1 = \gamma_{0,1}\left[\varkappa_{0,1}(1 + \beta_1 + \beta_1\beta_2 + \ldots) - (1 + \delta_1 + \delta_1\delta_2 + \ldots)\right].$$

Die Formänderungsarbeit der Riegel wird nach Gl. (14) und (16)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_2 &= \sum_0^n \frac{M_m^2 b}{6EJ_m} = \sum_0^n P_{m,m-1}^2 f_{m,m-1}^2 (1 + \beta_m)^2 \frac{b}{6EJ_m} \\
&= \vartheta_{0,1} \cdot \frac{b}{6EJ_1}\left[\frac{J_1}{J_0} + (1 + \beta_1)^2 + \frac{\vartheta_{1,2}}{\vartheta_{0,1}} \cdot \frac{J_1}{J_2}(1 + \beta_2)^2 + \ldots\right.\\
&\qquad \left. + \frac{\vartheta_{n-2,n-1}}{\vartheta_{0,1}} \cdot \frac{J_1}{J_{n-1}}(1 + \beta_{n-1})^2 + \frac{\vartheta_{n-1,n}}{\vartheta_{0,1}} \cdot \frac{J_1}{J_n}\right] \\
&= \vartheta_{0,1} \cdot \frac{b}{6EJ_1}\left[\frac{J_1}{J_0} + (1 + \beta_1^2) + \frac{\vartheta_{1,2}}{\vartheta_{0,1}} \cdot \frac{J_1}{J_2}(1 + \beta_2)^2\right.\\
&\qquad \left. + \frac{\vartheta_{1,2}}{\vartheta_{0,1}} \cdot \frac{\vartheta_{2,3}}{\vartheta_{1,2}} \cdot \frac{J_1}{J_3}(1 + \beta_3)^2 + \ldots\right].
\end{aligned}$$

Hierin ist $\vartheta_{0,1} = P_{0,1}^2 \cdot f_{0,1}^2$,

$$\frac{\vartheta_{m,m+1}}{\vartheta_{m,m-1}} = \frac{P_{m,m+1}^2}{P_{m,m-1}^2} \cdot \frac{f_{m,m+1}^2}{f_{m,m-1}^2} = \frac{J_{m,m+1}}{J_{m,m-1}} \cdot \frac{P_{m,m+1}}{P_{m,m-1}} = \beta_m^2.$$

Somit wird

(35) $$\mathfrak{A}_2 = \vartheta_{0,1} \cdot \frac{b}{6EJ_1}\left[\frac{J_1}{J_0} + (1 + \beta_1)^2 + \beta_1^2(1 + \beta_2)^2 \cdot \frac{J_2}{J_1} + \ldots\right].$$

Aus Gl. (2) ergibt sich nunmehr

$$\varkappa_{0,1}\left(1+\beta_1+\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_2\beta_3+\ldots\right)=\left(1+\delta_1+\delta_1\delta_2+\delta_1\delta_2\delta_3+\ldots\right)$$
$$+\frac{\nu}{6}\left[\frac{J_1}{J_0}+\left(1+\beta_1\right)^2+\beta_1^2\left(1+\beta_2\right)^2\cdot\frac{J_1}{J_2}+\beta_1^2\beta_2^2\left(1+\beta_3\right)^2\cdot\frac{J_1}{J_3}+\ldots\right]$$

oder mit den Abkürzungen

(36) $$B_m=B_{m-1}\beta_m \qquad D_m=D_{m-1}\delta_m$$

(37) $$\varkappa_{0,1}\left(1+\sum_1^{n-1}B_m\right)=1+\sum_1^{n-1}D_m+\frac{\nu}{6}\left[\frac{J_1}{J_0}+\sum_1^{n}B_{m-1}^2\left(1+\beta_m\right)^2\cdot\frac{J_1}{J_m}\right].$$

Hierin ist $\beta_0=\delta_0=1$ und $\beta_n=0$ zu setzen, so daß allgemein

(38) $$B_1=\beta_1,\ D_1=\delta_1,\ B_{n-1}^2\left(1+\beta_n\right)^2=B_{n-1}^2.$$

Mit $B_0=1$, $D_0=1$ kann man Gl. (37) auch wie folgt schreiben:

(37a) $$\varkappa_{0,1}\sum_0^{n-1}B_m=\sum_0^{n-1}D_m+\frac{\nu}{6}\left[\frac{J_1}{J_0}+\sum_1^{n}B_{m-1}^2\left(1+\beta_m\right)^2\frac{J_1}{J_m}\right].$$

(39) Hierin ist $\nu=\frac{J_{0,1}}{J_1}\cdot\frac{b}{h_{0,1}}$.

Sonderfälle:

1. Für $J_0=\infty$, $J_{m,m+1}=J_{m,m-1}$, $J_m=\text{const}$, $h=\text{const}$, $P=\text{const}$ wird $\varkappa=\text{const}$, $\beta_m=1$, $B_m=1$, $\delta_m=1$, $D_m=1$ und damit

(40) $$\varkappa=1+\frac{\nu}{6n}\left[4(n-1)+1\right].$$

Durch mathematische Vereinfachung der von Chwalla hergeleiteten strengen Lösung für den Rahmenstab hat Puwein[3]) für diesen Sonderfall folgende Näherungsformel ermittelt:

$$\varkappa=1+\frac{2}{3}\cdot\nu\cdot\cos^2\frac{\pi}{4n}.$$

Tafel 2.

n	nach Gl. (40)	nach Puwein
1	$1+0{,}167\,\nu$	$1+0{,}333\,\nu$
2	$1+0{,}417\,\nu$	$1+0{,}569\,\nu$
3	$1+0{,}500\,\nu$	$1+0{,}621\,\nu$
4	$1+0{,}541\,\nu$	$1+0{,}640\,\nu$

In Tafel 2 sind die Ergebnisse für verschiedene Stockwerkzahlen einander gegenübergestellt.

Während bei $n=\infty$ beide Formeln übereinstimmen, ist beim einstöckigen Rahmen der Faktor von ν nach Puwein doppelt so groß wie nach Gl. (40). Unser Ergebnis wird durch Gl. (29) bestätigt. Da $\varkappa$ um ein geringes Maß größer als 1 ist, kann man $\cos\frac{\pi}{\varkappa}=-1$, $\sin\frac{\pi}{\varkappa}=\pi-\frac{\pi}{\varkappa}$ setzen. Damit folgt aus Gl. (29) die Knickbedingung des einstöckigen Rahmens mit fest eingespannten Pfostenfüßen

(41) $$\varkappa=1+\frac{\nu}{6},$$

2. Beim zweistöckigen Rahmen erhält man mit $\beta_1=\beta$, $\beta_2=\beta_n=0$, $\delta_1=\delta$ die Knickbedingung

(42) $$\varkappa_{0,1}(1+\beta)=1+\delta+\frac{\nu}{6}\left[\frac{J_1}{J_0}+(1+\beta)^2+\beta^2\cdot\frac{J_1}{J_2}\right].$$

Für $J_0=\infty$ ergibt sich die Knickbedingung des zweistöckigen Rahmens mit fest eingespannten Pfostenfüßen

(43) $$\varkappa_{0,1}(1+\beta)=1+\delta+\frac{\nu}{6}\left[(1+\beta)^2+\beta^2\cdot\frac{J_1}{J_2}\right].$$

In beiden Fällen ist $\varkappa_{1,2}$ aus Gl. (9) zu errechnen.

Für $\beta=\delta=0$ folgt die Knickbedingung des vierseitigen Rahmens

$$\varkappa=1+\frac{\nu}{6}\left(\frac{J_1}{J_0}+1\right)$$

oder mit den Bezeichnungen von Bild 8 und den Abkürzungen (27)

(44) $$\varkappa=1+\frac{1}{6}\left(\nu_r+\nu_q\right).$$

3. Beim Rahmen mit Gelenkknoten wollen wir uns auf den Fall beschränken, daß im Punkte 0 Gelenke angeordnet sind. Dann wird in den Pfosten $0-1$ $\varepsilon=2$, $\zeta=\frac{\varkappa}{2}$ und ihr Anteil an $\mathfrak{A}_1$

$$\mathfrak{A}_1^{0,1}=\frac{P_{0,1}^2 f_{0,1}^2}{E J_{0,1}}\left(\frac{\varkappa_{0,1}}{2}-1\right)h_{0,1}=\gamma_{0,1}\left(\frac{\varkappa_{0,1}}{2}-1\right).$$

Die Beziehungen (31) bis (33) bleiben bestehen. In dem Ausdruck für $\mathfrak{A}_2$ verschwindet das Glied $\frac{J_1}{J_0}$. Die Knickbedingung lautet dann

(45) $$\varkappa_{0,1}\left(\frac{1}{2}+\sum_1^{n-1}B_m\right)=1+\sum_1^{n-1}D_m+\frac{\nu}{6}\sum_1^{n}B_{m-1}^2\left(1+\beta_m\right)^2\frac{J_1}{J_m}.$$

Beim zweistöckigen Rahmen mit gelenkig gelagerten Füßen lautet die Knickbedingung

(46) $$\varkappa_{0,1}\left(\frac{1}{2}+\beta\right)=1+\delta+\frac{\nu}{6}\left[(1+\beta)^2+\beta^2\cdot\frac{J_1}{J_2}\right].$$

Für $\beta=\delta=0$ ergibt sich die Knickbedingung des Zweigelenkrahmens

(47) $$\varkappa=2+\frac{\nu}{3}.$$

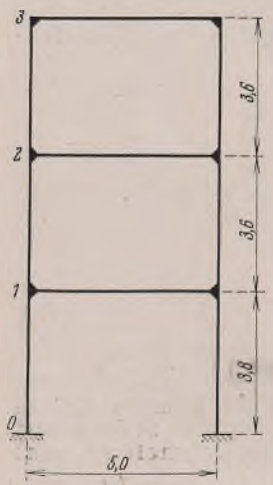


Bild 10.

Zahlenbeispiele.

1. Dreistöckiger Rahmen mit fest eingespannten Pfostenfüßen nach Bild 10.

Pfosten	P	J	Riegel	J	$\frac{J_1}{J_m}$
0—1	19	4250	1	7590	1
1—2	10	3060	2	5740	1,32
2—3	2	935	3	935	8,11

Man erhält nach

Gl. (39) $\nu=\frac{4250}{7590}\cdot\frac{5{,}0}{3{,}8}=0{,}738,$

Gl. (8) $\alpha_1=\sqrt{\frac{3060}{4250}\cdot\frac{19}{10}}=1{,}170,\quad \alpha_2=\sqrt{\frac{935}{3060}\cdot\frac{10}{2}}=1{,}235,$

Gl. (16) $\beta_1=1{,}170\cdot\frac{10}{19}=0{,}616,\quad \beta_2=1{,}235\cdot\frac{2}{10}=0{,}247,$

Gl. (32) $\delta_1=\frac{10}{19}\cdot\frac{3{,}6}{3{,}8}=0{,}498,\qquad \delta_2=\frac{2}{10}=0{,}2,$

Gl. (36) u. (38) $B_2=0{,}616\cdot0{,}247=0{,}152,\quad D_2=0{,}498\cdot0{,}2=0{,}0996,$

Gl. (37) $\varkappa_{0,1}(1+0{,}616+0{,}152)=1+0{,}498+0{,}0996$
$$+\frac{0{,}738}{6}\left[(1+0{,}616)^2+0{,}616^2(1+0{,}247)^2 1{,}32+0{,}247^2\cdot8{,}11\right].$$

Hieraus ergibt sich $\varkappa_{0,1}=1{,}17$ und nach Gl. (9)

$$\varkappa_{1,2}=1{,}17\cdot1{,}17\cdot\frac{3{,}8}{3{,}6}=1{,}44,\quad \varkappa_{2,3}=1{,}44\cdot1{,}235=1{,}78.$$

Die strenge Berechnung liefert $\varkappa_{0,1}=1{,}16$.

2. Zweistöckiger Rahmen mit fest eingespannten Pfostenfüßen.

Mit $\nu=1$, $J_2=0{,}5J_1$, $J_{0,1}=1{,}75J_{1,2}$, $P_{0,1}=1{,}5P_{1,2}$, $h_{0,1}=1{,}2h_{1,2}$ wird

$$\alpha=\sqrt{\frac{1}{1{,}75}\cdot1{,}5}=0{,}927,\quad \beta=0{,}927\cdot\frac{1}{1{,}5}=0{,}618,$$
$$\delta=\frac{1}{1{,}5}\cdot\frac{1}{1{,}2}=0{,}556;$$

somit nach Gl. (43)

$$\varkappa_{0,1}(1+0{,}618)=1+0{,}556+\frac{1}{6}\left[(1+0{,}618)^2+0{,}618^2\cdot2\right],$$
$$\varkappa_{0,1}=1{,}31\ \text{ und daraus }\ \varkappa_{1,2}=1{,}31\cdot0{,}927\cdot1{,}2=1{,}473.$$

Durch Probieren findet man aus der strengen Knickbedingung (23) $\varkappa_{0,1}=1{,}28$. Wir werden später zeigen, daß man durch eine Verfeinerung des Näherungsverfahrens auch diese geringe Differenz von 2% beseitigen kann.

3. Vierseitiger Rahmen.

Für $h=10{,}0$ m, $b=6{,}0$ m, $J=J_r=J_q=47600\ \text{cm}^4$, $\nu_r=\nu_q=0{,}6$ wird nach Gl. (44)

$$\varkappa=1+\frac{1}{6}(0{,}6+0{,}6)=1{,}2,\quad P=\frac{\pi^2\cdot2100\cdot47600}{(1{,}2\cdot10{,}0)^2}=685\ \text{t}.$$

Für $h=27{,}77$ m, $b=15{,}90$ m, $J=1\,281\,000\ \text{cm}^4$, $J_r=13\,450\,000\ \text{cm}^4$, $J_q=5\,037\,000\ \text{cm}^4$ wird

$$\nu_r=\frac{15{,}90}{27{,}77}\cdot\frac{1\,281\,000}{13\,450\,000}=0{,}0546,\quad \nu_q=\frac{15{,}90}{27{,}77}\cdot\frac{1\,281\,000}{5\,037\,000}=0{,}1457,$$
$$\varkappa=1+\frac{1}{6}(0{,}0546+0{,}1457)=1{,}033,\quad P=\frac{\pi^2\cdot2100\cdot1\,281\,000}{(1{,}033\cdot2777)^2}=3220\ \text{t}.$$

Beide Zahlenbeispiele sind von Hertwig und Pohl[4]) nach der strengen Theorie untersucht worden. Die Ergebnisse weichen um weniger als 1% ab. (Schluß folgt.)

[3]) Puwein, Die Knickfestigkeit des Stockwerkrahmens, Stahlbau 1936, S. 203.

[4]) Hertwig u. Pohl, Die Stabilität der Brückenendrahmen. Stahlbau 1936, S. 129.

Das Deutsche Haus auf der Internationalen Wasser-Ausstellung Lüttich 1939.

Von Ing. **Erich Pithan**, Berlin, und **Horst Orbanowsky**, Düsseldorf.

Das Deutsche Haus auf der Internationalen Wasser-Ausstellung Lüttich 1939 wurde im Auftrage der Reichsbaudirektion Berlin, von Herrn Prof. Fahrenkamp, Düsseldorf, entworfen. Die konstruktive Durchbildung erfolgte vom Büro des Herrn Dipl.-Ing. Hünnebeck, die statische Berechnung wurde ebenfalls dort aufgestellt. Das Deutsche Haus, welches unmittelbar an der Maas, in der Nähe des neugeschaffenen König-Albert-Kanals steht, hat eine Ausstellungsfläche von 4800 m². Die gesamte bebaute Fläche beträgt rd. 6800 m². Der Bau besteht aus einem 22 m hohem Turm als Ehrenhalle, einer Längshalle von etwa 80 m Länge und 33 m Breite, einer Querhalle von etwa 88 m Länge und 33 m Breite bei 14 m Höhe als Ausstellungshallen und einem Saalanbau von etwa 25 m Länge und etwa 10 m Breite, in dessen Obergeschoß die Verwaltungsräume liegen. Der Grundriß zeigt ein klares Kreuz (Bild 1). Über dem Haupteingang ist das von Prof. Mages gestaltete Hoheitszeichen angeordnet.

Haupttragkonstruktion kam also nur eine Gründung auf Pfählen in Frage. Für das ganze Haus waren 570 Holzpfähle von etwa 10 bis 12 m Länge und einem mittleren Durchmesser von 28 cm erforderlich. Die Tragfähigkeit pro Pfahl beträgt 20 bis 25 t.

Mit den Rammarbeiten wurde am 15. Januar 1939 begonnen. Während des Rammens der Pfähle stieß man auf einen 4,20 m breiten Abwasserkanal, der die Fundamente der Längshalle unter einem flachen Winkel kreuzte, er mußte auf eine Länge von 55 m durch schwere Eisenbetonbalken überbrückt werden.

Über dem Pfahlrost wurden Eisenbetonbankette angeordnet, die unmittelbar nach Fertigstellung der ersten Pfähle an der Längshalle hergestellt wurden.

Die Betonarbeiten an der Querhalle gestalteten sich etwas umständlicher. Der maasabseits gelegene Teil dieser Halle mußte wegen des um

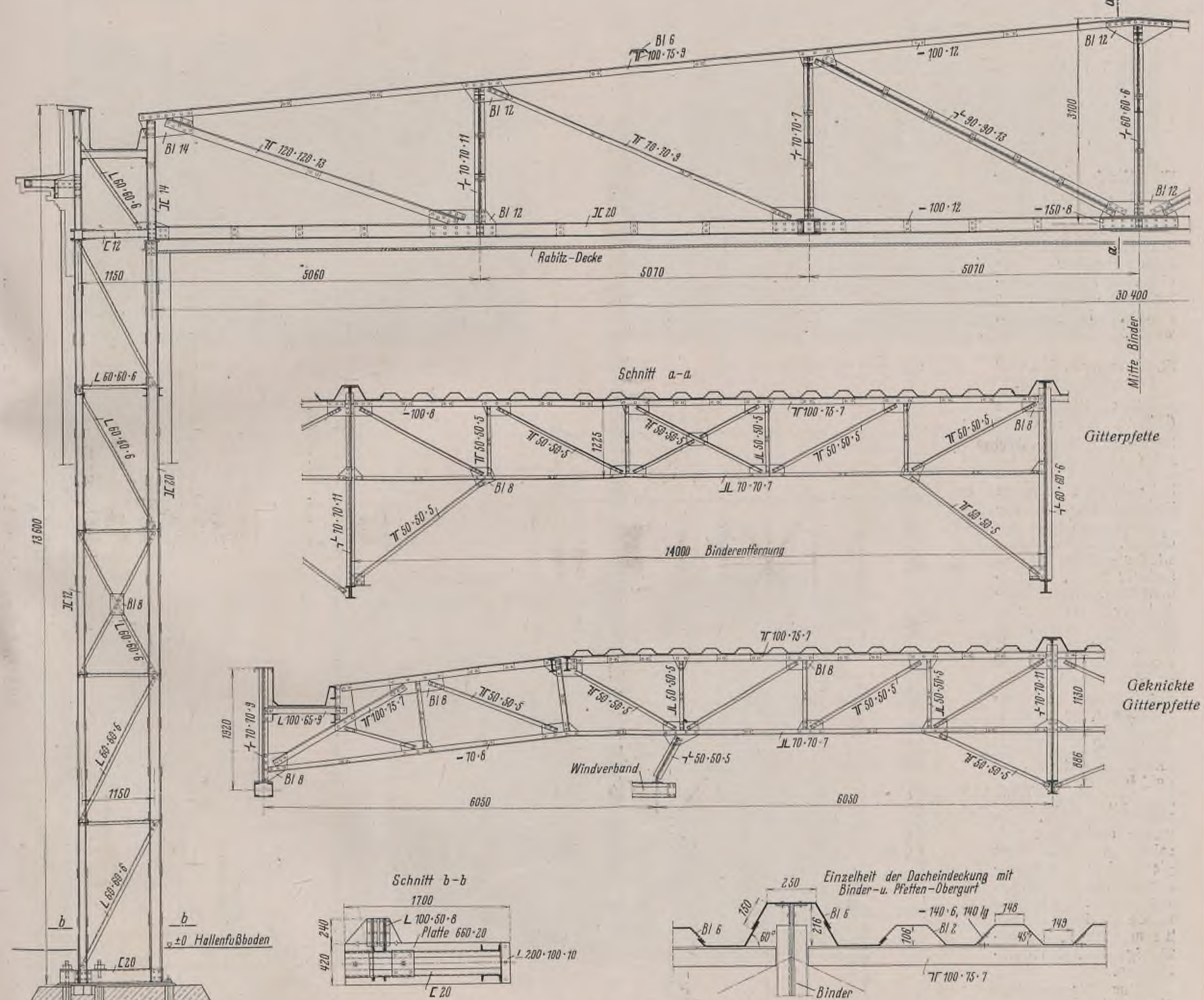


Bild 3. Tragkonstruktion und Dacheindeckung.

Gründungs- und Betonarbeiten.

Als mit dem Bau des Deutschen Hauses begonnen wurde, waren die Bauten der anderen beteiligten Nationen schon weit fortgeschritten. Es war daher schon bekannt, daß die Bodenverhältnisse nicht günstig waren. Die Probebohrungen ergaben dann folgendes Bild: Bis auf 4 bis 5 m Tiefe bestand der Baugrund aus ausgefülltem tonigen Sand, in größeren Tiefen lag Ton, durchsetzt mit Sand, Kies und Pflanzenresten, und erst in etwa 7 bis 8 m Tiefe fand sich grober Kies, der als tragfähig angesehen werden konnte. Der Grundwasserspiegel wurde in 6 m Tiefe festgestellt und lag etwa 2 m unter dem Spiegel der Maas. Für die

4 m abfallenden Geländes vollständig unterkellert werden. Der sich hierdurch ergebende Raum wurde zur Aufnahme der Umspannstation, der Schaltanlage, sowie der Umkleide-, Dusch-, Kasino- und Wirtschaftsräume für das Ausstellungspersonal nutzbar gemacht. Die Oberkante des Hallenfußbodens lag 1,10 m über Gelände. Da während der Bauzeit die Anordnung der Ausstellungsgegenstände in den Hallen noch nicht feststand, wurde sowohl in der Längs- als auch in der Querhalle eine Zwischendecke eingebaut. Es konnten also jederzeit Kabel- und Rohrleitungen beliebig verlegt werden. Für diese Zwischendecke wurden Bimsbetonplatten verwendet, welche auf einer Trägerlage verlegt wurden. Die

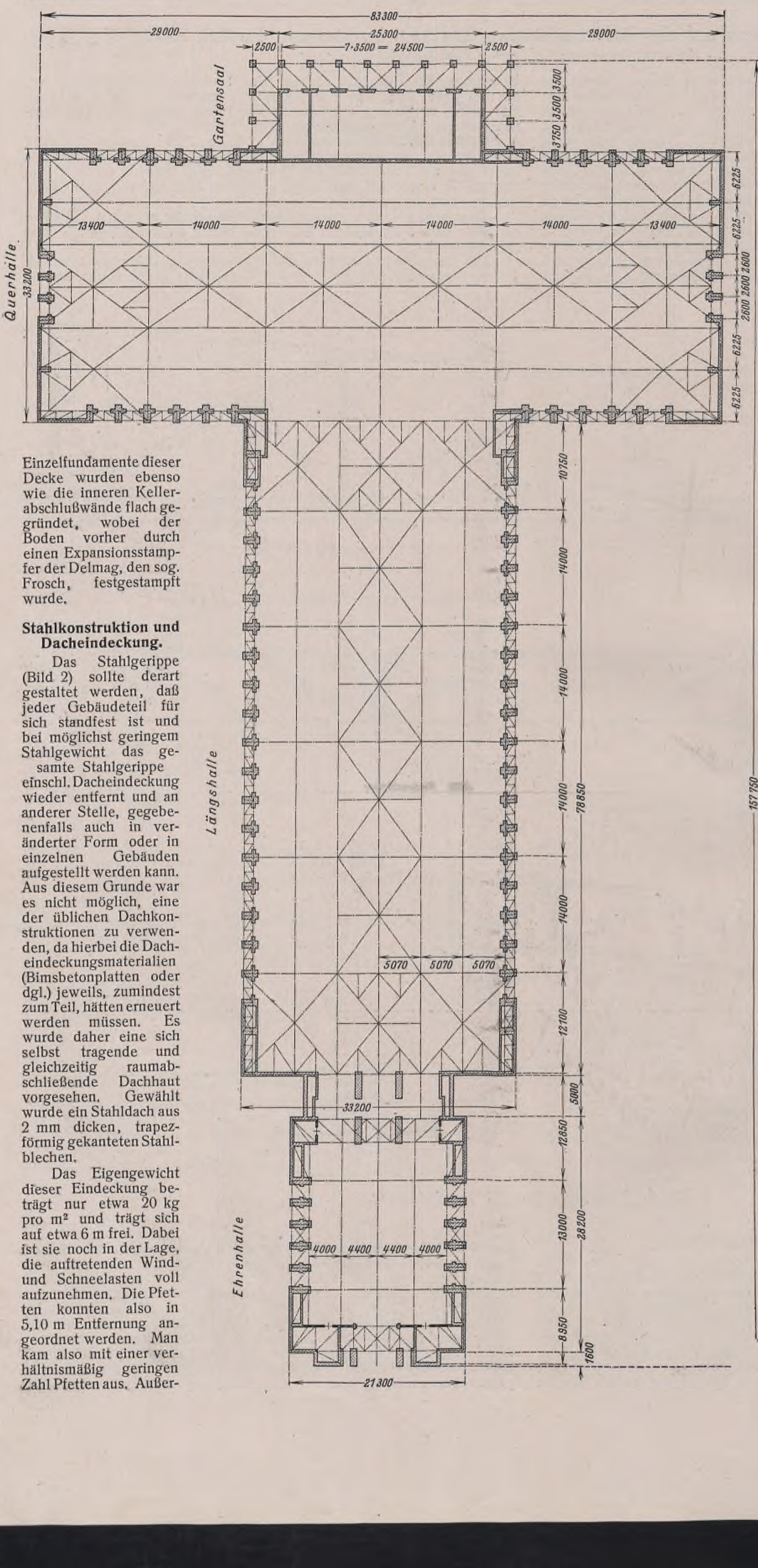


Bild 1. Grundriß.

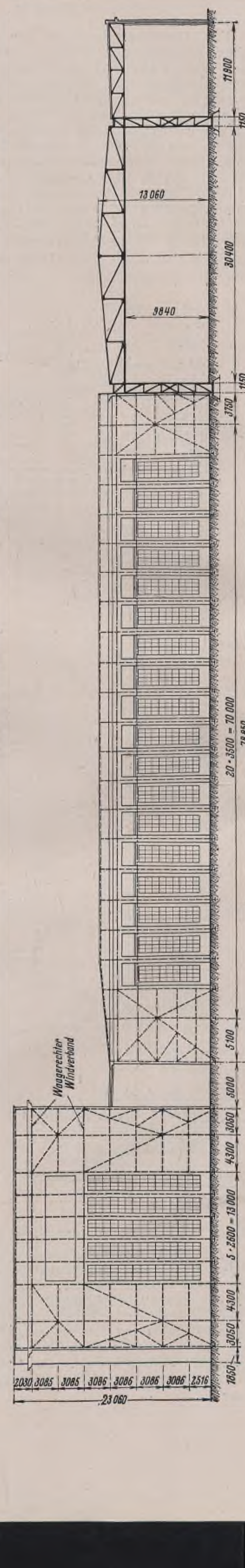


Bild 2. Längsansicht und Schnitt durch die Querhalle.

Einzelfundamente dieser Decke wurden ebenso wie die inneren Kellerabschlußwände flach gegründet, wobei der Boden vorher durch einen Expansionsstampfer der Delmag, den sog. Frosch, festgestampft wurde.

Stahlkonstruktion und Dacheindeckung.

Das Stahlgerippe (Bild 2) sollte derart gestaltet werden, daß jeder Gebäudeteil für sich standfest ist und bei möglichst geringem Stahlgewicht das gesamte Stahlgerippe einschl. Dacheindeckung wieder entfernt und an anderer Stelle, gegebenenfalls auch in verändertter Form oder in einzelnen Gebäuden aufgestellt werden kann. Aus diesem Grunde war es nicht möglich, eine der üblichen Dachkonstruktionen zu verwenden, da hierbei die Dacheindeckungsmaterialien (Bimsbetonplatten oder dgl.) jeweils, zumindest zum Teil, hätten erneuert werden müssen. Es wurde daher eine sich selbst tragende und gleichzeitig raumabschließende Dachhaut vorgesehen. Gewählt wurde ein Stahldach aus 2 mm dicken, trapezförmig gekanteten Stahlblechen.

Das Eigengewicht dieser Eindeckung beträgt nur etwa 20 kg pro m² und trägt sich auf etwa 6 m frei. Dabei ist sie noch in der Lage, die auftretenden Wind- und Schneelasten voll aufzunehmen. Die Pfetten konnten also in 5,10 m Entfernung angeordnet werden. Man kam also mit einer verhältnismäßig geringen Zahl Pfetten aus. Außer-

dem ist aber die Eindeckung auch noch stark genug, um den größten Teil der Lasten, die sonst vom Binderobergurt aufgenommen werden, zu übernehmen. Eine Verstärkung der Dachbleche auf 6 mm Dicke war dabei nur jeweils über den Bindern, die in 14 m Entfernung angeordnet sind, notwendig. Der Binderobergurt konnte dadurch auch ganz leicht ausgeführt werden.

Bei der Planung des Stahlgerippes war zu berücksichtigen, daß infolge des schlechten Baugrundes und der notwendigen Pfahlgründung eine Anwendung eingespannter Stützen nicht möglich war. Das Stahltragwerk der Längs- und der Querhalle wurde grundsätzlich vollkommen gleichmäßig ausgebildet. Die verschiedenen Längen der Dachbinder der Querhalle konnten durch Vorsetzen entsprechender Anbaustücke ausgeglichen werden. Als Haupttragwerk dienten satteldachförmige, 30,4 m frei gespannte Fachwerkbinder mit 14 m Binderabstand (Bild 3). Während der Untergurt und die Ausfachung dieser Fachwerkbinder in üblicher Weise aus Profilstahl hergestellt wurden, bestehen die Obergurte aus den trapezförmig gekanteten, bereits obenerwähnten 6 mm dicken Stahlblechen. Zwischen den Bindern sind Gitterpfetten von 14 m Spannweite und 1,25 m Höhe und einem Pfettenabstand von rd. 5,10 m vorhanden.

Am Anschluß der Querhalle an die Längshalle mußte in der Längshalle ein besonders stark ausgeführter Dachbinder vorgesehen werden, der neben den eigenen Dachlasten noch zusätzlich die Auflagerlast aus dem mittleren Dachbinder der Querhalle aufzunehmen hatte. Der mittlere Dachbinder der Querhalle hat eine um die Breite der Fachwerkstütze größere Spannweite als die normalen Dachbinder. Er wurde jedoch gleichfalls normal ausgeführt und erhielt zusätzlich ein besonderes Endfeld. Nach Abschrauben dieses Endfeldes kann also auch dieser Binder, bei einem späteren Aufstellungszustand, als normaler Binder Verwendung finden.

Die gekanteten Dachbleche des zweigeschossigen Saalanbaues werden von I-Pfetten getragen, die wiederum auf besonderen Dachbindern ruhen. Die Dachbinder sind als unsymmetrische Fachwerkbinder ausgebildet, deren Stäbe durchweg aus Winkeln bestehen, so daß das Regenwasser in eine zwischen Querhalle und Anbau durchlaufende Rinne abfließen kann. Die Wand- und die Säulenstützen sind Breitflanschprofile. Die Zwischendecke ist eine Holzbalkendecke auf I-Unterzügen. An den beiden



Bild 4. Dacheindeckung aus gekanteten Stahlblechen.



Bild 5. Blick auf das Dach der Längshalle.

Auf diesen Pfetten ruhen dann die bereits erwähnten 2 mm dicken gekanteten Dachbleche. Die Dachbinder werden von räumlichen 11 m hohen Fachwerkstützen getragen, die als Pendelstützen berechnet sind. Der Abstand der inneren und äußeren Stützen beträgt 1,15 m. Zur Aussteifung der Wände und insbesondere für die Aufnahme der Ausmauerung und der Verkleidung aus Werksteinplatten sind zwischen den Hauptstützen in Abständen von 3,5 m leichte Fachwerkstützen als Windstützen vorgesehen. Sie legen sich oben gegen einen in der Höhe der Untergurte der Binder liegenden Windverteilungsverband, welcher die Aufgabe hat, die Windlasten aus den Windstützen zu den Hauptstützen zu übertragen. Zur Aufnahme der Windkräfte auf die Hallenlängsseite ist in der Ebene der Binderuntergurte sowohl bei der Längs- als auch bei der Querhalle ein durchlaufender Diagonal-Windverband mit einer Verbandshöhe von 10,14 m vorgesehen. Die Untergurte der Dachbinder, welche knicksicher ausgebildet sind, übertragen die Knotenlasten von den Hauptstützen in den Längswindverband. Bei der Anordnung der Vertikalverbände in den Hallenwänden war auf die durchgehenden Tür- und Fensteröffnungen von 10 m Höhe Rücksicht zu nehmen. Aus diesem Grunde war es nicht möglich, in an die Längshalle anschließenden Feldern der Querhalle Vertikalverbände vorzusehen. Die Windkräfte aus dem Längswindverband der Längshalle mußten daher mittels knicksicher ausgebildeter Wandriegel in die Eckverbände der Querhalle geleitet werden. Im übrigen wurden in allen Eckfeldern der Halle vertikale Zugdiagonalen angeordnet. Die Endfelder der beiden Längswindverbände wurden durch Einschaltung eines sekundären Systems als Querwindverbände mit 14 m Verbandshöhe ausgebildet. Im Hinblick auf die spätere Wiederaufstellung mußte die gesamte Windableitung so bemessen werden, als ob jede Halle allein für sich stände, ohne Berücksichtigung etwaiger Windschatten.

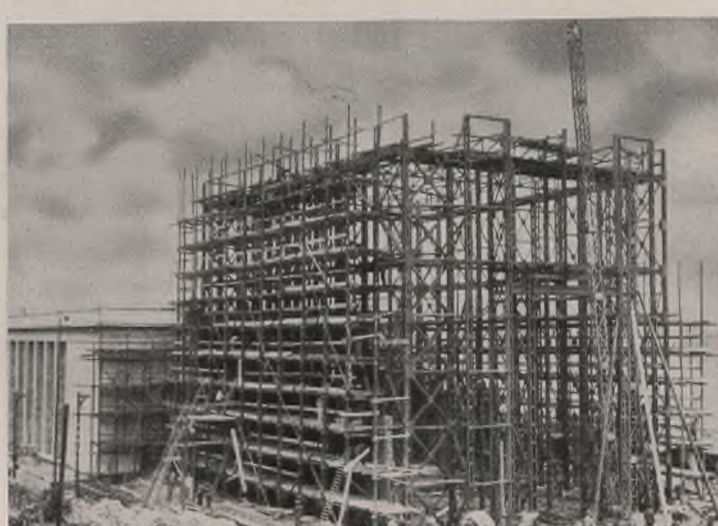


Bild 6. Aufstellung der Stahlkonstruktion der Ehrenhalle.

Die Dachkonstruktion aus gekanteten Stahlblechen (Bild 4 und 5) mußte an drei Stirnseiten abgewalmt werden (Bild 7), damit der First nicht über der Attika sichtbar wurde. Die Abwalmung konnte erzielt werden durch Knickung der Gitterpfetten in der Gratlinie (Bild 3), so daß anormale Dachbinder vermieden wurden. Besonders schwierig gestaltete sich die Ausbildung der Grate in den Walmlinien. Die Dichtigkeit wurde hier durch Anordnung einer geschweißten Stahlblechkappe erzielt.

Schmalseiten des Anbaues sind vertikale Zugdiagonalen eingezogen zur Aufnahme der Windkräfte. Zwischen den Wandstützen und den Säulenstützen ist ein horizontaler kranzförmiger Diagonalwindverband in Höhe der Untergurte der Dachbinder vorgesehen. Er schließt an der Querhalle an den Windverteilungsverband an. Dieser kranzförmige Verband überträgt die Windkräfte auf die Längsseite des Anbaues in üblicher Weise in die Verteilungsverbände der Schmalseiten. Bei Wind auf die Querwände wirkt er jedoch als Zweigelenkrahmen und leitet die Windkräfte über den Windverteilungsverband der Querhalle in den Längswindverband der Querhalle. Der Rahmenschub wird durch die Außengurte der Windverteilungsverbände in die vertikalen Eckverbände der Querhalle übertragen.

Die Ehrenhalle (Turmbau) ist gleichfalls mit gekanteten 2 mm dicken Stahlblechen abgedeckt, die auf Gitterpfetten mit einem Pfettenabstand von 4 m bzw. 4,40 m ruhen. Die beiden über 16,80 m frei gespannten Dachbinder sind als satteldachförmige einwandige Fachwerkbinder, mit einer Konstruktionshöhe von 1,80 m in Bindermitte und 1,20 m an den Binderenden, ausgebildet. Als Obergurt der Binder dient wiederum ein Teil der gekanteten Dachbleche. Die Dachbinder ruhen auf 21,6 m hohen zweiwandigen Fachwerkstützen aus ⊏-Profilen mit einer Konstruktionshöhe von 1,92 m (Bild 5). Die Ausfachung besteht aus gekreuzten Zugdiagonalen und Pfosten. Zwischen den Hauptstützen sind in der Längswand zwischen den Fensternischen zusätzliche Fachwerkstützen zur Aussteifung der Wände vorgesehen. Diese Stützen sind grundsätzlich so ausgeführt wie die Hauptstützen, nur entsprechend leichter. Die vordere Eingangsseite der Halle und die Rückseite erhalten eine Wandausfachung aus zweiwandigen Fachwerkstützen und horizontalen I-Riegeln. In der Mitte über Eingang und entsprechend auf der Rückseite über dem Durchgang ist eine kurze Windstütze, aus I-Profilen, angebracht.

Zur Aussteifung dieser Halle sind zwei kranzförmige umlaufende horizontale Windverbände angeordnet. Der untere dieser Verbände liegt 15 m und der obere Verband 21 m über Hallenflur. An den Längsseiten und der Rückseite der Halle sind die Verbände zwischen den inneren und äußeren Stielen der Fachwerkstützen angeordnet. An der Vorderseite liegen die Fachwerkstützen in einem 1,60 m breiten Vorsprung, so daß die Außengurte der Windverbände an dem inneren Stiel der

Fachwerkstütze vorbeilaufen. Sämtliche Stützen der Ehrenhalle werden also von zwei Verbänden gehalten. Bei der Berechnung der Stützen sind dieselben als durchlaufende Träger auf drei Stützen behandelt worden. Die Elastizität der Verbände wurde jedoch nicht in Ansatz gebracht. Bei dem Nachweis der beiden Verbände wurde die Kontinuität der Stützen bei der Berechnung des unteren Verbandes berücksichtigt, jedoch bei dem oberen Verband ungünstig vernachlässigt.

An den vier Ecken der Halle sind Vertikalverbände vorgesehen. In den Längswänden bestehen diese aus zwei übereinanderliegenden Zugdiagonalen, zwischen denen der knicksicher ausgebildete Außengurt des unteren horizontalen Längswindverbandes als Pfosten wirkt. Diese Verbände weisen eine Verbandshöhe von 7,35 m auf und sind so bemessen, daß je zwei den gesamten anteiligen Wind auf die Vorderseite oder Rückseite der Halle aufnehmen können. Die Vertikalverbände in der Querwand boten jedoch einige Schwierigkeiten, da nur eine Feldbreite von 3,05 m für dieselben zur Verfügung stand. Sie wurden als unten eingespannte Fachwerkstützen mit gekreuzten Zugdiagonalen aus Winkelstahl bei einer Feldweite von rd. 3,10 m ausgebildet. Der Wind auf die Hallenlängsseite wird von insgesamt vier Verteilungsverbänden aufgenommen. Zur Übertragung der Windkräfte auf die der Windseite abgewandten Verbände dienen die Außengurte der unteren und der oberen horizontalen Querwindverbände.

Über dem 5,60 m breiten Eingang wurde ein Unterzug aus I $42\,^1/_2$ mit zwei ⊏ 26 verstärkt angebracht, während der Unterzug über dem gleichfalls 5,60 m breiten Durchgang zur Längshalle von zwei I $42\,^1/_2$ gebildet ist.

Das gesamte Dachtragwerk wurde berechnet für ein Eigengewicht von 90 kg/m² einschließlich einer Rabitzdecke und für eine Schneelast von 75 kg/m². Die Windbelastung wurde nach den alten preußischen Bestimmungen mit 100 kg/m² für die Wände der Längs- und Querhalle und mit 125 kg/m² für die Wände der Ehrenhalle eingesetzt. Für die Bemessung der Hauptstützen wurde neben der Auflagerlast der Dachbinder und des Winddrucks noch zusätzlich das Gewicht der Schwemmsteinausmauerung der Pfeiler berücksichtigt, da angenommen wurde, daß die Ausmauerung der Fachwerkstützen zum Teil wenigstens von diesen getragen werden muß, sowie die Lasten aus Attika und Gesims.

Die Kellerdecken wurden für ein Eigengewicht von 225 kg/m² und eine Nutzlast von 750 kg/m² berechnet.

Unter Berücksichtigung der vorstehenden Lasten ergaben sich für den gesamten Bau folgende Stahlgewichte:

1.	Dachkonstruktion der Längs- und Querhalle einschl. Dachbleche	250 t
2.	Gartensaal mit Zwischendecke und Stahlstützen für den Säulengang	70 t
3.	Stahlgerüst für Längs- und Querhalle, d. h. Haupt-, Nebenstützen, Riegelausfachung usw.	260 t
4.	Ehrenhalle, Stahlgerüst mit Dachkonstruktion, Ausfachung usw.	200 t
5.	Trägerlage für Längs- und Querhalle einschl. Unterkellerung der Querhalle, bestehend aus Stahlstützen, Unterzügen und Deckenträgern	160 t
		940 t



Bild 7. Blick auf das fertiggestellte Gebäude.



Bild 8. Ansicht mit der Ehrenhalle im Vordergrund.

Der Zusammenbau des Stahltragwerks wurde am 10. Februar 1939 mit dem Errichten der Längshalle begonnen. Gleichzeitig mit den Stützen, Bindern und Pfetten wurde auch die Trägerlage für den Fußboden verlegt. Es wurde dadurch ermöglicht, nachdem erst zwei Binderfelder von je 14 m erstellt waren, mit den Ausbauarbeiten zu beginnen. Als letzte wurde die Ehrenhalle errichtet (Bild 6), und am 8. April 1939 war die Montage des gesamten Stahltragwerks beendet.

Trotz der sich beim Bau ergebenden Schwierigkeiten konnte das gesamte Stahlgerüst von rd. 1000 t in zwei Monaten errichtet werden. Die Ausmauerung, das Verkleiden mit Werksteinen, die Ausbauarbeiten wurden jeweils fast gleichzeitig mit dem Errichten der Stahlkonstruktion durchgeführt, so daß das gesamte Deutsche Haus rechtzeitig fertiggestellt und die Ausstellung planmäßig am 22. Mai 1939 eröffnet werden konnte. Bild 7 u. 8 zeigen Ansichten des fertiggestellten Bauwerks.

Die örtliche Bauleitung hatte Herr Assistent Brinkmann von der Reichsbaudirektion Berlin. Die Gründungs- und Betonarbeiten wurden von der Firma Arbeitsgemeinschaft Siemens-Bauunion, Berlin, Heinemann und Busse, Aachen, ausgeführt. Den Auftrag auf die Stahlkonstruktion und Dacheindeckung erhielt die Firma Mannesmann-Stahlblechbau, A.-G., Berlin, die die gesamten Arbeiten in Gemeinschaftsarbeit mit der Firma Arnold Georg, A.-G., Neuwied, durchführte.

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt. — Verlag: Wilh. Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W 9.
Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

DER STAHLBAU

Schriftleitung:
Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule
Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599
Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61
Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage zur Zeitschrift **DIE BAUTECHNIK** Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

13. Jahrgang | BERLIN, 7. Juni 1940 | Heft 12/13

Vorschlag und Kritik einer Bemessungsformel bei außermittig beanspruchten Knickstäben.

Von Professor Dr. Dr.-Ing. **Willy Gehler**, Dresden.

In dem Entwurf „Knick- und Beulvorschriften für Baustahl" (DIN E 4114 vom 1. 11. 1939) wurde erstmalig versucht, das gesamte Gebiet der Stabilitätsfragen im Stahlbau in amtlichen Bestimmungen für die Fachwelt nutzbar zu machen. Bei der Ausarbeitung der hierzu erforderlichen, besonders umfangreichen Erläuterungen[1]) zeigten sich nun einige Lücken, die bei der verfügbaren kurzen Zeit von einigen Monaten naturgemäß nicht geschlossen werden konnten, die aber doch zur Erkenntnis der dringlichsten Aufgaben führten. Ein Beitrag hierzu soll dieser Vorschlag einer verbesserten Bemessungsformel für Knickstäbe bei außermittigem Kraftangriff sein. Diese Verbesserung ist deshalb dringend erforderlich, weil künftig alle ziffernmäßig erfaßbaren Hebelmaße bei derartigen Knickstäben berücksichtigt werden müssen. Diese strenge Forderung wirkt dadurch erzieherisch, daß man in Zukunft noch mehr wie bisher durch bauliche Maßnahmen außermittige Anschlüsse von geraden Stäben grundsätzlich vermeiden wird, so daß schließlich nur noch wenige Fälle mit außermittigem Kraftangriff übrigbleiben werden[2]). Bei Rahmen ist die Außermittigkeit bisher nur in besonders einfachen Fällen zu erfassen, während eine eindeutige Festlegung der ideellen Knicklänge für die allgemeinen Fälle (z. B. beim Stockwerkrahmen) noch nicht erfolgt ist. Bei Bogenträgern muß die Außermittigkeit der Mittelkraftlinie künftig berücksichtigt werden. Da diese neue Bestimmung die Wirtschaftlichkeit und Sicherheit der Bogenbrücken wesentlich beeinflussen kann, wirkt sich eine Verbesserung der Bemessungsformel nach unserem Vorschlag auch praktisch erheblich aus.

A. Gedankengang[3]).

In den Erläuterungen[1]) (Teil I, S. 19) schreibt Professor Chwalla betr. außermittig gedrückter Stäbe: „Die Forschung ist schon genügend weit fortgeschritten, um eine verläßliche Grundlage zum Aufbau wirtschaftlicher Bemessungsvorschriften zur Verfügung stellen zu können"..... „Überblicken wir alle diese Formeln, so können wir folgendes feststellen: Sind die Formeln einfach gebaut und leicht zu handhaben, dann läßt ihre Annäherung an die strengen Lösungsergebnisse viel zu wünschen übrig; ist jedoch die Annäherung eine gute, dann ist der Aufbau der Formel verhältnismäßig verwickelt und die Handhabung schwerfällig". Im Entwurf DIN E 4114 wurde daher die bekannte „Faustformel":

$$\text{(I)} \qquad \frac{\omega S}{F} + \sigma_{bd} = \frac{\omega S}{F} + \frac{M}{W} \leqq \sigma_{zul}$$

beibehalten, also auf eine Nutzbarmachung dieser Forschungsergebnisse verzichtet.

Stellt man die Forderung, daß die linke Seite der Gl. (I) nicht nur für den einen Grenzfall des mittig beanspruchten Knickstabes, also für $M = 0$ in $\frac{\omega S}{F}$ übergeht, sondern auch für den anderen Grenzfall des reinen Biegestabes, also für $S = 0$ in $\frac{M}{W}$, so müßte ein Korrekturglied, das zur Verbesserung dieser Faustformel hinzugefügt werden sollte, die Form haben

$$\text{(Ia)} \qquad \varDelta = \frac{S}{F} \cdot \frac{M}{W} \cdot f(\lambda),$$

wenn $f(\lambda)$ eine gewisse Funktion von der Stabschlankheit $\lambda = l : i$ bedeutet. Diese Forderung des stetigen Überganges in den beiden Grenzfällen ist durch ein einfaches Korrekturglied allerdings nicht zu erfüllen.

Ein schriftlicher Meinungsaustausch im März d. J. führte nun zu dem Vorschlag von Prof. Chwalla, auf den stetigen Übergang für den Grenzfall $S = 0$, der bei Rahmen Bedeutung hat, zu verzichten und dafür eine neue Grenzbestimmung, nämlich $m_a < 3\,\omega$ als grundlegende Voraussetzung für die Anwendung des Abschnitts A, II in DIN E 4114 (außermittig gedrückte Stäbe) einzuführen. (Hierin bedeutet $m_a = a : k$ das Außermittigkeitsmaß oder den Hebelwert, wenn a den Hebelarm des Moments und k die verschränkte Kernweite bezeichnet.) Ist also $m_a \geqq 3\,\omega$, so gilt der Stab als reiner Biegestab, so daß ein Nachweis der Knicksicherheit nicht erforderlich ist, und ist umgekehrt $m_a < 3\,\omega$, so ist der Stab ein Knickstab, also nach unseren Bestimmungen (DIN E 4114, A, II) als außermittig gedrückter Stab zu berechnen.

Diesen Abänderungsvorschlag unterstütze ich als Obmann des Knickausschusses deshalb lebhaft, weil damit die beiden Bereiche der reinen Biegung und der Knickung für die praktische Anwendung klar getrennt werden. (Die Zahl 3 in $m_a = 3\,\omega$ bedarf noch einer genaueren Nachprüfung.)

In dem Korrekturglied $\varDelta$ der Gl. (Ia) kann dann der Faktor $(S : F)$ wegfallen, so daß es nur noch von $M : W$ (oder m_a) und λ abhängig ist, also mit $M = 0$ (oder $m_a = 0$) verschwindet. Damit sind die Voraussetzungen für eine brauchbare Lösung zur Verbesserung der Faustformel (I) geschaffen.

Im folgenden wird zunächst dargelegt, wie man die verwickelten Beziehungen durch die Transformation aus dem σ_K-λ-System in das ω-λ-System vereinfacht und anschaulicher darstellen kann, vor allem durch eine Unterteilung des erforderlichen Querschnitts F_{erf} in den reinen Druckquerschnitt F_D, den zusätzlichen Knickquerschnitt $\varDelta F_K$ und den zusätzlichen Biegedruckquerschnitt $\varDelta F_B$ (sog. Additionsgesetz). Das bekannte ω-Verfahren wird dadurch verallgemeinert, daß hier[4]) $\varkappa\,\omega$ an Stelle von ω und die kritische Spannung σ_{Kr} an Stelle von σ_K tritt, und endlich der mit λ veränderliche Wert m_x an die Stelle des konstanten Wertes $m_x = m_a$.

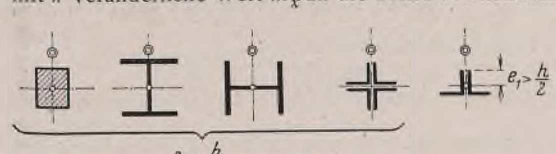


Bild 1.



Bild 2.

Die für die „Grundlösung" von K. Jäger (Jezek)[5]) gefundenen strengen Werte können dann durch eine einfache Umrechnung (unter Berücksichtigung der in der σ_K-λ-Linie der Bestimmungen bereits enthaltenen Hebelwerte m_0) für die verschiedenen Profiltypen berechnet und in unser $\varkappa\,\omega$-λ-System transformiert werden.

Die einfache Nutzanwendung ist folgende:

[1]) Erläuterungen zur Begründung des Normblatt-Entwurfes DIN E 4114, von Prof. Dr.-Ing. E. Chwalla, Brünn, und Erläuterungen zur Bemessung von Knickstäben, von Prof. Dr.-Ing. W. Gehler, Dresden 1939. Deutscher Normenausschuß E. V., Berlin, und Deutscher Stahlbau-Verband, Berlin.

[2]) Erläuterungen, II. Teil, S. 23 bis 26.

[3]) Der Zweck dieses Aufsatzes besteht zunächst darin, in der Kritik des Entwurfes DIN E 4114 auf die Unzulänglichkeit der bisherigen Fassung hinzuweisen und sodann dem Leser Gelegenheit zur raschen Durchdringung dieser verwickelten Zusammenhänge zu geben. Die dadurch hervorgerufene lebhafte Erörterung zwischen den Referenten des DIN-Entwurfes hat nunmehr zu einigen neuen Erkenntnissen geführt, so daß die hier vorgeschlagenen Formeln noch nicht als endgültig zu bezeichnen sind. Auch sei darauf hingewiesen, daß es zweckmäßig ist, bei der Festlegung des unvermeidlichen Außermittigkeitsmaßes m_0 den Hebelarm nicht auf die jeweils verschränkt gemessene Kernweite, sondern auf das arithmetische Mittel der beiden Kernweiten k_1 und k_2 zu beziehen.

[4]) Bereits 1932 von E. Chwalla vorgeschlagen in seinem Bericht: „Die Stabilität gedrückter Stäbe bei exzentrischen Kräften". Schlußbericht des Internat. Kongresses für Brücken- und Hochbau in Paris, S. 58.

[5]) K. Jäger (Jezek), Die Festigkeit von Druckstäben, S. 93, 148, 172, 193 u. 202. Wien 1937. Verlag von Julius Springer. Das Buch enthält eine erschöpfende Behandlung dieser Probleme unter Anwendung der sogenannten „Grundlösung".

I. Bei außermittigem Kraftangriff unterscheide man von vornherein zwischen

1. der Regel-Querschnittsgruppe I (Bild 1), die durch den Druckrandabstand $e_1 \geqq \frac{h}{2}$ (h = Profilhöhe) gekennzeichnet ist, und
2. der Ausnahme-Querschnittsgruppe II (Bild 2) mit dem Druckrandabstand $e_1 < \frac{h}{2}$, der auch äußerlich leicht durch eine „kleine Zuggurtbreite“ zu erkennen ist.

II. Die Grundformel des $\alpha\omega$-Verfahrens [s. Erläuterungen I, S. 19, Gl. (28)] lautet:

$$\text{(II)} \qquad \alpha\,\omega \cdot \frac{S}{F} \leqq \sigma_{zul}\,.$$

Die bisherige Faustformel (I) (im ω-λ-System) $\alpha\,\omega = \omega + m_a$ wird nur durch ein von λ abhängiges Korrekturglied $\varDelta$ ergänzt, geht also über in

$$\text{(III)} \qquad \alpha\,\omega = \omega + m_a + \varDelta\,.$$

1. Bei der Regel-Querschnittsgruppe I ist

$$\text{(IV)} \qquad \varDelta = \varDelta_{\mathrm{I}} = \frac{m_a}{3} \cdot \frac{\lambda - 100}{100}\,.$$

Hier ist der Nachweis für σ_{bz} [Fließen in der Zugzone, s. Gl. (2) in DIN E 4114] nicht erforderlich.

2. Bei der Ausnahme-Querschnittsgruppe II ist

$$\text{(V)} \qquad \varDelta = \varDelta_{\mathrm{II}} = \sqrt{m_a}\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2.$$

In der ω-λ-Darstellung tritt also an die Stelle der waagerechten Geraden $m_x = m_a$ = const bei Gruppe I eine schräg ansteigende Gerade und bei Gruppe II eine Parabel.

III. Dieser Vorschlag bringt den Vorteil

1. etwas größerer Wirtschaftlichkeit bei Gruppe I für $\lambda < 100$,
2. größerer Sicherheit bei Gruppe I für $\lambda > 100$ und ausreichender Sicherheit bei Gruppe II.

IV. Nur bei Gruppe II ist außerdem der Nachweis für σ_{bz} zu führen nach Gl. (2) (DIN E 4114)

$$\text{(VI)} \qquad \sigma_{bz} - \frac{S}{F} \leqq \sigma_{zul},$$

und zwar dann, wenn $m_a > 1$ ist.

B. Erläuterung des Vorschlages.

1. Zu unterscheiden sind die Regel-Querschnittsgruppe I (Bild 1) und die Ausnahme-Querschnittsgruppe II (Bild 2) von Knickstäben bei außermittigem Kraftangriff mit folgenden Kennzeichen. Der Druckrandabstand ist bei Gruppe I (Bild 1) $e_1 \geqq \frac{h}{2}$ und bei Gruppe II (Bild 2) $e_1 < \frac{h}{2}$. Ein anschauliches Merkmal bildet die Breite des Zuggurtes, die verhältnismäßig groß bei Gruppe I, dagegen klein bei Gruppe II ist, so daß hier das frühzeitige Fließen der Zugzone sich ungünstig auswirken kann und ein Versagen am Biegezugrand, anstatt wie in der Regel am Biegedruckrand, zu erwarten ist. Hieraus folgt, daß bei Gruppe I eine Berechnung der Zugspannungen (nach DIN E 4114, Gl. 2) nicht erforderlich ist.

2. An die Stelle des bekannten ω-Verfahrens mit

$$\text{(1)} \qquad \omega \cdot \frac{S}{F} \leqq \sigma_{zul}$$

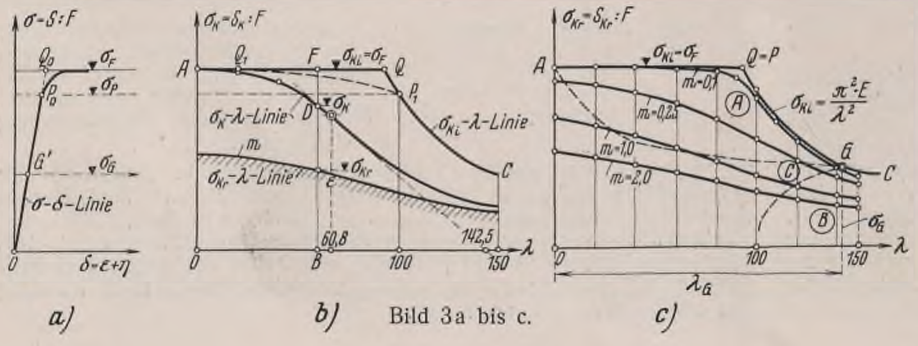
tritt hier das $\alpha\omega$-Verfahren[4]) mit

$$\text{(2a)} \qquad \alpha\,\omega \cdot \frac{S}{F} \leqq \sigma_{zul}$$

(s. auch Erläuterungen I, S. 19, Gl. 28). Nach Bild 3b ist bekanntlich die Knickzahl $\omega = \frac{\sigma_F}{\sigma_K} = \frac{\sigma_{zul}}{\sigma_{d\,zul}}$, ferner sinngemäß für den neuen Wert α, den wir „Biegeknickzahl“ nennen wollen:

$$\text{(2b)} \qquad \alpha = \frac{\sigma_K}{\sigma_{Kr}} = \frac{\sigma_{d\,zul}}{(\sigma_{Kr} : \nu)}\,,$$

wobei σ_{Kr} als die im Schwerpunkt wirkende kritische Spannung bei außermittigem Kraftangriff bezeichnet wird, also $\sigma_{Kr} = \frac{S_{Kr}}{F}$ ist (Bild 3).



a) b) Bild 3a bis c. c)

Begründung: Einer der Grundgedanken in DIN E 4114 ist die Annahme des gleichbleibenden Sicherheitsgrades

$$\nu_K = \nu_F = \frac{\sigma_F}{\sigma_{zul}} = \text{const}$$

(also z. B. $\nu_F = 2400 : 1400 = 1{,}71$ bei St 37). Wendet man diesen Gedanken nicht nur für die σ_{Ki}-λ-Linie und die σ_K-λ-Linie, sondern auch für die σ_{Kr}-λ-Linie an, so lautet die Ausgangsgleichung:

$$\text{(3a)} \qquad \frac{S}{F} \leqq \frac{\sigma_{Kr}}{\nu_K}.$$

Da die rechte Seite übergeht in:

$$\frac{\sigma_{Kr}}{\nu_K} = \frac{\sigma_{Kr}}{\nu_F} = \frac{\sigma_{Kr}}{\sigma_F} \cdot \sigma_{zul} = \frac{\sigma_{Kr}}{\sigma_K} \cdot \frac{\sigma_K}{\sigma_F} \cdot \sigma_{zul},$$

erhält man mit $\omega = \sigma_F : \sigma_K$ und $\alpha = \sigma_K : \sigma_{Kr}$ unsere Gl. (1):

$$\text{(3b)} \qquad \alpha\,\omega \cdot \frac{S}{F} \leqq \sigma_{zul} \quad \text{und} \quad \alpha\,\omega = \frac{\sigma_F}{\sigma_{Kr}}.$$

Dadurch, daß σ_F durch $\omega > 1$ geteilt wird, führt die erste Abminderung mit Hilfe von ω in bekannter Weise von der idealen Knickspannungslinie (σ_{Ki}-λ-Linie) zur praktischen Knickspannungslinie (σ_K-λ-Linie). Durch die Wiederholung dieser Maßnahme mittels der Biegeknickzahl $\alpha > 1$, also dadurch, daß σ_K durch α geteilt wird, erhält man aus der σ_K-λ-Linie die neue Biegeknick-Spannungs-Linie (σ_{Kr}-λ-Linie), wobei $\sigma_{Kr} = S_{Kr} : F$ die zu einem Werte $\lambda = l : i$ gehörige kritische Schwerpunktspannung bei außermittigem Druck bedeutet.

3. Die bisherige Faustformel (DIN E 4114, Gl. 1) lautet:

$$\text{(4)} \qquad \frac{\omega\, S}{F} + \frac{M}{W} \leqq \sigma_{zul}.$$

Setzt man zur Umformung zunächst

$$\text{(5)} \qquad \frac{M}{W} = \frac{S\,a}{F\,k} = \frac{S}{F} \cdot m_a,$$

worin k die verschränkt gemessene Kernweite und $m_a = \frac{a}{k}$ das sogenannte Außermittigkeitsmaß oder den Hebelwert bedeutet, ferner

$$\text{(6)} \qquad \frac{S}{F} = \sigma_{d\,zul} \quad \text{und} \quad \frac{S}{F_D} = \sigma_{zul}\,,$$

wobei $F = F_{erf}$ den erforderlichen Stabquerschnitt und $F_D = S : \sigma_{zul}$ den reinen Druckquerschnitt bezeichnen, so wird, s. Gl. (1):

$$\text{(7)} \qquad \alpha\,\omega = \sigma_{zul} : \frac{S}{F} = \sigma_{zul} : \sigma_{d\,zul} = \frac{S}{F_D} : \frac{S}{F} = \frac{F}{F_D}.$$

Dann geht Gl. (4) über in:

$$\frac{S}{F} \cdot \omega + \frac{S}{F} \cdot m_a \leqq \sigma_{zul}$$

oder nach Gl. (6):

$$\text{(8)} \qquad \omega + m_a \leqq \frac{\sigma_{zul}}{\sigma_{d\,zul}} \equiv \alpha\,\omega \equiv \frac{F}{F_D}.$$

Den auf den reinen Druckquerschnitt bezogenen Wert von $F = F_{erf}$ wollen wir als den spezifischen Querschnitt $(F : F_D)$ bezeichnen. Da der reine Druckquerschnitt $F_D = S : \sigma_{zul}$ durch die beiden gegebenen Größen der Aufgabe (S und σ_{zul}) stets bekannt ist, kann der erforderliche Querschnitt $F = F_{erf}$ des Knickstabes auch durch dieses Verhältnis $(F : F_D)$ anschaulich gekennzeichnet werden.

Die ω-λ-Linie (s. unser Bild 4 u. 17a, Erläuterungen II, S. 19) veranschaulicht hiernach ohne weiteres das Additionsgesetz des (auf den reinen Druckquerschnitt F_D) bezogenen Querschnitts des Knickstabes, wie es auch auf S. 22 der Erläuterungen II in der Form hergeleitet wurde:

$$\text{(9)} \qquad F_{erf} = F_D + \varDelta F_K + \varDelta F_B = \frac{S}{\sigma_{zul}}\left\{1 + (\omega - 1) + m_a\right\}$$

(wobei hier nur $\varDelta F_K$ anstatt $\varDelta F$ und $\varDelta F_B$ anstatt F_B geschrieben wurde). Hieraus ergibt sich wiederum $\left(\text{wenn durch } \frac{S}{\sigma_{zul}} = F_D \text{ geteilt wird}\right)$ als Summe aus den auf F_D bezogenen drei Querschnittssummanden:

$$\text{(10)} \qquad 1 + (\omega - 1) + m_x = \alpha\,\omega.$$

Die bisherige ω-λ-Darstellung (mit $m_a = 0$) kann somit zugleich auch als $\alpha\,\omega$-λ-Linie für den Sonderfall $\alpha = 1$ aufgefaßt werden, die jeweils den zu λ gehörenden Wert $(F : F_D)$ als Ordinate liefert. Da für die ω-λ-Linie nach Vorschlag meines Mitarbeiters Dipl.-Ing. W. Karig [s. Gl. (112), Erläuterungen II, S. 19] bei St 37 die Parabelgleichung:

$$\text{(11)} \qquad (\omega - 1) = 2\left(\frac{\lambda - 20}{100}\right)^2$$

angenommen werden kann, besteht die ω-λ-Fläche aus folgenden beiden Teilflächen:

a) aus dem Rechteck mit der Höhe 1 (spezifischer Querschnittsanteil $F_D : F_D$ infolge des reinen Druckes) und

b) aus der Parabelfläche, nach Gl. (11), deren Ordinaten den zusätzlichen spezifischen Knickquerschnitt $\Delta F : F_D$ darstellen.

Hierzu kommt nun im Falle des außermittigen Druckes noch als dritter Anteil hinzu:

$$\frac{\Delta F_B}{F_D} = m_a = \frac{a}{k} = \text{const},$$

also in der Form eines zweiten Rechtecks. In Bild 4 sind diese drei Flächen für den reinen Druckquerschnitt ($A_0 B, B_1 A_1$), für den zusätzlichen Knickquerschnitt ($A_1 B_1 B_2$) und für den zusätzlichen Biegequerschnitt ($A_0 B_0 B_3 A_3$) dargestellt.

Mißt man nunmehr jeweils die Ordinate der Summe dieser drei Teilflächen, also die lotrechten Abstände zwischen der oberen Grenzlinie $A_1 B_2$ und der unteren waagerechten Begrenzung $A_3 B_3$, so erhält man (anstatt früher den Wert ω für $m_a = 0$) nunmehr den neuen Wert $\alpha\,\omega$ (für Knickung bei außermittigem Kraftangriff).

Ergebnis: Unsere $\alpha\,\omega$-λ-Linie veranschaulicht in einfachster Form das Additionsgesetz für einen Knickstab. Bezeichnet $F_D = S : \sigma_{zul}$ den jeweils bekannten reinen Druckquerschnitt, so können die drei Anteile, aus denen sich der erforderliche Querschnitt $F_{erf} = F$ zusammensetzt, auf diese Grundgröße F_D bezogen werden. Die drei Summanden sind dann:

a) der Anteil des reinen Druckquerschnitts $F_D : F_D = 1$,

b) der Anteil des zusätzlichen bezogenen Knickquerschnitts $\Delta F_K : F_D = (\omega - 1)$,

c) der Anteil des zusätzlichen Biegequerschnitts

$$\Delta F_B : F_D = m_a.$$

Die Summe dieser drei Anteile ergibt dann den gesuchten Querschnitt des Knickstabes (wiederum bezogen auf F_D), nämlich:

$$\alpha\,\omega = 1 + (\omega - 1) + m_a = 1 + 2\left(\frac{\lambda - 20}{100}\right)^2 + m_a = \omega + m_x \tag{12}$$

5. Unser Vorschlag einer verbesserten Bemessungsformel läßt sich nach diesen Erläuterungen und Erkenntnissen sehr kurz ausdrücken und veranschaulichen.

Nach der Grundformel des $\alpha\,\omega$-Verfahrens [Gl. (1)] muß stets nachgewiesen werden, daß

$$\alpha\,\omega \cdot \frac{S}{F} \leqq \sigma_{zul} \text{ ist.}$$

I. Für die Regel-Querschnittsgruppe I wird an Stelle der waagerechten unteren Begrenzungslinie $A_3 B_3$ (für $m_x = m_a = \text{const}$) eine schräg ansteigende Gerade $A_4 C_4 B_4$ (Bild 4) vorgeschlagen, die durch den Punkt $m_x = m_a$ für $\lambda = 100$ geht mit einer bestimmten von m_a abhängigen Neigung.

Unsere erste Bemessungsgleichung (für die Regel-Querschnittsgruppe I) lautet nun:

$$\alpha\,\omega = \omega + m_x = \omega + m_a + \frac{m_a}{3} \cdot \frac{\lambda - 100}{100} \tag{13}$$

so daß

$$m_x = m_{xI} = m_a + \frac{m_a}{3} \cdot \frac{\lambda - 100}{100} = m_a\left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{\lambda - 100}{100}\right) \text{ ist.} \tag{13a}$$

II. Für die Ausnahme-Querschnittsgruppe II dagegen ist die dritte Teilfläche ($\Delta F_B : F_D$) durch eine Parabel zu begrenzen (s. Linie $A_5 C_5 B_5$ in Bild 4), die für $\lambda = 0$ die Ordinate m_a hat und die zweite Bemessungsgleichung

$$\alpha\,\omega = \omega + m_x = (\omega + m_a) + \sqrt{m_a}\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2 \tag{14}$$

darstellt, so daß

$$m_x = m_{xII} = m_a + \sqrt{m_a}\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2 \text{ ist.} \tag{14a}$$

III. Außer nach Gl. (13) und (1) muß aber bei dieser Ausnahme-Querschnittsgruppe II dann, wenn $m_a > 1$ ist, auch die Zulässigkeit der Biegezugspannungen σ_{bz}

$$\sigma_{bz} - \frac{S}{F} \leqq \sigma_{zul} \tag{15}$$

[s. Gl. (2) DIN E 4114] nachgewiesen werden. Damit ist gleichbedeutend (s. Begründung unter C, II), daß nach der Gleichung:

$$\alpha\,\omega = \omega + m_x' = m_a \cdot \frac{F}{F_0} \cdot \frac{e_2}{e_1} - 1 \tag{16}$$

oder mit

$$m_x' = m_a \cdot \frac{F}{F_0} \cdot \frac{e_2}{e_1} - (\omega + 1)$$

ist, der Nachweis nach Gl. (1) erbracht wird. Hierin bezeichnet F_0 den durch Niete verschwächten Querschnitt und e_1 bzw. e_2 den Druck- bzw. Zugrandabstand.

6. Der Aufbau der beiden vorgeschlagenen Bemessungsformeln (13) und (14) ist deshalb einfach, weil man jeweils von der bisherigen Faustformel

$$\alpha\,\omega = (\omega + m_a) \quad \text{oder} \quad \frac{\omega\,S}{F} + \frac{M}{W} \leqq \sigma_{zul}$$

ausgehen kann und nur ein bestimmtes Korrekturglied hinzuzufügen braucht.

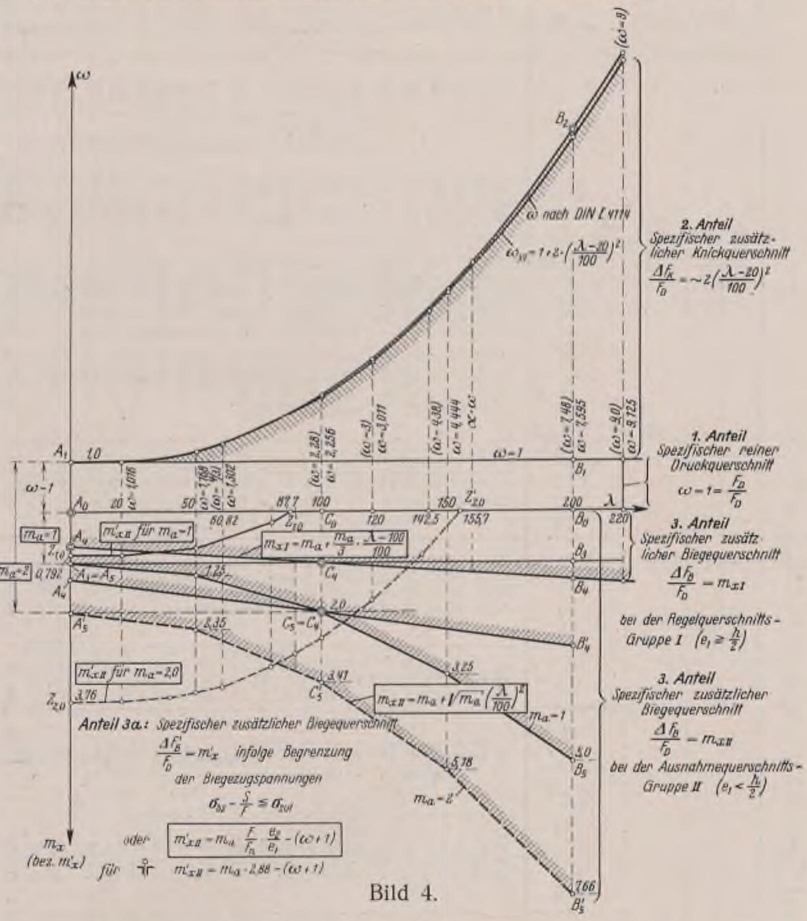


Bild 4.

Will man den bezogenen Flächenmaßstab (der ω-λ-Darstellung) (Bild 4) umgekehrt wieder in den Spannungsmaßstab der „Faustformel" zurücktransformieren, so erhält man durch Multiplikation der Gl. (13) mit $\frac{S}{F}$ für die Regel-Querschnittsgruppe I

$$\omega \cdot \frac{S}{F} + m_a \cdot \frac{S}{F} + \frac{m_a}{3} \cdot \frac{\lambda - 100}{100} \cdot \frac{S}{F} = \alpha\,\omega \cdot \frac{S}{F}$$

oder mit $m_a \cdot \frac{S}{F} = \frac{a\,S}{k\,F} = \frac{M}{W}$:

$$\frac{\omega\,S}{F} + \left\{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{\lambda - 100}{100}\right\}\frac{M}{W} \leqq \sigma_{zul} \tag{17}$$

und entsprechend für die Ausnahme-Querschnittsgruppe II [nach Gl. (14)]:

$$\omega \cdot \frac{S}{F} + m_a \cdot \frac{S}{F} + \sqrt{m_a}\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2 \frac{S}{F} = \alpha\,\omega \cdot \frac{S}{F}$$

$$\frac{\omega\,S}{F} + \frac{M}{W}\left\{1 + \frac{1}{\sqrt{m_a}}\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2\right\} \leqq \sigma_{zul} \tag{18}$$

7. Das Bedürfnis nach einer Verbesserung der Faustformel durch den Vorschlag unserer Bemessungsformel läßt sich ebenfalls an Hand von Bild 4 veranschaulichen.

a) Für die Regel-Querschnittsgruppe I lieferte die Faustformel im Bereich $\lambda < 100$ zu große Werte, war also unwirtschaftlich [s. 1. Beispiel Chwalla, Erläuterungen I, S. 20, Gl. (31), mit einem Fehler von 38%], dagegen im Bereich $\lambda > 100$ zu kleine Werte, war also nicht auf der sicheren Seite. In Gl. (13) u. (17) hat das Korrekturglied $\left(\frac{m_a}{3} \cdot \frac{\lambda - 100}{100}\right)$

Übersicht I. Berechnung der m_x-λ-Linien aus den m-λ-Tafeln von K. Jäger (Jezek).

A. Regel-Querschnittsgruppe I $\left(e_1 \geqq \frac{h}{2}\right)$ für St 37.

	$\lambda =$	0				50				100				150				200			
	$\omega =$	1				1,168				2,256				4,444				7,595			
	$m_0 = 0{,}75\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2$	0				0,1875				0,75				1,6875				3			
	m_a	$m = m_a + m_0$	σ_{Kr}	$\alpha\omega = \frac{\sigma_F}{\sigma_{Kr}}$	$m_x = \alpha\omega - \omega$	$m = m_a + m_0$	σ_{Kr}	$\alpha\omega = \frac{\sigma_F}{\sigma_{Kr}}$	$m_x = \alpha\omega - \omega$	$m = m_a + m_0$	σ_{Kr}	$\alpha\omega = \frac{\sigma_F}{\sigma_{Kr}}$	$m_x = \alpha\omega - \omega$	$m = m_a + m_0$	σ_{Kr}	$\alpha\omega = \frac{\sigma_F}{\sigma_{Kr}}$	$m_x = \alpha\omega - \omega$	$m = m_a + m_0$	σ_{Kr}	$\alpha\omega = \frac{\sigma_F}{\sigma_{Kr}}$	$m_x = \alpha\omega - \omega$
1. Rechteck	0,25	0,25	2,21	1,088	0,09	0,4375	1,7750	1,352	0,18	1,0	0,97	2,470	0,21	1,9375	0,518	4,630	0,19	3,25	0,31	7,74	0,14
	0,50	0,50	2,03	1,182	0,18	0,6875	1,5675	1,535	0,37	1,25	0,89	2,695	0,44	2,1875	0,495	4,850	0,41	3,50	0,30	8,0	0,40
	0,75	0,75	1,87	1,285	0,28	0,9375	1,4150	1,700	0,53	1,50	0,83	2,895	0,64	2,4375	0,475	5,050	0,61	3,75	0,29	8,27	0,67
	1,0	1,0	1,73	1,387	0,39	1,1875	1,2975	1,850	0,68	1,75	0,78	3,075	0,82	2,6875	0,458	5,240	0,80	4,0	0,28	8,57	0,97
	1,50	1,50	1,48	1,622	0,62	1,6875	1,1175	2,150	0,98	2,25	0,695	3,455	1,20	3,1875	0,425	5,650	1,21	4,50	0,27	8,89	1,29
	2,0	2,0	1,29	1,861	0,86	2,1875	0,9850	2,435	1,27	2,75	0,63	3,810	1,55	3,6875	0,3925	6,120	1,68	5,0	0,26	9,23	1,63
2.	0,25	0,25	1,96	1,224	0,22	0,4375	1,630	1,472	0,30	1,0	0,90	2,665	0,41	1,9375	0,495	4,850	0,41	3,25	0,30	8,0	0,40
	0,50	0,50	1,66	1,445	0,44	0,6875	1,393	1,722	0,55	1,25	0,82	2,925	0,67	2,1875	0,471	5,090	0,65	3,50	0,29	8,27	0,67
	0,75	0,75	1,43	1,679	0 68	0,9375	1,213	1,980	0,81	1,50	0,75	3,200	0,95	2,4375	0,446	5,380	0,94	3,75	0,28	8,57	0,97
	1,0	1,0	1,26	1,905	0,90	1,1875	1,080	2,220	1,05	1,75	0,70	3,430	1,17	2,6875	0,425	5,650	1,21	4,0	0,27	8,89	1,29
	1,50	1,50	1,02	2,353	1,35	1,6875	0,890	2,695	1,53	2,25	0,615	3,900	1,64	3,1875	0,389	6,160	1,72	4,50	0,26	9,23	1,63
	2,0	2,0	0,86	2,790	1,79	2,1875	0,763	3,145	1,98	2,75	0,555	4,325	2,07	3,6875	0,359	6,690	2,25	5,0	0,25	9,60	2,0
3.	0,25	0,25	2,18	1,100	0,10	0,4375	1,833	1,310	0,14	1,0	0,98	2,450	0,19	1,9375	0,508	4,725	0,28	3,25	0,31	7,74	0,14
	0,50	0,50	1,98	1,212	0,21	0,6875	1,635	1,469	0,30	1,25	0,91	2,635	0,38	2,1875	0,489	4,920	0,48	3,50	0,30	8,0	0,40
	0,75	0,75	1,84	1,305	0,30	0,9375	1,493	1,608	0,44	1,50	0,84	2,855	0,60	2,4375	0,474	5,060	0,62	3,75	0,29	8,27	0,67
	1,0	1,0	1,69	1,420	0,42	1,1875	1,385	1,733	0,56	1,75	0,80	3,000	0,74	2,6875	0,459	5,240	0,80	4,0	0,28	8,57	0,97
	1,50	1,50	1,49	1,612	0,61	1,6875	1,203	1,993	0,82	2,25	0,72	3,333	1,08	3,1875	0,429	5,590	1,15	4,50	0,27	8,89	1,29
	2,0	2,0	1,28	1,875	0,87	2,1875	1,065	2,255	1,09	2,75	0,655	3,660	1,40	3,6875	0,399	6,020	1,58	5,0	0,26	9,23	1,63
4.	0,25	0,25	2,15	1,116	0,12	0,4375	1,722	1,393	0,22	1,0	0,95	2,525	0,27	1,9375	0,508	4,730	0,29	3,25	0,31	7,74	0,14
	0,50	0,50	1,94	1,238	0,24	0,6875	1,508	1,590	0,42	1,25	0,87	2,760	0,50	2,1875	0,485	4,950	0,51	3,50	0,30	8,0	0,40
	0,75	0,75	1,76	1,363	0,36	0,9375	1,348	1,780	0,61	1,50	0,81	2,965	0,71	2,4375	0,465	5,160	0,72	3,75	0,29	8,27	0,67
	1,0	1,0	1,61	1,490	0,49	1,1875	1,243	1,930	0,76	1,75	0,75	3,200	0,94	2,6875	0,445	5,385	0,94	4,0	0,28	8,57	0,97
	1,50	1,50	1,38	1,740	0,74	1,6875	1,040	2,310	1,14	2,25	0,665	3,610	1,35	3,1875	0,409	5,860	1,42	4,50	0,27	8,89	1,29
	2,0	2,0	1,20	2,0	1,0	2,1875	0,923	2,600	1,43	2,75	0,605	3,970	1,71	3,6875	0,383	6,280	1,84	5,0	0,26	9,23	1,63

B. Ausnahme-Querschnittsgruppe II $\left(e_1 < \frac{h}{2}\right)$ für St 37.

	m_a	m	σ_{Kr}	$\alpha\omega$	m_x	m	σ_{Kr}	$\alpha\omega$	m_x	m	σ_{Kr}	$\alpha\omega$	m_x	m	σ_{Kr}	$\alpha\omega$	m_x	m	σ_{Kr}	$\alpha\omega$	m_x
5.	0,25	0,25	2,0	1,200	0,20	0,4375	1,665	1,441	0,27	1,0	0,87	2,760	0,50	1,9375	0,398	6,030	1,59	3,25	0,22	10,90	3,30
	0,50	0,50	1,72	1,395	0,39	0,6875	1,433	1,675	0,51	1,25	0,78	3,075	0,82	2,1875	0,371	6,470	2,03	3,50	0,21	11,42	3,82
	0,75	0,75	1,50	1,600	0,60	0,9375	1,253	1,916	0,75	1,50	0,69	3,480	1,22	2,4375	0,346	6,940	2,50	3,75	0,20	12,0	4,40
	1,0	1,0	1,34	1,792	0,79	1,1875	1,120	2,142	0,98	1,75	0,63	3,810	1,55	2,6875	0,318	7,550	3,11	4,0	0,19	12,63	5,03
	1,50	1,50	1,09	2,202	1,20	1,6875	0,903	2,655	1,49	2,25	0,52	4,620	2,36	3,1875	0,289	8,300	3,86	4,50	0,18	13,34	5,74
	2,0	2,0	0,89	2,697	1,70	2,1875	0,741	3,240	2,07	2,75	0,445	5,395	3,14	3,6875	0,259	9,270	4,83	5,0	0,17	14,12	6,52

C. Rechteckquerschnitt für St 52.

6.	$\omega =$	1,0				1,264				2,953				6,122				10,619			
	$m_0 = 0{,}95\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2$	0				0,2375				0,95				2,1375				3,800			
	m_a	$m = m_a + m_0$	σ_{Kr}	$\alpha\omega = \frac{\sigma_F}{\sigma_{Kr}}$	$m_x = \alpha\omega - \omega$	$m = m_a + m_0$	σ_{Kr}	$\alpha\omega = \frac{\sigma_F}{\sigma_{Kr}}$	$m_x = \alpha\omega - \omega$	$m = m_a + m_0$	σ_{Kr}	$\alpha\omega = \frac{\sigma_F}{\sigma_{Kr}}$	$m_x = \alpha\omega - \omega$	$m = m_a + m_0$	σ_{Kr}	$\alpha\omega = \frac{\sigma_F}{\sigma_{Kr}}$	$m_x = \alpha\omega - \omega$	$m = m_a + m_0$	σ_{Kr}	$\alpha\omega = \frac{\sigma_F}{\sigma_{Kr}}$	$m_x = \alpha\omega - \omega$
	0,25	0,25	3,31	1,087	0,09	0,487	2,431	1,480	0,22	1,20	1,136	3,170	0,22	2,3875	0,569	6,325	0,20	4,05	0,329	10,93	0,31
	0,50	0,50	3,05	1,180	0,18	0,7375	2,153	1,672	0,41	1,45	1,056	3,405	0,45	2,6375	0,552	6,520	0,40	4,30	0,324	11,11	0,49
	0,75	0,75	2,81	1,282	0,28	0,9875	1,941	1,854	0,59	1,70	1,0	3,600	0,65	2,8875	0,537	6,700	0,58	4,55	0,319	11,28	0 66
	1,0	1,0	2,59	1,390	0,39	1,2375	1,778	2,025	0,76	1,95	0,942	3,820	0,87	3,1375	0,522	6,890	0,77	4,80	0,314	11,46	0,84
	1,50	1,50	2,23	1,615	0,61	1,7375	1,536	2,345	1,08	2,45	0,858	4,200	1,25	3,6375	0,492	7,320	1,20	5,30	0,304	11,85	1,23
	2,0	2,0	1,95	1,848	0,85	2,2375	1,359	2,051	1,39	2,95	0,787	4,575	1,62	4,1375	0,464	7,760	1,64	5,80	0,294	12,23	1,61

7. Vergleich	St 37	St 52	St 37	St 52	St 37	St 52	St 37	St 52	St 37	St 52
m_a = 0,25	0,09	0,09	0,18	0,22	0,21	0,22	0,19	0,20	0,14	0,31
0,50	0,18	0,18	0,37	0,41	0,44	0,45	0,41	0,40	0,40	0,49
0,75	0,28	0,28	0,53	0,59	0,64	0,65	0,61	0,58	0,67	0,66
1,0	0,39	0,39	0,68	0,76	0,82	0,87	0,80	0,77	0,97	0,84
1,50	0,62	0,61	0,98	1,08	1,20	1,25	1,21	1,20	1,29	1,23
2,0	0,86	0,85	1,27	1,39	1,55	1,62	1,68	1,64	1,23	1,61

in diesen beiden Bereichen verschiedenes Vorzeichen, wie auch aus der Steigung der Geraden $A_4 C_4 B_4$ in Bild 4 im Vergleich zur Waagerechten $A_3 B_3$ hervorgeht.

b) Da die Behandlung der Ausnahme-Querschnittsgruppe II bisher überhaupt fehlte, bildete zwar Gl. 2 (in DIN E 4114), die die Zugspannungen begrenzt, gegebenenfalls dafür einen gewissen Ersatz. Sie hat aber den Nachteil, daß sie nur bei starken Hebelwerten $(m_a > 1)$ wirksam wird und bei sehr schlanken Stäben überhaupt versagt, wie aus der Begründung unter B, II hervorgeht, und daß sie der Anschaulichkeit entbehrt.

Das überraschend starke Ansteigen der Parabel der Gl. (14a)

$$m_x = m_a \left\{ 1 + \sqrt{m_a} \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2 \right\}$$

für die Ausnahme-Querschnittsgruppe II (s. Bild 4) zeigt deutlich die Gefahr, die in der Unterschätzung der Knickgefahr bei Biegedruck in diesen allerdings selten vorkommenden Fällen vorhanden ist.

Legt man die genauen Werte von Jäger (Jezek) zugrunde, so erhält man (nach Übersicht I) für $\lambda = 200$ und $m_a = 2{,}0$ (Profil 5)

$$\varkappa\, \omega = \omega + m_x = 7{,}595 + 6{,}52 = 14{,}12$$

anstatt nach der Faustformel (I):

$$\varkappa\, \omega = \omega + m_a = 7{,}595 + 2{,}0 = 9{,}60.$$

Die Sicherheit sinkt somit auf 68 % herab und beträgt, wenn nach der Faustformel bemessen wird, im Belastungsfall I $(\sigma_{zul} = 1400\ \text{kg/cm}^2)$ nur noch $\frac{2400}{1400} \cdot 0{,}68 = 1{,}16$ und im Belastungsfall II $(\sigma_{zul} = 1600\ \text{kg/cm}^2)$ sogar $\frac{2400}{1600} \cdot 0{,}68 = 1{,}02$ (anstatt 1,71 und 1,50). Hieraus folgt, daß die Faustformel in den Bestimmungen unmöglich bestehen bleiben kann.

(Schluß folgt.)

Die Knickfestigkeit elastisch eingespannter Stäbe.

Von Dr.-Ing. **Hans Sievers**, Duisburg.

(Schluß aus Heft 10/11.)

c) Der Einfluß der zusätzlichen Längskräfte.

Die Riegel der Rahmen werden auch dann, wenn sie unendlich steif sind, beim Knicken verdreht, und zwar deshalb, weil in den Rahmenpfosten zusätzliche Längskräfte auftreten. Bezeichnet man diese zusätzlichen Längskräfte mit N, so wird ihr Anteil an der Formänderungsarbeit $\mathfrak{A}_2$

$$\mathfrak{A}_2' = \frac{1}{2} \int \frac{N^2}{E_\sigma F} \cdot d x. \tag{48}$$

Für die zusätzlich auf Zug beanspruchten Pfosten ist $E_\sigma = E$, für die zusätzlich auf Druck beanspruchten Pfosten ist E_σ der zu der Schwerpunktspannung σ gehörende Modul $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ (ε = Dehnung). Da $\mathfrak{A}_2'$ somit bei den beiden Pfostensträngen verschieden groß ist, muß die Summenbildung über beide Pfostenstränge erstreckt oder, wenn man die bisherigen Ansätze beibehalten will, an Stelle von E_σ der Wert $\frac{E}{2}\left(1 + \frac{E_\sigma}{E}\right)$ gesetzt werden. In der Knickbedingung tritt dann der Ausdruck $2\,\tau : \left(1 + \frac{E_\sigma}{E}\right)$ auf. Dieser Bruch ist stets kleiner als 1. Man befindet sich also auf der sicheren Seite, wenn man $T = E$ und $E_\sigma = E$ setzt.

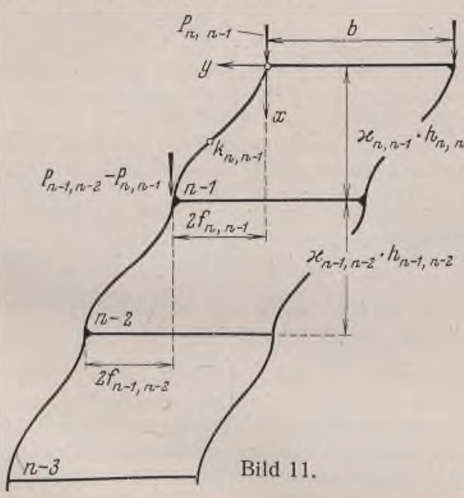


Bild 11.

Als Vergleichssystem wählen wir den Rahmen, dessen Pfosten ∞ große Querschnittsfläche haben (Bild 11). Die Formänderungsarbeit $\mathfrak{A}_1$ auf der Strecke $\sum\limits_0^n (\varkappa_{m,m-1} - 1)\, h_{m,m-1}$ ist durch Gl. (34) gegeben. Die zusätzliche Längskraft im Punkte $k_{n,n-1}$ des obersten Stockwerks ist

$$N_{n,n-1} = \pm \frac{2\, P_{n,n-1}}{b} \cdot y.$$

Vernachlässigt man den Unterschied zwischen

$$h_{n,n-1} \quad \text{und} \quad \varkappa_{n,n-1}\, h_{n,n-1},$$

so kann man

$$y = f_{n,n-1} \left(1 - \cos \frac{\pi x}{h_{n,n-1}}\right)$$

setzen. Ersetzt man die cosinus-Linie durch eine Gerade, so tritt bei Ermittlung von $\mathfrak{A}_2'$ an Stelle des

$$\int\limits_0^h \left(1 - \cos \frac{\pi x}{h}\right)^2 d x = \frac{3}{2} \cdot h \qquad \text{das} \qquad \int\limits_0^h \left(\frac{2x}{h}\right)^2 dx = \frac{4}{3} \cdot h.$$

Der Fehler, den diese Vereinfachung hervorruft, ist um so kleiner, je größer die Zahl der Stockwerke ist. Er kann unbedenklich in Kauf genommen werden, da die zusätzlichen Längskräfte erst bei größerer Stockwerkszahl von Einfluß sind. Es genügt also, die Größe von N jeweils für die Rahmenknoten zu ermitteln. Man erhält

$$N_{n-1} = \pm \frac{4}{b} \cdot P_{n,n-1}\, f_{n,n-1}$$

$$N_{n-2} =$$
$$\pm \frac{4}{b} \left[P_{n,n-1} \left(f_{n,n-1} + f_{n-1,n-2}\right) + \left(P_{n-1,n-2} - P_{n,n-1}\right) f_{n-1,n-2}\right]$$
$$= \pm \frac{4}{b} \left[P_{n,n-1} f_{n,n-1} + P_{n-1,n-2} f_{n-1,n-2}\right]$$
$$= \pm \frac{4}{b} \cdot P_{n-1,n-2}\, f_{n-1,n-2} \left(1 + \beta_{n-1}\right) \quad \text{[vgl. Gl. (16) und (31)]}$$

$$N_{n-3} =$$
$$\pm \frac{4}{b} \left[P_{n,n-1} f_{n,n-1} + P_{n-1,n-2} f_{n-1,n-2} + P_{n-2,n-3} f_{n-2,n-3}\right]$$
$$= \pm \frac{4}{b} \cdot P_{n-2,n-3}\, f_{n-2,n-3} \left(1 + \beta_{n-2} + \beta_{n-1} \beta_{n-2}\right).$$

Schließlich wird allgemein

$$N_m = \pm \frac{4}{b} \cdot P_{m,m+1}\, f_{m,m+1} \left(1 + \beta_{m+1} + \beta_{m+1} \beta_{m+2} + \cdots\right)$$
$$= \pm \frac{4}{b} \cdot P_{0,1}\, f_{0,1}\, B_m \left(1 + \beta_{m+1} + \beta_{m+1} \beta_{m+2} + \cdots\right)$$
$$= \pm \frac{4}{b} \cdot P_{0,1}\, f_{0,1} \sum_m^n B_m.$$

Bei dem oben behandelten dreistöckigen Rahmen erhält man mit $\beta_1 = 0{,}616$, $\beta_2 = 0{,}247$, $B_2 = 0{,}152$

$$N_0 = \pm (1 + 0{,}616 + 0{,}152) \frac{4}{b} \cdot P_{0,1}\, f_{0,1} = 1{,}768 \cdot \frac{4}{b} \cdot P_{0,1}\, f_{0,1},$$
$$N_1 = \pm (\quad 0{,}616 + 0{,}152) \frac{4}{b} \cdot P_{0,1}\, f_{0,1} = 0{,}768 \cdot \frac{4}{b} \cdot P_{0,1}\, f_{0,1},$$
$$N_2 = \pm\, 0{,}152 \cdot \frac{4}{b} \cdot P_{0,1}\, f_{0,1}.$$

Die Auswertung ergibt $\varkappa_{0,1} = 1{,}18$, während sich ohne Berücksichtigung der zusätzlichen Längskräfte $\varkappa_{0,1} = 1{,}17$ ergab. Der Einfluß der Längskräfte ist also verschwindend gering. Er nimmt zu mit wachsender Stockwerkszahl, wachsenden Werten $\frac{h}{b}$ und bei konstantem P. Bei h = const, J = const, F = const, P = const wird das Diagramm der zusätzlichen Längskräfte ein Dreieck mit der Basis $\frac{2P}{b} \cdot 2\, n f$. Dann wird nach Gl. (48)

$$\mathfrak{A}_2' = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5{,}33\, P^2 f^2 n^3 h \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{E F}$$

und [vgl. Gl. (40)]

$$\varkappa = 1 + \frac{\nu}{6} \cdot \frac{4(n-1) + 1}{n} + 5{,}33\, n^2 \left(\frac{h}{b}\right)^2 \frac{1}{\lambda^2}. \tag{49}$$

Hierin ist $\lambda = \frac{h}{i}$ der Schlankheitsgrad der Pfosten.

Puwein gibt in der oben angeführten Abhandlung statt des Faktors 5,33 den Faktor 6,5 an.

d) Verfeinerung des Verfahrens für schlanke Riegel (große Werte $\varkappa$).

Bei der Untersuchung des antisymmetrischen Knickens des Einfeldrahmens hatten wir näherungsweise angenommen, daß das Moment $P f$

auf der Strecke $\overline{BD} = (\eta - 1)\,h$ konstant sei (vgl. Bild 12). In Wirklichkeit ist $\overline{DA}$ nicht Pf, sondern

$$\overline{DA} = Pf \cdot \sin \frac{\pi x}{\eta h}.$$

$\mathfrak{A}_2$ sowohl wie $\mathfrak{A}_1$ werden zu hoch errechnet. Da aber der Fehler bei $\mathfrak{A}_2$ größer als bei $\mathfrak{A}_1$ ist, so erhält man für $\varkappa$ zu hohe Werte.

Gl. (47) bietet in Verbindung mit Gl. (30) die Möglichkeit, die Größe des Fehlers abzuschätzen. Beim Zweigelenkrahmen ist $\eta = \varkappa$. Man kann also nach

$$(30) \qquad \frac{\pi}{\eta} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{\eta} = \frac{6}{\nu}$$

$$(40) \qquad \eta = 2 + \frac{\nu}{3} \cdot v$$

setzen. Hierin ist v ein Verbesserungsfaktor. Aus den beiden Gleichungen folgt

$$\nu = \frac{3\,\eta - 6}{v} = \frac{6}{\dfrac{\pi}{\eta} \cdot \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{\eta}}$$

und daraus

$$(50) \qquad v = (0{,}5\,\eta - 1)\,\frac{\pi}{\eta} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{\eta}.$$

In der Tafel 3 ist v für eine Reihe Werte η angegeben. Setzt man angenähert

$$v = 1 - \varrho\,(\eta - 2),$$

so wird

$$\varrho = \frac{1 - v}{\eta - 2}.$$

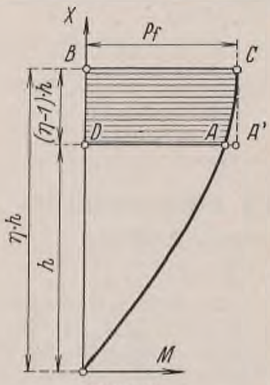


Bild 12.

Die Werte ϱ sind ebenfalls in der Tafel enthalten. Man sieht, daß man für größere Werte η

$$\varrho = 0{,}1$$

und damit

$$\eta = 2 + \frac{\nu}{3}\,[1 - 0{,}1\,(\eta - 2)]$$

oder

$$\eta = \frac{6 + 1{,}2\,\nu}{3 + 0{,}1\,\nu} = 2 + \frac{\nu}{3 + 0{,}1\,\nu}$$

setzen kann.

Tafel 3.

η	v	ϱ
2,0	1	0
2,5	0,968	0,064
3,0	0,906	0,094
3,5	0,846	0,103
4,0	0,786	0,107
4,5	0,733	0,107
5,0	0,686	0,105

Aus Gl. (50) folgt

$$v = 1 - 0{,}1\,(\eta - 2) = (0{,}5\,\eta - 1)\,\frac{\pi}{\eta} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{\eta}.$$

Hieraus ergibt sich die Näherungsformel

$$(51) \qquad \operatorname{tg} \frac{\pi}{\eta} = \frac{\eta}{\pi} \cdot \frac{1 - 0{,}1\,(\eta - 2)}{0{,}5\,\eta - 1} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1{,}2\,\eta - 0{,}1\,\eta^2}{0{,}5\,\eta - 1},$$

während ohne die Verbesserung

$$(51\text{a}) \qquad \operatorname{tg} \frac{\pi}{\eta} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\eta}{0{,}5\,\eta - 1}$$

ist. In Bild 13 sind die nach Gl. (51) und (51a) errechneten Werte den richtigen Werten $\operatorname{tg} \frac{\pi}{\eta}$ gegenübergestellt. Man sieht, daß Gl. (51) den Verlauf von $\operatorname{tg} \frac{\pi}{\eta}$ bis $\eta = 6$ richtig wiedergibt, während Gl. (51a) bereits bei $\eta = 3$ einen Fehler von rd. 10 % ergibt. Bei größeren Werten η ist somit $\mathfrak{A}_2$ mit

$$(52) \qquad v = 1 - 0{,}1\,(\eta - 2)$$

zu multiplizieren.

Beim Zweigelenkrahmen wird

$$(53) \qquad \eta = \varkappa = 2 + \frac{\nu}{3 + 0{,}1\,\nu}.$$

Beim Rahmen ohne Gelenke ist $\eta \sim 2\,\varkappa$, somit

$$(52\text{a}) \qquad v = 1 - 0{,}2\,(\varkappa - 1).$$

Damit wird nach Gl. (44) beim vierseitigen Rahmen

$$\varkappa = 1 + \frac{1}{6}\,(\nu_r + \nu_q)\,[1 - 0{,}2\,(\varkappa - 1)],$$

woraus

$$(54) \qquad \varkappa = 1 + \frac{\nu_r + \nu_q}{6 + 0{,}2\,(\nu_r + \nu_q)}$$

folgt.

Bei den mehrstöckigen Rahmen untersuchen wir zunächst den Sonderfall, bei dem die Werte $\varkappa$ für alle Stockwerke gleich groß sind. Dann ist nach Gl. (9)

$$\alpha_m = \frac{h_{m,\,m+1}}{h_{m,\,m-1}},$$

nach Gl. (16) u. (32)

$$\beta_m = \frac{P_{m,\,m+1}}{P_{m,\,m-1}} \cdot \frac{h_{m,\,m+1}}{h_{m,\,m-1}} = \delta_m.$$

Somit wird nach Gl. (37a) u. (52a)

$$(\varkappa - 1) \sum_0^{n-1} B_m = \frac{\nu}{6} \left[\frac{J_1}{J_0} + \sum_1^n B_{m-1}^2 \,(1 + \beta_m)^2 \frac{J_1}{J_m} \right] [1 - 0{,}2\,(\varkappa - 1)].$$

Daraus folgt

$$(55) \qquad \varkappa = 1 + \frac{\nu \left[\dfrac{J_1}{J_0} + \sum\limits_1^n B_{m-1}^2 \,(1 + \beta_m)^2 \dfrac{J_1}{J_m} \right]}{6 \sum\limits_1^{n-1} B_m + 0{,}2\,\nu \left[\dfrac{J_1}{J_0} + \sum\limits_1^n B_{m-1}^2 \,(1 + \beta_m)^2 \dfrac{J_1}{J_m} \right]}.$$

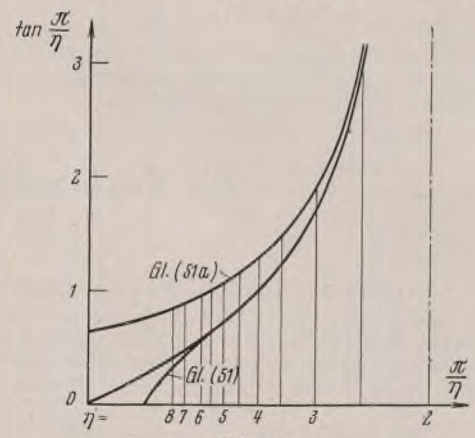


Bild 13.

Für $P = \text{const}$, $J_{m,\,m-1} = J_{0,1}$, $J_0 = \infty$, $J_m = J_1$ wird nach Gl. (49) mit der Bezeichnung

$$(56) \qquad R = \nu \cdot \frac{4\,(n - 1) + 1}{n} + 32\,n^2 \left(\frac{h}{b}\right)^2 \frac{\lambda}{\lambda^2},$$

$$(57) \qquad \varkappa = 1 + \frac{R}{6 + 0{,}2\,R}.$$

Zahlenbeispiel: $\nu = 2{,}5$, $n = 3$, $h = 8{,}6$ m, $b = 11{,}0$ m, $\lambda = 40$.

$$R = 2{,}5 \cdot 3 + 32 \cdot 9 \left(\frac{8{,}6}{11{,}0}\right)^2 \frac{1}{40^2} = 7{,}50 + 0{,}13 = 7{,}63;$$

somit nach Gl. (49)

$$\varkappa = 1 + \frac{7{,}63}{6} = 2{,}27,$$

während sich nach der genaueren Gl. (57) $\varkappa = 2{,}01$ ergibt. Bei Vernachlässigung der zusätzlichen Längskräfte erhält man $\varkappa = 2{,}00$ und nach der genauen Untersuchung $\varkappa = 1{,}95$. Die verfeinerte Näherungsrechnung liefert also einen um nur 2,5 % zu hohen Wert.

Beim allgemeinen Fall des mehrstöckigen Rahmens geht man zweckmäßig so vor, daß man zunächst die Werte $\varkappa$ mit Hilfe der Gleichungen (37) und (9) ermittelt, sodann für den Mittelwert von $\varkappa$ die Verbesserung v nach Gl. (52a) bestimmt und nunmehr in Gl. (37) den Faktor von ν mit v multipliziert. Man gelangt dann zu neuen Werten von $\varkappa$, die, je nach den Anforderungen, die man an die Genauigkeit stellt, weiter verbessert werden können.

Zum Beispiel ist bei dem unter C, b behandelten Beispiel des zweistöckigen Rahmens der Mittelwert der Knickbeiwerte

$$\varkappa = \frac{1}{2}\,(1{,}310 + 1{,}473) = 1{,}392.$$

Damit wird $\nu = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}392 = 0{,}922$ und $\varkappa_{0,1} = 1{,}28$. Dieser Wert stimmt mit dem nach dem genauen Verfahren ermittelten überein. Da die Riegel verhältnismäßig steif sind, macht die Verbesserung nur rd. 2 % aus.

Beim mehrstöckigen Rahmen mit Fußgelenken ist für das unterste Geschoß $\eta = \varkappa$, für die oberen Geschosse $\eta = 2\,\varkappa$. Man kann also zur Berechnung der Verbesserung ν Gl. (52) benutzen, wenn man bei Bildung des Mittelwertes $\varkappa$ die Knickbeiwerte der oberen Geschosse mit dem doppelten Betrag einsetzt.

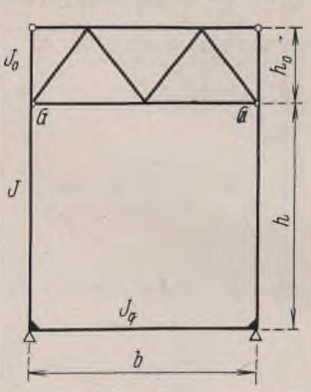


Bild 14.

e) Rahmen mit Gitterriegeln und Eckstäben.

Die Anwendung unseres Verfahrens auf diese Rahmenformen ist, wie die folgenden Beispiele zeigen, unschwer möglich.

Die Pfosten werden im allgemeinen so dimensioniert sein, daß der zum Gitterriegel gehörende Teil des Pfostens als Einspannstab wirkt.

Bei Vernachlässigung der Längskräfte in den Gitterstäben wird bei einem Rahmen nach Bild 14

$$(58) \qquad \varkappa = \frac{h_k}{h} = 1 + \frac{1}{6}\,(\nu_q + 2\,\nu_0),$$

worin

$$\nu_q = \frac{J}{J_q} \cdot \frac{b}{h} \qquad \nu_0 = \frac{J}{J_0} \cdot \frac{h_0}{h}$$

ist.

Berücksichtigt man den Einfluß der Längenänderung der Gitterstäbe, so kommt auf der rechten Seite der Gl. (58) noch das Glied

$$\frac{J}{h} \sum \frac{S^2 l}{F}$$

hinzu. S ist die durch das Moment 1 in den Punkten 9 hervorgerufene Stabkraft der Fachwerkstäbe, l ihre Systemlänge. Bei der Summenbildung ist nur eine Rahmenhälfte zu berücksichtigen.

Bei fester Einspannung der Pfostenfüße ist $\nu_q = 0$ zu setzen.

Beim Zweigelenkrahmen wird

$$(59) \qquad \varkappa = 2 + \frac{2}{3} \cdot \nu_0 + \frac{2\,J}{h} \sum \frac{S^2 l}{F}.$$

Nach den Untersuchungen unter B ist bei der in Bild 15 dargestellten Rahmenform das Schlankheitsverhältnis ν_0 mit $\gamma = \frac{7}{8}$ zu multiplizieren.

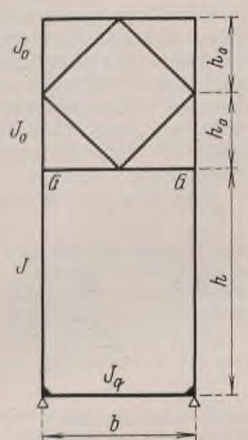


Bild 15.

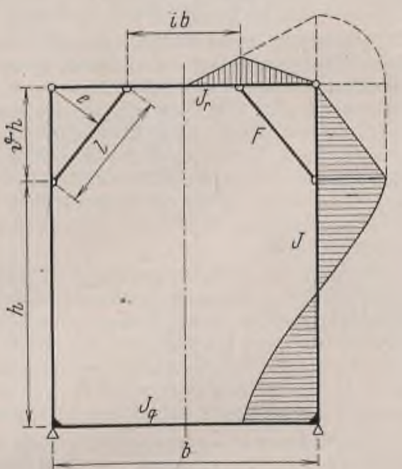


Bild 16.

Beim Rahmen mit Eckstäben wird mit den Bezeichnungen von Bild 16 bei Beachtung des dort eingezeichneten Momentenverlaufes

$$(60) \qquad \varkappa = 1 + \frac{1}{6}\left(\nu_q + 2\,\vartheta + i^2 \nu_r\right) + \frac{J}{F} \cdot \frac{l}{h} \cdot \frac{1}{e^2},$$

beim Zweigelenkrahmen mit Eckstäben

$$(61) \qquad \varkappa = 2 + \frac{1}{3}\left(2\,\vartheta + i^2 \nu\right) + 2 \cdot \frac{J}{F} \cdot \frac{l}{h} \cdot \frac{1}{e^2}.$$

f) Der mehrfeldrige Stockwerkrahmen.

Die in den Abschnitten a) und b) abgeleiteten Beziehungen sind auf die Endpfosten eines zur lotrechten Schwerachse symmetrischen Stockwerkrahmens dann anwendbar, wenn die Wendepunkte der Riegel der Endfelder beim Knicken in der Mitte der Riegel liegen. Diese Voraussetzung ist bei gleichmäßig verteilter Belastung der Riegel dann erfüllt, wenn

1. das Verhältnis $P:J$ für sämtliche Pfosten eines Stockwerks konstant ist,
2. das Verhältnis $b:J_m$ für sämtliche Felder eines Riegels konstant ist,
3. die Belastung sich auf die einzelnen Pfosten so verteilt, als ob die Riegel an die Pfosten gelenkig angeschlossen wären.

Die dritte Voraussetzung ist wegen der Kontinuität der Riegel nie erfüllt, trifft jedoch, wie die statische Untersuchung der mehrfeldrigen Stockwerkrahmen zeigt, mit großer Annäherung zu. Weniger gut ist die erste Voraussetzung, namentlich bei den oberen Stockwerken erfüllt, da die Biegemomente in den äußeren Pfosten schon an sich wesentlich größer sind wie in den inneren, außerdem aber im allgemeinen in den oberen Stockwerken die Biegungsspannungen gegenüber den Normalspannungen stark anwachsen.

Immerhin kann man die oben abgeleiteten Beziehungen als Näherung verwenden. Für die mittleren Pfosten ist für ν der Mittelwert (vgl. Bild 17)

$$\nu = \frac{1}{2} \cdot \frac{J}{h}\left(\frac{b_l}{J_l} + \frac{b_r}{J_r}\right)$$

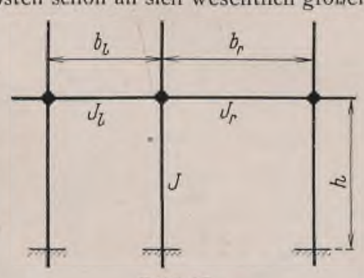


Bild 17.

einzusetzen. Der Einfluß der zusätzlichen Längskräfte ist bei mehreren Feldern noch geringer als beim Einfeldrahmen.

g) Pfosten mit innerhalb des Stockwerks veränderlichem Trägheitsmoment.

Als Beispiel betrachten wir die in Bild 18 dargestellte, häufig vorkommende Form des Zweigelenkrahmens, bei dem sich das Trägheitsmoment der Pfosten stetig ändert. Hier ist bei Anwendung unserer Formeln zu beachten, daß bei der Berechnung von ν nicht etwa ein mittlerer Wert des Trägheitsmoments des Pfostens, sondern das Trägheitsmoment max J an der Einspannstelle einzusetzen ist. Bei der Dimensionierung ist selbstverständlich mit dem ideellen Trägheitsmoment $J_i = \mu$ max J zu rechnen, worin

$$\mu = 0{,}2 + 0{,}8 \sqrt[3]{\left(\frac{\min J}{\max J}\right)^2}$$

zu setzen ist. Für b ist nicht die Stützweite, sondern die Abwicklung des Riegels einzusetzen.

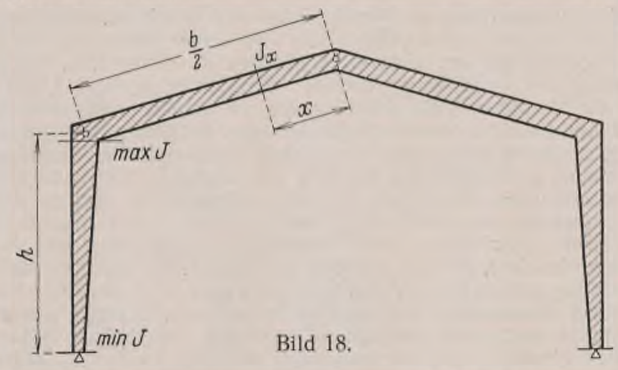


Bild 18.

Ist auch das Trägheitsmoment des Riegels veränderlich, so tritt an Stelle von $\frac{\nu}{3}$ der Ausdruck

$$8 \cdot \frac{h}{b} \cdot \max J \int_0^{b/2} \frac{x^2}{J_x} \cdot dx.$$

Ändern sich Trägheitsmoment und Stabkraft sprungweise, so kann μ mit Hilfe der Beziehungen (24) bzw. (25a) oder (25b) ermittelt werden.

D. Schrifttum.

Die Knickfestigkeit einfacher Fälle der Knickung von Rahmen ist in der Literatur unter Benutzung der Differentialgleichung des auf Druck und Biegung beanspruchten Stabes mehrfach behandelt worden. Außer der bereits obenerwähnten Veröffentlichung von Hertwig u. Pohl, sei z. B. auf die Veröffentlichung von Boros, „Verallgemeinerte Grundformeln der Eulerschen Knickfälle", Stahlbau 1934, S. 10, sowie auf das Buch von Hartmann, „Knickung, Kippung und Beulung", Leipzig und Wien 1937, verwiesen. Im Bauing. 1938, S. 69, untersucht Chwalla in der Abhandlung „Stabilität von Rechteckrahmen" den Einfluß des Rahmenschubes des Zweigelenkrahmens auf dessen Knickfestigkeit. Die strenge Knickbedingung für den elastisch eingespannten Stab haben F. Bleich (Theorie und Berechnung der eisernen Brücken, Berlin 1924) und Mises und Ratzersdorfer (Knicksicherheit von Rahmentragwerken, Z. ang. Math. 1926), sowie Ratzersdorfer (Die Knicksicherheit von Stäben und Stabwerken, Wien 1936) abgeleitet.

Unser Verfahren ist eine den besonderen Bedingungen der Aufgabe angepaßte Abwandlung der Energiemethode von Bryan-Ritz-Timoshenko (vgl. z. B. F. Bleich a. a. O.). Es ist, wie in einer weiteren Veröffentlichung, die sich mit der Knickfestigkeit von Fachwerkstäben befaßt, nachgewiesen werden soll, nur dann anwendbar, wenn die Formänderungsarbeit der äußeren Kräfte

$$\mathfrak{A}_a = \frac{P}{2} \int_l^{\zeta l} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$$

vernachlässigt werden kann. Die Grundgleichung (2) gilt somit nur in Annäherung. Bei der Energiemethode in der üblichen Form muß die Knicklinie des gesamten Stabes durch eine Näherungsfunktion möglichst genau wiedergegeben werden, während wir uns nur mit der Knicklinie in der gedachten Verlängerung des Stabes zu befassen brauchen. Darauf beruht die gute Konvergenz unseres Näherungsverfahrens. In noch anderer Form ist die Formänderungsarbeit von Puwein (Stahlbau 1938, Heft 14/15, „Knickfestigkeit des Stockwerkrahmens II") zur Untersuchung der Knickfestigkeit von Rahmen mit konstantem P und J in sämtlichen Stockwerken verwendet worden. Auf die vorhergehende Veröffentlichung, Stahlbau 1936, Heft 26, und 1937, Heft 1, ist bereits oben verwiesen.

Die Festigkeit und Gewichtsersparnis in bezug auf St 52 bei auf Druck beanspruchten Elektronstäben.*)

Von Dr.-Ing. Wilhelm Moheit, Mainz-Gustavsburg.

Sobald bei Konstruktionen aus Elektronmetall Druckkräfte übertragen werden müssen, erfordert dies besondere Aufmerksamkeit des Konstrukteurs. Außer bei auf Biegung beanspruchten Trägern, wo im Gegensatz zu den Werkstoffen Stahl und Duralumin die zulässige Spannung auf der Druckseite tiefer als auf der Zugseite anzusetzen ist, trifft dies vor allem bei Knickstäben, gedrückten Platten und Schalen zu. Infolge des im Vergleich zu Stahl beträchtlich niedrigeren Elastizitätsmoduls, der etwa 400 000 bis 450 000 kg/cm² beträgt, könnte man der Ansicht sein, daß die Verwendung von Elektronmetall bei Knickstäben aussichtslos ist und daß man derartige Tragglieder auf alle Fälle umgehen müßte. Daß dies nicht immer der Fall zu sein braucht, soll nachstehend gezeigt werden, wenn vor allem Wert auf geringstes Gewicht gelegt wird und dabei wirtschaftliche und ähnliche Gesichtspunkte außer acht bleiben.

Bei der konstruktiven Durchbildung von Druckquerschnitten lassen sich zwei Gruppen unterscheiden. Zu der ersten zählen die Knickstäbe des Flugzeugbaues, zur anderen diejenigen des Luftschiff-, Stahl- und größtenteils auch des Waggonbaues. Bedingt wird diese Unterteilung durch die Tatsache, daß im Flugzeugbau infolge der vielfach sehr kleinen Abmessungen der Druckglieder eine Auflösung des Querschnitts in einzelne Stäbe insbesondere bei kleinen Kennwerten (hierüber siehe weiter unten) nicht in Frage kommt, was dagegen beim Luftschiff- und Stahlbau allgemeine Regel ist. Im Flugzeugbau würde man zu schwache Profile erhalten, die nicht mehr griffest wären. Aus diesem Grunde nimmt man daher lieber eine Querschnittsvergrößerung mit kleinerer Wanddicke in Kauf, obwohl dadurch die Gefahr des lokalen Ausknickens der Wandung gehoben wird. Demgegenüber versucht man im Stahl- und Waggonbau dünnwandige Querschnitte zu umgehen. Die hier verwendeten Querschnitte sind in ihrem Aufbau meistens kompakter, wodurch die genannten Nachteile bei dünnwandigen Profilen erheblich abgemindert werden.

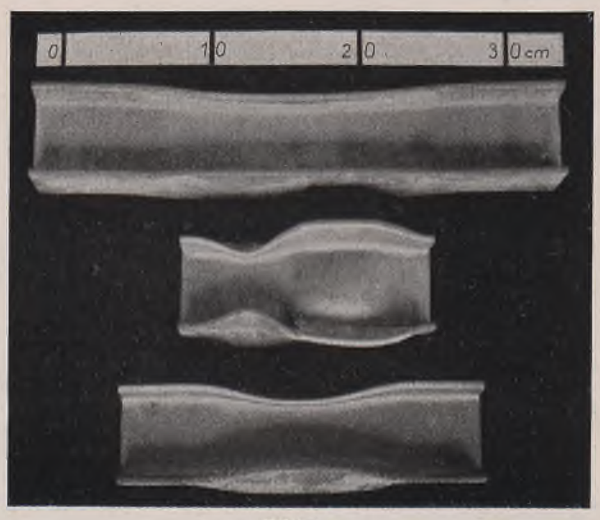


Bild 1.

Geschlossene dünnwandige Profile von verhältnismäßig großer Länge können noch mit Hilfe der Eulerformel bemessen werden. Bei Verringerung der Knicklänge wird aber das Profil von einer bestimmten Grenze ab nicht mehr nach einer Sinuslinie ausknicken, sondern die Stabilität wird vorzeitig durch Bildung von Wellen, Falten und Beulen erschöpft.

*) Die Arbeit entstand im Rahmen von Entwicklungsarbeiten bei der I. G. Farbenindustrie A.-G, Werk Bitterfeld, Abteilung Elektronmetall.

In solchen Fällen ist dann die Stabilität von Schalen[1]) maßgebend. Ähnliche Verhältnisse liegen auch bei solchen Profilen vor, die nicht als Hohlprofile ausgeführt sind, deren Querschnitt aber Symmetrie zu beiden Hauptachsen — z. B. I-Profil — aufweist. Derartige Profile versagen vielfach im „plastischen" Bereich durch Faltenbildung der abstehenden Teile (vgl. Bild 1). Sind diese Teile Hauptglieder des Profils, so kann die Grenze der Tragfähigkeit des gesamten Profils mit der Beulspannung dieser Tragglieder gleichgesetzt werden. Erst bei sehr kleinen Schlankheiten treten die bekannten Scherbrüche (Bild 2) auf. Schließlich muß bei den Profilen des Flugzeugbaues noch eine dritte wichtige Gruppe unterschieden werden, nämlich die offenen und zu den Hauptachsen unsymmetrisch ausgebildeten Profile, die hauptsächlich durch Ausdrehen versagen, was bei Stäben kleiner Schlankheit unterhalb der Knickgrenze (wobei der Stab als Einheit wirkend gedacht wird) stattfindet. Dieses Ausdrehen ist ein Kipp-Problem. Es wurde bei Winkelprofilen schon frühzeitig von Bryan[2]) und später z. B. von Wagner[3]) näher behandelt.

Bei den üblichen Profilen des Stahlbaues hat man weniger mit derartigen Schwierigkeiten zu rechnen, weil die Stäbe meistens als Ganzes wirken und somit die Instabilität weniger durch einzelne Querschnittsteile bestimmt wird. Die bisherigen Knickvorschriften des Stahlhoch- und Brückenbaues legen deshalb allgemein die ideellen Knickspannungen zugrunde und berücksichtigen die Abweichungen von den Annahmen (ideal gerade Stabachse, ideal mittiger Kraftangriff und ideal homogener Werkstoff) durch einen entsprechenden Sicherheitsfaktor, während von den abmindernden Einflüssen infolge lokaler Knickerscheinungen kaum gesprochen wird.

Vielfach hat der Konstrukteur die Frage zu beantworten, den leichtesten Knickstab bei gegebener Last und Knicklänge zu finden. Er wird im allgemeinen so vorgehen, daß er eine für den vorliegenden Fall günstige Querschnittsform festlegt und für diese die optimale Größe durch geometrische Vergrößerung oder Verkleinerung auf dem Wege des Probierens sucht. Etwas schwieriger gestalten sich dann aber die Verhältnisse, wenn verschiedene Baustoffe zur Auswahl stehen.

Prof. Wagner[4]) entwickelte ein Verfahren, welches rein auf die Belange des Flugzeugbaues abgestellt ist, mit dessen Hilfe es aber möglich ist, ohne Probieren direkt zum Ziele zu gelangen. Auf Grund des Ähnlichkeitsgesetzes der Festigkeitslehre — daß bei geometrisch ähnlichen Stäben aus gleichem Material, bei denen die Kräfte geometrisch ähnlich angreifen, die Spannungen an sich entsprechenden Stellen gleich sind, wenn die äußeren Lasten im Quadrat zu den Abmessungen des Stabes wachsen —, bleibt bei geometrischer Vergrößerung eines Knickstabes der sogenannte Kennwert $c = \frac{\sqrt{P}}{l}$ konstant. Würde man nun die durch Versuch gewonnenen Knickspannungen eines Profils bei bestimmten Verhältnissen als Funktion der Schlankheit auftragen (Bild 3), so ersieht man aus dieser Art der Darstellung keineswegs, welcher Stab bei gegebener Last und Länge der leichtere ist, sondern man müßte notgezwungen mit Querschnitten verschiedener Wanddicke einige Proberechnungen durchführen. Dieser Nachteil wird ausgeschaltet, wenn man die Knickspannungen als Funktion des Kennwertes c aufträgt (Bild 4). Hierbei ergeben sich die

[1]) Hierüber kann z. B. nachgelesen werden bei: Lorenz, Z. d. VdI 1908, S. 1706 bis 1713; ders., Phys. Zeitschr. 1911, Jahrg. 12, S. 241 bis 260, Leipzig. — Timoshenko, Z. ang. Math. u. Phys. 1910, S. 337. — Geckeler, Z. ang. Math. u. Mech. 1928, S. 341 bis 352. — v. Sanden u. Tölke, Ing.-Archiv 1932, S. 24 bis 66. — Flügge, Ing.-Archiv 1932, S. 463 bis 506.

[2]) Bryan, London Math. Soc. Proc. Bd. 22 (1891), S. 54, und Bd. 25 (1894), S. 141. — S. auch Mayer, Knickfestigkeit, S. 35, Berlin 1921, Springer.

[3]) Wagner, Festschrift zum 25 jährigen Bestehen der T. H. Danzig, 1929, S. 329.

[4]) Wagner, Ztschr. f. Flugtechn. u. Motorluftsch. 1928, S. 241.


Bild 2.

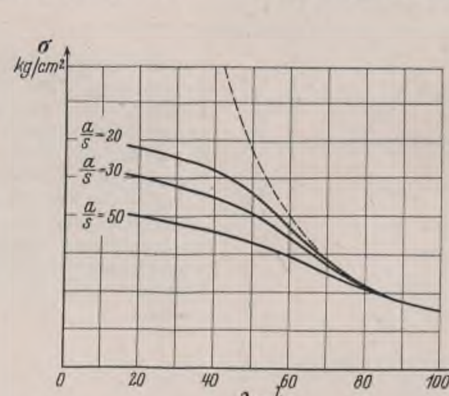


Bild 3.

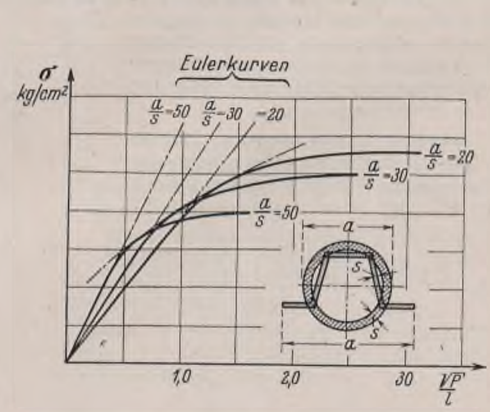


Bild 4.

Eulerkurven als gerade Linien, von denen die Knickkurven im plastischen Bereich abzweigen, um sich dann der Quetsch- oder Beulgrenze horizontal zu nähern. Die Bemessung eines mittig gedrückten Stabes gestaltet sich hiernach sehr einfach; denn mit Hilfe der beiden Größen P und l ist der Kennwert c gegeben, hierauf wird aus dem betreffenden Diagramm der vorher festgelegten Profil**form** die zulässige Knickspannung und das Verhältnis $\frac{a}{s}$ entnommen, um dann an Hand einer Profiltafel die absolute Größe des Querschnitts festzulegen. Bild 4 bestätigt auch, daß im allgemeinen bei kleinen Kennwerten die dünnwandigen und bei größeren Kennwerten die dickwandigen Profile maßgebend sind. Stehen nun derartige Diagramme von verschiedenen Querschnittsformen zur Verfügung, so kann außerdem ohne besondere Mühe auch die leichteste unter diesen verschiedenen Querschnittsformen gefunden werden. Schließlich läßt sich noch dieses Verfahren auf Profile aus verschiedenen Baustoffen ausdehnen, wobei dann am zweckmäßigsten auf der Ordinatenachse die Werte $\frac{\sigma}{\gamma}$ aufgetragen werden, um auf diese Weise sofort vergleichbare Werte zu erhalten.

So einfach und bequem das Kennwert-Verfahren zu handhaben ist, gibt es keinen unmittelbaren Aufschluß darüber, welche absoluten Umgrenzungsmaße das günstigste Profil besitzt — denn vielfach wird die Entwicklung zur Breite beschränkt sein — und in welchen Grenzen sich etwa die erzielte Gewichtsersparnis bewegt. Im folgenden sollen in dieser Hinsicht die möglichen Gewichtsersparnisse von Elektronstäben (Legierung: Mg-Al 6 nach DIN 1717) bezogen auf St 52 im Verein mit der erforderlichen Querschnittsverbreiterung näher untersucht bzw. soll gezeigt werden, auf welche Schwierigkeiten man trotz der einfachen Fragestellung stößt.

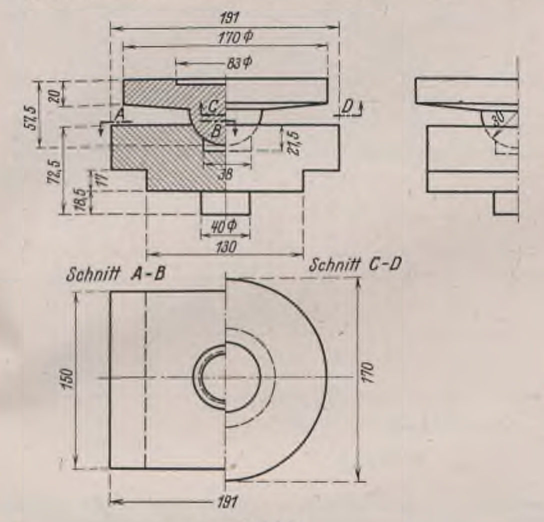


Bild 5.

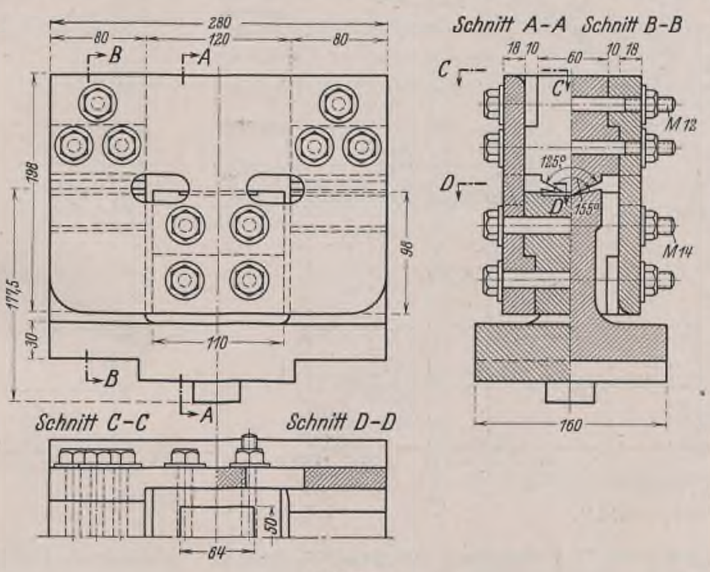


Bild 6.

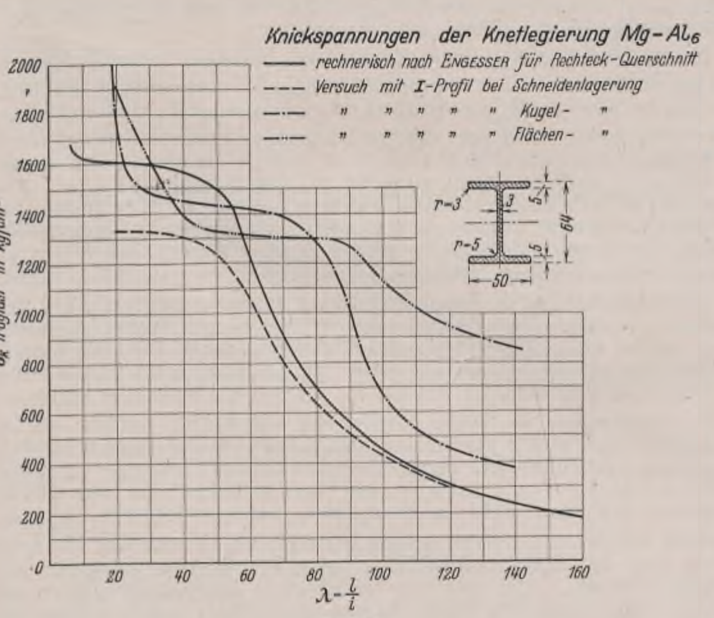


Bild 7.

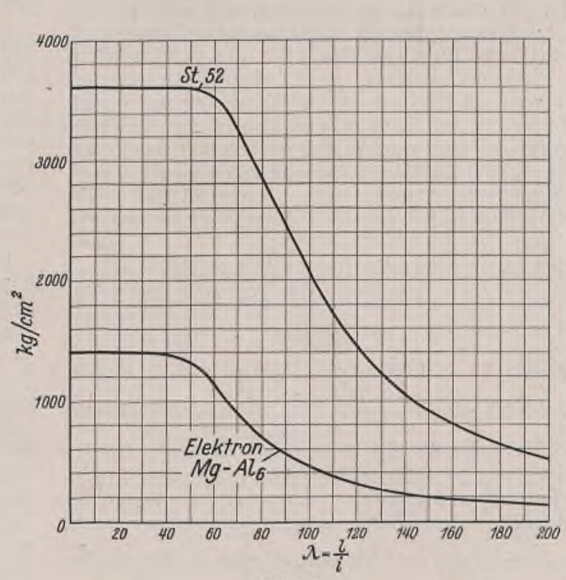


Bild 8.

Zu diesem Zwecke war es zunächst erforderlich, Klarheit über die Knickspannungen dieses Werkstoffs durch Versuch und Rechnung zu gewinnen. Als Prüfstab diente ein I-Profil mit den in Bild 7 angegebenen Abmessungen. Das Profil fand so Verwendung, wie es aus der Fabrikation anfällt; nur wurden die Stäbe nachgerichtet und die Enden auf Fertigmaß tuschiert. An einer 60 t-Losenhausen-Druckpresse wurden die Profile

1. mit einer Kugellagerung nach Bild 5,
2. mit einer Schneidenlagerung nach Bild 6 und
3. mit einer Flächenlagerung, indem die Profilenden einfach zwischen zwei Platten gestellt wurden,

bis zum völligen Versagen (Bestimmung der absoluten Tragfähigkeit) untersucht. Die Versuche bei Kugellagerung befriedigten nicht, weil infolge der Reibung eine teilweise Einspannung vorlag. Außerdem streuten die Werte sehr, da sich die Reibung sehr unterschiedlich auslöste. Bei den schlanken Stäben lagen die Werte durch die Einspannung im allgemeinen zu hoch; die Werte der kurzen Stäbe wurden ferner ungünstig durch die „starren" Stabenden beeinflußt. Derartige Nachteile können bei der in Bild 6 gezeigten Schneidenlagerung nicht auftreten. Die Versuche lieferten hier auch ziemlich regelmäßige Ergebnisse. Bezeichnend ist aber, daß die Knickspannungen (Bild 7) knapp $\sigma = 1300$ kg/cm² überschreiten, was in Übereinstimmung mit den Versuchen bei Flächenlagerung liegt.

Außerdem wurden Druckversuche an einem kreiszylindrischen Probekörper mit $\lambda = 12$ ($h:d \backsim 3$) zur Aufnahme von Druck-Stauchungs-Diagrammen durchgeführt, womit nach **Engeßer** die Knickspannungslinie für einen Rechteckquerschnitt berechnet wurde. Dabei ist zu beachten, daß die hier benutzte Knetlegierung Mg-Al 6 zu denjenigen zähen Werkstoffen zählt, die keine ausgeprägte Fließ- oder Quetschgrenze besitzen. Die Arbeitslinie folgt anfangs der Hookeschen Geraden, die oberhalb der $\sigma_{0,2}$-Grenze, bei welcher die Quetschgrenze angenommen wird, in eine zweite bedeutend flacher geneigte Gerade abbiegt, ohne dabei die Neigung Null anzunehmen, um dann schließlich nochmals etwas steiler bis zur Bruchlast anzusteigen. In bezug auf die Knickbeanspruchung eines mittig beanspruchten Stabes heißt das, daß die Knickspannung bei schlanken Stäben der Eulerhyperbel folgt, bei sehr kleinen Schlankheiten im Gegensatz zu den Baustählen aber nochmals etwa in Form einer zweiten Eulerhyperbel ansteigt, um erst bei der **Bruchlast** auf $\lambda = 0$ zu gehen, ohne in der Nähe der $\sigma_{0,2}$-Grenze instabil zu werden. Diesem Anstieg kommt aber praktisch infolge der großen Verformungen keine Bedeutung zu, weshalb man dort, wo die Knickspannungslinie sich etwa der Horizontalen nähert, die Spannungslinie bis $\lambda = 0$ horizontal weiter zeichnen wird. Auf diese Weise gelangt man auch an Stelle der willkürlich angenommenen $\sigma_{0,2}$-Grenze zu einer praktisch begründeten Quetschgrenze. So ergibt sich in diesem Fall die „praktische" Quetschgrenze (vgl. Bild 7) zu $\sigma = 1600$ kg/cm² und liegt bedeutend höher als die entsprechende Stelle der Versuchskurven bei Schneiden- und Flächenlagerung. Der Grund, daß die Versuche dort nur $\sigma \backsim 1300$ kg/cm² liefern, ist darin zu suchen, daß — wie Bild 1 z. B. zum Ausdruck bringt — lokale Knickerscheinungen bei den kurzen Stäben auftraten und somit das vorzeitige Erreichen der Stabilitätsgrenze bewirkten. Selbstverständlich sind auch hierbei Fehler infolge geringer Exzentrizität, Anfangskrümmungen und ungleicher Werkstoffeigenschaften schon einbegriffen. Sicherlich wird aber die errechnete Kurve als die für die höchsten Werte maßgebende angesehen werden können. Darauf hingewiesen sei noch, daß die Versuche mit Flächenlagerung den nochmaligen Anstieg der Spannungen bei kleinen Schlankheiten deutlich erkennen lassen.

Leider konnten keine weiteren I-Profile mit gleichen äußeren Querschnittsabmessungen, aber mit verschiedenen Flanschdicken untersucht werden, um somit entsprechend Bild 3 den Einfluß der Wanddicken zu ersehen. Trotzdem soll der Versuch unternommen werden, sich ein angenähertes Bild über die gewichtlichen Verhältnisse bei auf Druck beanspruchten Elektronstäben im Vergleich zum hochwertigen Baustahl zu verschaffen. Es wurde dabei für St 52 die bisher maßgebende Knickspannungslinie nach DIN 1050 und für Mg-Al 6 die im Bild 8 aufgetragene allgemein zugrunde gelegt. Letztere unterscheidet sich von der in Bild 7 dadurch, daß die praktische Quetschgrenze zu $\sigma = 1400\,\text{kg/cm}^2$ angenommen wurde. Es ließe sich sicherlich auf Grund der nach Engeßer errechneten Kurve verantworten, dort die Spannung höher anzunehmen; sie wurde hier aber absichtlich aus Sicherheitsgründen tiefer gewählt. Der Elastizitätsmodul betrage bei Elektron $E = 450\,000\,\text{kg/cm}^2$ und bei Stahl $E = 2\,100\,000\,\text{kg/cm}^2$; die spezifischen Gewichte sind entsprechend $\gamma = 1{,}8$ und 7,85. Zu der Knickspannungslinie für St 52 sei noch bemerkt, daß der nach den Vorschriften vorhandene scharfe Knick bei $\lambda = 60$ ausgerundet wurde, um stetige Kurven zu erhalten.

Infolge des Ähnlichkeitsgesetzes der Festigkeitslehre bleibt es gleichgültig, mit welcher absoluten Größe des Querschnitts man rechnet. Aus diesem Grunde wurde bei den hier untersuchten Kreis- und Quadratquerschnitten für den Durchmesser bzw. für die Kantenlänge die Längeneinheit angenommen. Schließlich läßt sich ferner leicht beweisen, daß sich der Kreis- und Quadratquerschnitt im Hinblick auf Gewichtsersparnis zu irgendeinem anderen Baustoff als vollkommen gleichwertig verhalten; denn die konstanten Faktoren in den Formeln der Trägheitsmomente kürzen sich bei den Vergleichsrechnungen heraus, so daß nur die Kantenlänge oder der Durchmesser maßgebend ist.

In den Bildern 9 bis 11 ist das Ergebnis der Untersuchungen aufgetragen. Es wurden dabei drei Stahlquerschnitte näher geprüft, und zwar der Vollquerschnitt $K_{St} = 0$ (Bild 9) und zwei Hohlquerschnitte, wobei zum einen das Verhältnis von Innen- zu Außenmaß $K_{St} = 0{,}5$ (Bild 10) und zum anderen $K_{St} = 0{,}9$ (Bild 11) beträgt. Zu jedem dieser drei Querschnitte wurden für $\lambda = 20, 30, 40 \ldots 200$ die Knicklängen und Knicklasten berechnet und für diese Stahlstäbe die entsprechenden Elektron-

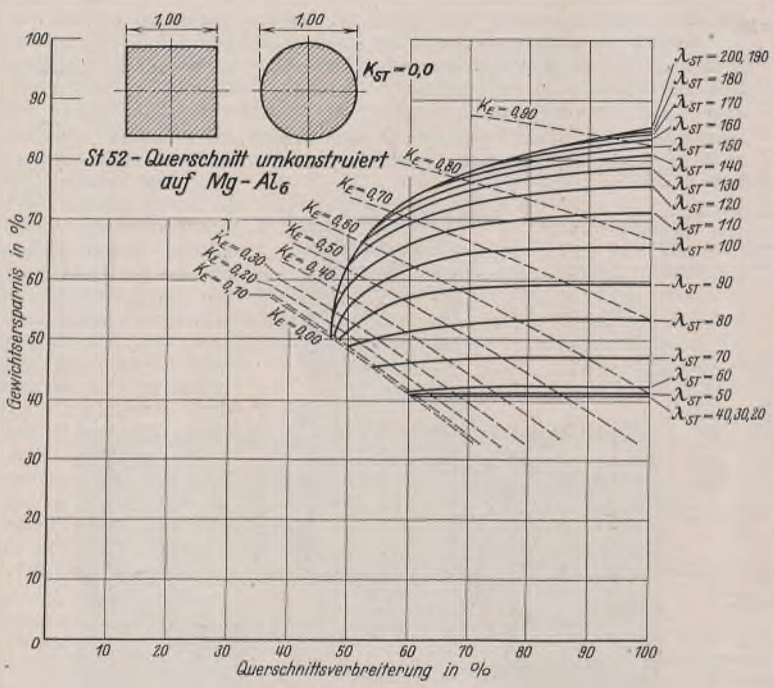


Bild 9.

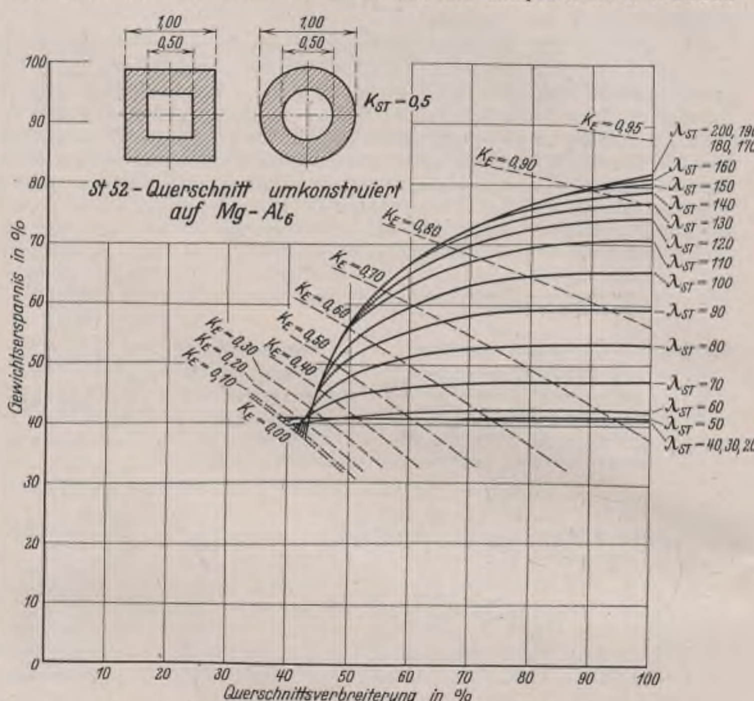


Bild 10.

Um die Untersuchungen nicht zu umfangreich zu gestalten, können vorerst nicht die lokalen Knickerscheinungen und sonstige widerstandsvermindernde Einflüsse berücksichtigt werden, sondern es wird die Annahme einer allgemein gültigen Knickspannungslinie für jeden der beiden Baustoffe gemacht. Derartige widerstandsvermindernde Einflüsse lassen sich zum Schluß durch einen geeigneten Korrekturfaktor berücksichtigen. Ein Vergleich der beiden Knickspannungslinien nach Bild 8 liefert nun aber keinerlei Anhaltspunkte über die gewichtlichen Verhältnisse, wenn man sich die Aufgabe stellt, einen Stahlstab bei gegebener Knicklast und Länge auf Elektron umzudimensionieren. Infolge der niedrigen zulässigen Spannung bei Elektron muß nämlich der Elektron-Querschnitt vergrößert werden. Damit wächst andererseits der Trägheitsradius und verkleinert sich der Schlankheitsgrad, wodurch schließlich eine etwas höhere Spannung zugelassen werden kann. Aus diesen Gründen lassen sich die gesuchten Abmessungen der Elektron-Profile nur schwer abschätzen.

Solange die zu bemessenden Querschnitte im Eulerbereich liegen, kann man ohne Probieren zum Ziele gelangen. Das gegebene Stahlprofil von der Länge l besitzt nach Euler als Knicklast: $P = \frac{\pi^2 E_{St} J_{St}}{l^2}$. Die gleiche Knicklast hat das zu bemessende Elektron-Profil zu tragen, allerdings aber nach der Gleichung: $P = \frac{\pi^2 E_E J_E}{l^2}$. Aus der Gleichsetzung der beiden Ausdrücke erhält man die Beziehung: $E_{St} J_{St} = E_E J_E$, die besagt, daß sich die Trägheitsmomente umgekehrt wie die Elastizitätsmaße verhalten. Bei Querschnitten, deren axiale Trägheitsmomente einfache Ausdrücke darstellen, wie z. B. beim Kreis $J = \frac{r^4 \pi}{4}$ oder Quadrat $J = \frac{a^4}{12}$, auf die sich nachfolgende Ausführungen ausschließlich erstrecken, gelangt man zu verhältnismäßig einfachen Beziehungen. Ohne Schwierigkeit läßt sich hier der einem Stahl-Voll- oder Hohlquerschnitt entsprechende Elektron-Mindestquerschnitt, aber auch jeder andere Elektron-Querschnitt angeben, wenn seine Außenmaße vorgeschrieben sind. Dagegen ist ein Probieren nicht zu umgehen, wenn die Knickspannungen für Elektron im plastischen Bereich liegen. Leichter wird es wieder dort, wo die Spannungslinie sich entweder der Quetsch- oder Beulgrenze gewisser Querschnittsteile nähert.

Voll- und Hohlquerschnitte bei stetiger Vergrößerung der Außenabmessungen bestimmt. Danach wurden die Gewichtsersparnisse in Prozent ausgerechnet und graphisch in einem Achsenkreuz mit der prozentualen Querschnittsverbreiterung als Abszisse und der prozentualen Gewichtsersparnis als Ordinate aufgetragen.

Bei $K_{St} = 0$ und $K_{St} = 0{,}5$ (Bild 9 u. 10) bestehen keine Bedenken, daß der Stahlstab nicht die Knickspannungen nach Bild 8 erreicht. Dagegen ist aber bei $K_{St} = 0{,}9$ (Bild 11) wahrscheinlich, daß vorzeitige Ausbeulungen der schon sehr dünnen Wandungen eintreten, so daß nicht die Knickgrenzen nach Bild 8 erreicht zu werden brauchen. Die Werte des Bildes 11 sind also von vornherein mit einem Fehler behaftet. Als Folge der zu hoch angenommenen Knickspannungen für St 52 liegen die berechneten Gewichtsersparnisse bei den kompakteren Elektron-Querschnitten zu ungünstig und die entsprechenden Kurven des Bildes 11 müßten vor allem bei den niedrigen Stahlschlankheiten etwas höher liegen.

Außerdem ist bei den Kurven 9 bis 11 zu berücksichtigen, daß bei Elektron eine einheitliche Knickspannungslinie gemäß Bild 8 zugrunde gelegt wurde, die nicht den Ausbeulerscheinungen bei Profilen mit dünnen Querschnittswandungen Rechnung trägt. In den Bildern 9 bis 11 wurden zu diesem Zwecke noch die Kurven für gleiche K_E-Werte der Elektron-Profile eingetragen. Je dünner nämlich die Wandungen werden, um so mehr fallen nach Bild 3 die Knickspannungen ab. In den Bildern 9 bis 11 liegen also somit die Werte der prozentualen Gewichtsersparnis für diese Profile zu hoch. Die Kurven werden sehr wahrscheinlich von einem bestimmten K_E-Wert nicht mehr steigen, sondern langsam abfallen. Immerhin kommt den Kurven in den Bildern 9 bis 11 noch der Umstand zugute, daß die Knickspannungslinie nach Bild 8 sehr ungünstig angenommen wurde. Um hier den tatsächlichen Verhältnissen näher zu kommen, hätte man die Knickversuche nach Bild 7 durch weitere an I-Profilen mit anderen Flanschdicken zu ergänzen. Im gleichen Verhältnis, wie dann dort die Knickspannungen bei kleineren Wanddicken abfallen werden, hätte man die Kurven in den Bildern 9 bis 11 zwischen den entsprechenden K_E-Werten abzumindern.

Sieht man von diesen Unstimmigkeiten ab, so erkennt man, daß sich bedeutende Gewichtsersparnisse besonders bei Bild 9 und 10 unter Verwendung von Elektron erzielen lassen. In beiden Fällen ist aber eine Querschnittsvergrößerung von mindestens 40 bis 50% notwendig. Dafür

sind aber die Elektron-Stäbe um mindestens 40% im Vergleich zu St 52 leichter. Die oberste einhüllende Kurve entspricht denjenigen Stahl- und Elektron-Stäben, die im Eulerbereich ausknicken; die unterste umfaßt den Quetsch- und Beulgrenzenbereich. Beim Vergleich von Bild 11 mit den beiden vorher liegenden Bildern läßt sich feststellen, daß man mit wesentlich geringeren Querschnittsverbreiterungen auskommt, dabei aber gewichtlich nicht so günstig mehr liegt, ja sogar schwerer werden kann, wenn für den Elektron-Stab die untere Spitze der Kurvenscharen des Bildes 11 maßgebend ist. Um wesentlich leichter zu werden, müßte man auch hier erheblich den Querschnitt verbreitern, wobei dann allerdings

Abschließend kommt man somit zu dem Ergebnis, daß trotz der sehr niedrigen Knickspannungen für Elektron nach Bild 7 und 8 sich erhebliche Gewichtsersparnisse im Vergleich zu St 52 erzielen lassen. Allerdings muß in Betracht gezogen werden, dabei möglichst von dünnwandigen Profilen abzusehen, damit vorzeitige Abminderungen der Knickspannungen infolge lokaler Verbeulungen vermieden werden. Günstigste Ergebnisse hinsichtlich Gewichtsersparnis erhält man, wenn die Stahlstäbe dickwandig sind und die Stahl- und Elektron-Stäbe im Eulerbereich ausknicken. Falls sehr dünnwandige Stahlprofile umzudimensionieren sind, können aber die Elektron-Profile auch schwerer werden, wenn eine zu geringe Quer-

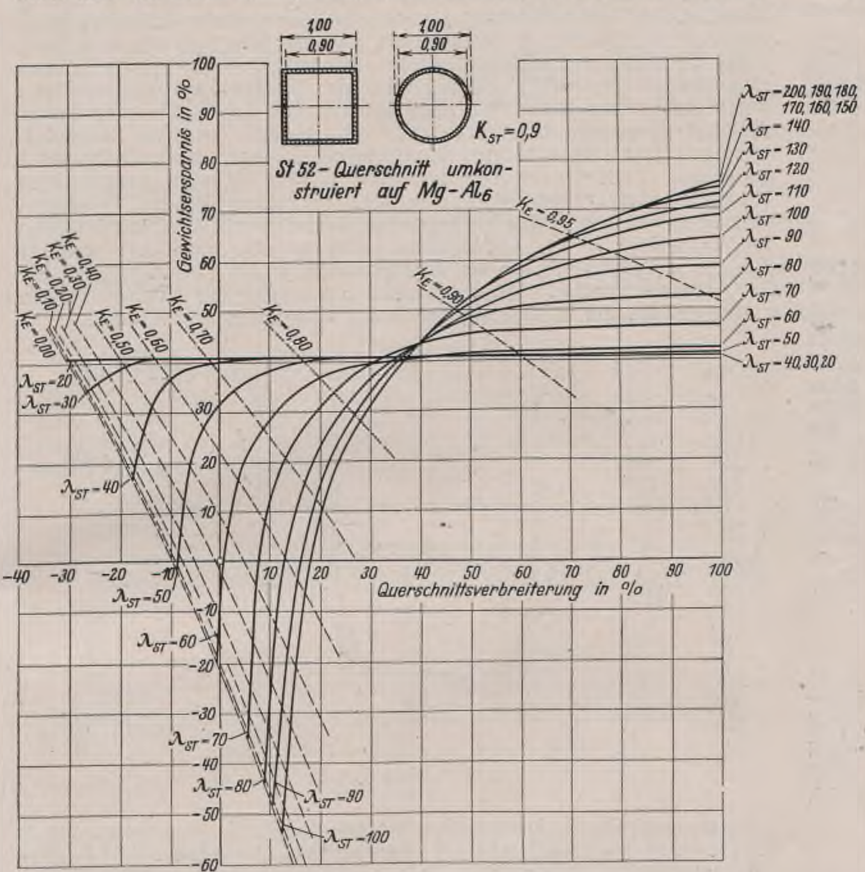


Bild 11.

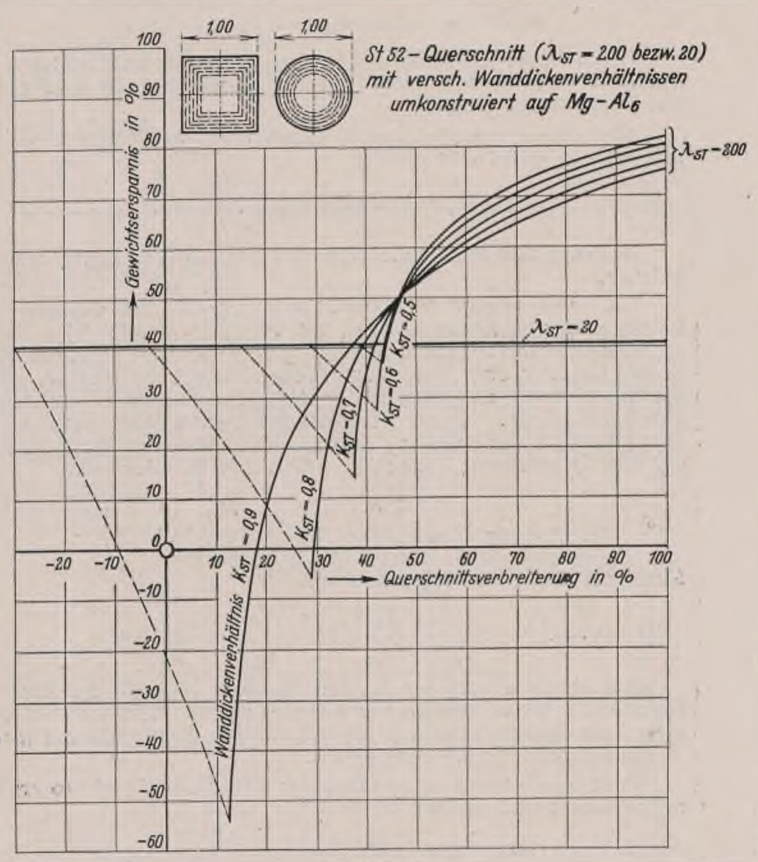


Bild 12.

zu berücksichtigen wäre, daß man die Kurven dort aus oben mehrfach erwähnten Gründen abzumindern hätte.

Wie sich die Diagramme bei den verschiedenen K_{St}-Werten verlagern, zeigt Bild 12. Es wurden dort jeweils immer nur die Umgrenzungskurven ($\lambda_{St} = 20$ und 200) eingetragen. Die fehlenden lassen sich in Anlehnung an die Bilder 9 bis 11 ziemlich genau nach Augenmaß ergänzen.

schnittsverbreiterung vorgenommen wird (Bild 11). In allen Fällen ist beim Auswerten der Bilder 9 bis 11 zu bedenken, daß bei den dünnwandigen Elektron-Hohlprofilen eine Abminderung der angegebenen Gewichtsersparnisse angebracht ist. Die hier gebrachten Ausführungen, die besonders auf den Kreis- und Quadratquerschnitt ausgerichtet sind, können sinngemäß auch auf andere Querschnittsformen — wie z. B. I- oder +-Querschnitt — übertragen werden.

Verschiedenes.

Die Berechnung der Strebenkräfte von Gittermasten.

Inhaltsübersicht. Die zur Verfügung stehenden Formeln für die Berechnung der Strebenkräfte von Gittermasten werden in bezug auf ihre Zweckmäßigkeit und Richtigkeit untersucht.

Bild 1 zeigt das Netz einer Mastwand mit in Trägerebene wirkenden Lasten. Die Untersuchung soll sich auf die bei Masten meistens vorkommenden Streben- und Ständerfachwerke beziehen.

Der allgemeine Ausdruck für die Strebenkraft in einem solchen Fachwerk ist

$$D_n = \pm \frac{d_n}{\Delta x_n}\left(\frac{M_n}{b_n} - \frac{M_{n-1}}{b_{n-1}}\right) \tag{1a}$$

oder

$$D_n = \pm \frac{d_n}{\Delta x_n}\left(\frac{M_n'}{b_n} - \frac{M_{n-1}'}{b_{n-1}}\right)^{1)} \tag{1b}$$

d = Netzlänge der Strebe,
Δx = Fachweite,
b = Netzhöhe des Trägers,
M_n = Statisches Moment der Lasten in bezug auf Punkt n
$= \Sigma H x_n + \Sigma V z_n$.

Das positive Vorzeichen gilt bei (1a), wenn die Strebe den Punkt n berührt; andernfalls gilt das negative Vorzeichen. Bei Formel (1b) ist die Sache umgekehrt.

[1]) Siehe z. B. Hütte, 26. Aufl., III. Band, S. 7. Berlin 1928, Wilhelm Ernst & Sohn.

Gl. (1a) u. (1b) gelten nicht nur für Gurte mit gleichbleibender Neigung, sondern ganz allgemein für Träger mit beliebiger Umrißform; jedoch haften diesen Gleichungen zwei Nachteile an:

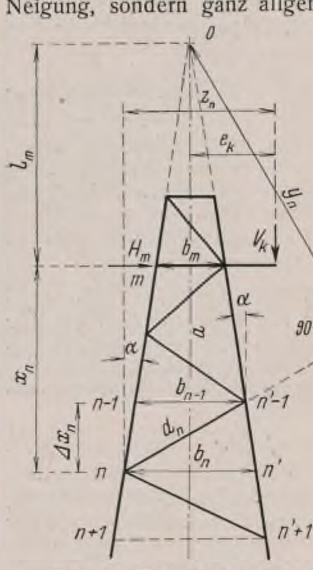


Bild 1. Fachwerknetz einer Gittermastwand.

1. Der Wert M_n muß für alle Knotenpunkte ausgerechnet werden.
2. Bei den Streben im unteren Mastteil werden die einzelnen Glieder in der Klammer groß und die Differenz wird klein, so daß bei Benutzung des Rechenschiebers die Strebenkraft ungenau erhalten wird.

Eine einfachere Formel, in der keine Differenz enthalten ist, findet man durch Aufstellen des Momentengleichgewichts in bezug auf den Punkt 0. Man erhält

$$D_n = \pm \frac{M_0}{y_n}$$

$$y_n = \frac{b_n\, b_{n-1}}{d_n\, 2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}.$$

$$D_n = \pm M_0\, 2 \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{d_n}{b_n\, b_{n-1}}. \tag{2}$$

Das positive Vorzeichen gilt für nach rechts ansteigende, das negative für nach links ansteigende Streben.

$$M_0 = \Sigma H_m\, l_m - \Sigma V_k\, e_k.$$

Die Formel (2) enthält außer den Netzgrößen d_n, b_n und b_{n-1} nur noch den Wert $M_0\, 2 \cdot \operatorname{tg}\alpha$, der für alle unterhalb der Lastgruppe befindlichen Streben unveränderlich ist.

Multipliziert man $M_0\, 2 \cdot \operatorname{tg}\alpha$ aus, so erhält man

$$M_0\, 2 \cdot \operatorname{tg}\alpha = \Sigma H_m\, l_m\, 2 \cdot \operatorname{tg}\alpha - \Sigma V_k\, e_k\, 2 \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

$$M_0\, 2 \cdot \operatorname{tg}\alpha = \Sigma H_m\, b_m - \Sigma V_k\, e_k\, 2 \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Durch diese Umrechnung hat man es bei der Berechnung der Strebenkräfte nicht mehr nötig, Größen auszurechnen, die nicht zum Netzwerk des Mastes gehören.

Sind die senkrechten Lasten symmetrisch zur Trägermittellinie angeordnet, so erhält man aus (2)

$$\text{(3)} \qquad D_n = \pm\, \Sigma (H_m\, b_m) \frac{d_n}{b_n\, b_{n-1}} \text{ [2]}.$$

Natürlich läßt sich Formel (2) auch aus der Grundformel (1a) oder (1b) ableiten.

Die oben angegebenen Formeln (1) bis (3) sind durchaus genaue Lösungen der gestellten Aufgabe und besonders Formel (2) u. (3) lassen an Einfachheit nichts zu wünschen übrig. Es ist nun seltsam, daß trotzdem in der Literatur öfter Berechnungsweisen angegeben werden, die nicht nur unvollständig und umständlich sind, sondern auch zu unrichtigen Ergebnissen führen. Diese Berechnungsweisen werden dazu noch seit Jahrzehnten in der Baupraxis angewandt. Bringt man diese Berechnung auf eine geschlossene Formel, so erhält man beispielsweise

$$\text{(4) falsch!} \qquad D_n = \frac{2\, d_n}{b_n + b_{n-1}} \left(H - \frac{M_n}{b_n} \cdot 2 \cdot \operatorname{tg}\alpha \right) \text{ [3]}.$$

Manchmal findet man folgende Formel

$$\text{(5) falsch!} \qquad D_n = \frac{d_n}{\Delta x_n} \left(H - \frac{M_n}{b_n} \cdot 2 \cdot \operatorname{tg}\alpha \right) \text{ [4]}.$$

Abgesehen davon daß in den Formeln (4) u. (5) der Einfluß der senkrechten Lasten, die immer vorhanden sind, nicht erwähnt ist, sind diese Formeln auch unrichtig. Man erhält günstigstenfalls mit ihnen nur Näherungswerte für die Strebenkraft.

Prüft man (4) und (5) an Hand der Grundformel (1a), so ergibt sich richtiggestellt und ergänzt

$$\text{(6)} \qquad D_n = \pm \frac{d_n}{b_{n-1}} \left(\Sigma H - \frac{M_n^a}{b_n} \cdot 2 \cdot \operatorname{tg}\alpha \right)$$

$$M_n^a = \Sigma H\, x_n + \Sigma V\, e_k.$$

Wie durch Vergleich von (6) und (4) ersichtlich, gibt Formel (4) bei schwacher Neigung der Gurte einen verhältnismäßig guten Näherungswert. Bei parallelen Gurten stimmen beide Formeln überein. Je größer die Gurtneigung ist, desto größer ist der Fehler bei Anwendung von (4).

Formel (5) ergibt nur dann richtige Werte, wenn $\Delta x_n = b_{n-1}$ ist und die senkrechten Lasten symmetrisch zur Trägerlängsachse liegen.

Man erkennt, daß kein Anlaß vorliegt, die einfache und genaue Formel (2) zu vernachlässigen. Dr.-Ing. Johannes Fricke.

[2]) Siehe auch Girkmann-Königshofer, Die Hochspannungsfreileitungen, 1938, S. 181.

[3]) Siehe Foerster, Die Eisenkonstruktionen des Ingenieur-Hochbaues, 5. Aufl., 1924, S. 249 bis 250, ferner Taenzer, Eiserne Gittermaste für Starkstrom-Freileitungen, 1930, S. 28 bis 29.

[4]) Taschenbuch „Stahl im Hochbau", 10. Aufl., S. 625.

Zuschrift an die Schriftleitung

(Ohne Verantwortung der Schriftleitung)

zum Aufsatz **Beitrag zur Stabilitätstheorie des Stegbleches vollwandiger Träger** von E. Chwalla, Stahlbau 1936, S. 161.

Untersuchen wir die Stabilität eines geraden, mittig gedrückten Stabes, der an seinen Enden festgehalten und an einer beliebigen Stelle der Achse federnd quergestützt ist (Bild 1a), und ermitteln wir den funktionalen Zusammenhang zwischen dem bezogenen Federwiderstand w der Querstützung und der kleinsten idealen Knicklast S_{Ki} des Stabes, so erhalten wir eine Lösungskurve $S_{Ki} = f(w)$, deren Ordinaten bei unbeschränkt anwachsendem w asymptotisch einem Grenzwert S'_{Ki} zustreben. Fällt jedoch der Ort der Querstützung mit einem Ausbiegungsnullpunkt einer Knickfigur des von der Querstützung befreiten Stabes (bei symmetrisch ausgebildeten Stäben beispielsweise mit dem Halbierungspunkt der Stablänge, Bild 1b) zusammen und ist die dieser Knickfigur zugeordnete Knicklast $S^*_{Ki} < S'_{Ki}$, dann zweigt im Punkt w^*, S^*_{Ki} der Lösungskurve eine zur Abszissenachse parallele Gerade ab, die tiefer als die Asymptote liegt; der bezogene Federwiderstand der Querstützung ist dann im ganzen Bereich $w > w^*$ ohne Einfluß auf die Größe der für die Bemessung des Stabes maßgebenden Knicklast.

Ähnliche Überlegungen gelten auch für das Ausbeulen von versteiften Blechen. Untersuchen wir beispielsweise die Stabilität einer in ihrer Ebene auf reine Biegung beanspruchten, einspannungsfrei gelagerten Rechteckplatte, die an einer beliebigen Stelle durch eine Längssteife verstärkt ist (Bild 1c), und ermitteln wir den funktionalen Zusammenhang zwischen dem Federwiderstand der Steife und der kleinsten kritischen Randspannung der Platte, so gelangen wir zu einer Lösungskurve $k = f(i/t)$, deren Ordinaten bei unbeschränkt anwachsendem i/t asymptotisch einem Grenzwert k' zustreben; hierbei wird der Federwiderstand der Steife durch die Verhältniszahl i/t (Trägheitshalbmesser des Steifenquerschnitts, dividiert durch die Blechdicke) und die kleinste kritische Biegerandspannung durch den in den Beulvorschriften angegebenen Beulwert k festgelegt. Fällt der Ort der Längssteife zufällig mit einer waagerechten Knotenlinie einer Beulfläche der unversteiften Platte zusammen und ist der dieser Beulfläche zugeordnete Beulwert $k^* < k'$, dann zweigt im Punkt $(i/t)^*$, k^* der Lösungskurve eine zur Abszissenachse parallele Gerade ab, die tiefer als die Asymptote liegt; die Biegesteifigkeit der Längssteife ist dann im ganzen Bereich $(i/t) > (i/t)^*$ ohne Einfluß auf die Größe des für die Bemessung der Platte maßgebenden Beulwertes.

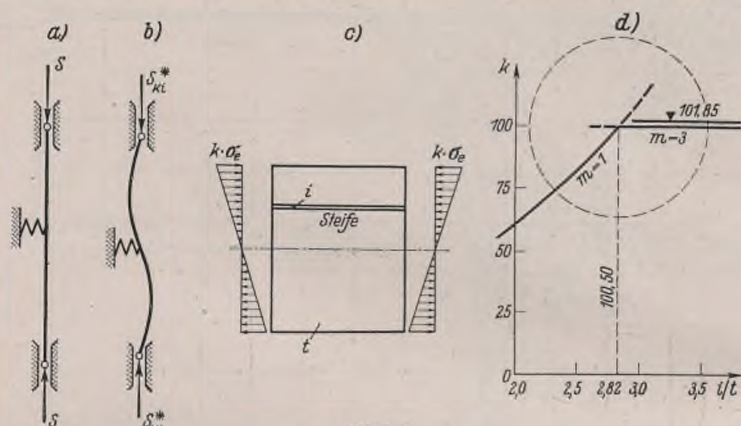


Bild 1.

Das geschilderte Beulproblem ist im einleitend genannten Aufsatz (und auch in einem Referat im Vorbericht des 2. Int. Kongr. für Brückenbau und Hochbau, Berlin 1936, S. 965) mit Hilfe des Ritzschen Verfahrens untersucht und für eine Platte mit vorgegebenen Abmessungen zahlenmäßig ausgewertet worden. Hierbei wurde im Rahmen des Zahlenbeispiels nur die Asymptote der Lösungskurve ermittelt (Bild 2 des Aufsatzes bzw. Fig. 8 des Referats), die Darstellung des zugehörigen Astes der Lösungskurve $k = f(i/t)$ jedoch unterlassen. Eine nachträgliche Ergänzung dieser Bilder ist nicht möglich, da der Kurvenast nur sehr wenig unterhalb der Asymptote verläuft — so wenig, daß der Ordinatenunterschied maßstabrichtig gar nicht zum Ausdruck gebracht werden kann. Ich habe daher in Bild 1d nur einen Teil der Lösungskurve gezeichnet, dafür aber einen größeren Maßstab gewählt. Das Bild lehrt uns, daß der Kurvenast „$m = 1$" (1 Halbwelle in der Längsrichtung) an der Stelle $i/t = 2{,}82$ vom Kurvenast „$m = 3$" (3 Halbwellen in der Längsrichtung) abgelöst wird und daß die Ordinate der Lösungskurve an dieser Stelle $k = 100{,}50$ beträgt; sie ist nur um rund 1% kleiner als der im Grenzfall $i/t = \infty$ geltende Höchstwert $k' = 101{,}85$, so daß dieser Richtigstellung meines Lösungsergebnisses zwar eine prinzipielle, jedoch keinerlei baupraktische Bedeutung zukommt. E. Chwalla.

Berichtigung zum Aufsatz „Untersuchung eines besonderen Belastungsfalles bei dreiseitig abgespannten Funkmasten", Heft 8/9, S. 33.

In Formel (I) ist $\frac{\sqrt{3}}{2}$ an Stelle von $\sqrt{\frac{3}{2}}$ zu setzen.

Auf S. 34, linke Spalte, 22. Zeile, ist ctg an Stelle von cos zu setzen.

Auf S. 38, Tafel 2, sind die σ_1-Werte für Abspannung 1 und 2 umzutauschen.

Auf S. 38, Fußnote 6, muß es heißen: . . . und der horizontalen Projektion des Seiles 2 umschlossenen Winkels. Daraus folgt, daß $v_x \sim v_2$ ist. J. Argyris.

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt.
Verlag: Wilhelm Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W 9.
Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

DER STAHLBAU

Schriftleitung:
Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule
Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599
Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61
Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage zur Zeitschrift DIE BAUTECHNIK Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

13. Jahrgang | BERLIN, 5. Juli 1940 | Heft 14/15

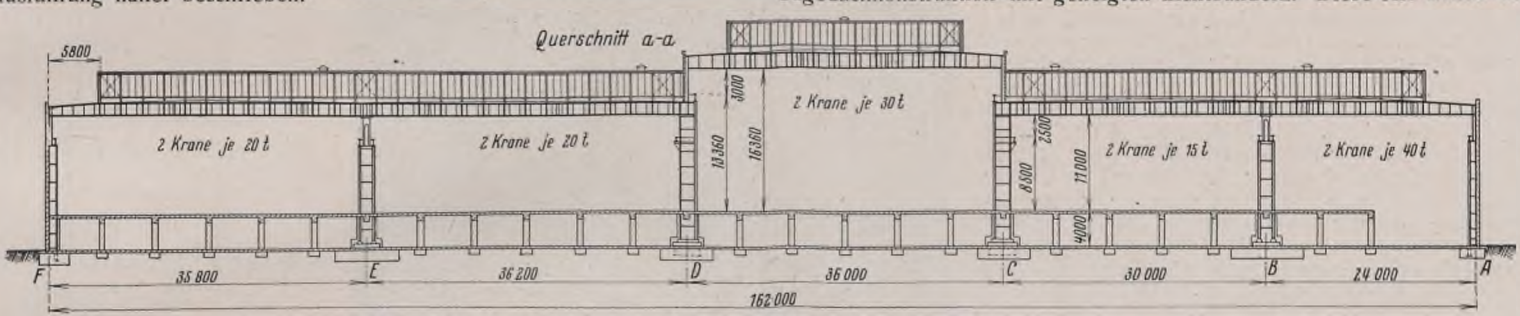
Die Stahlkonstruktion eines Preßwerkes.

Von Dipl.-Ing. **Wilhelm Besch**, Mainz.

I. Allgemeines.

Es war die Aufgabe gestellt, in einer bisher vorwiegend ländlichen Gegend ein Preßwerk zu errichten. Die Stützweiten der Hallenschiffe und die Lasten der Laufkrane sprachen für die Verwendung von Stahl an Stelle des Eisenbetons. Nachstehend ist der Entwurf und die Bauausführung näher beschrieben.

Die Betriebserfordernisse verlangten eine fünfschiffige Halle mit erhöhtem Mittelschiff. Als selbstverständlich wurde dabei vorausgesetzt, daß die 162 m breite und rd. 257 m lange Halle überall eine möglichst gleich große Helligkeit aufweisen sollte. Die Anordnung von Oberlichtern war nicht zu umgehen. Der günstigste Lichteinfall ergibt sich bei einer Sägedachkonstruktion mit geneigten Lichtbändern. Diese Art wurde der



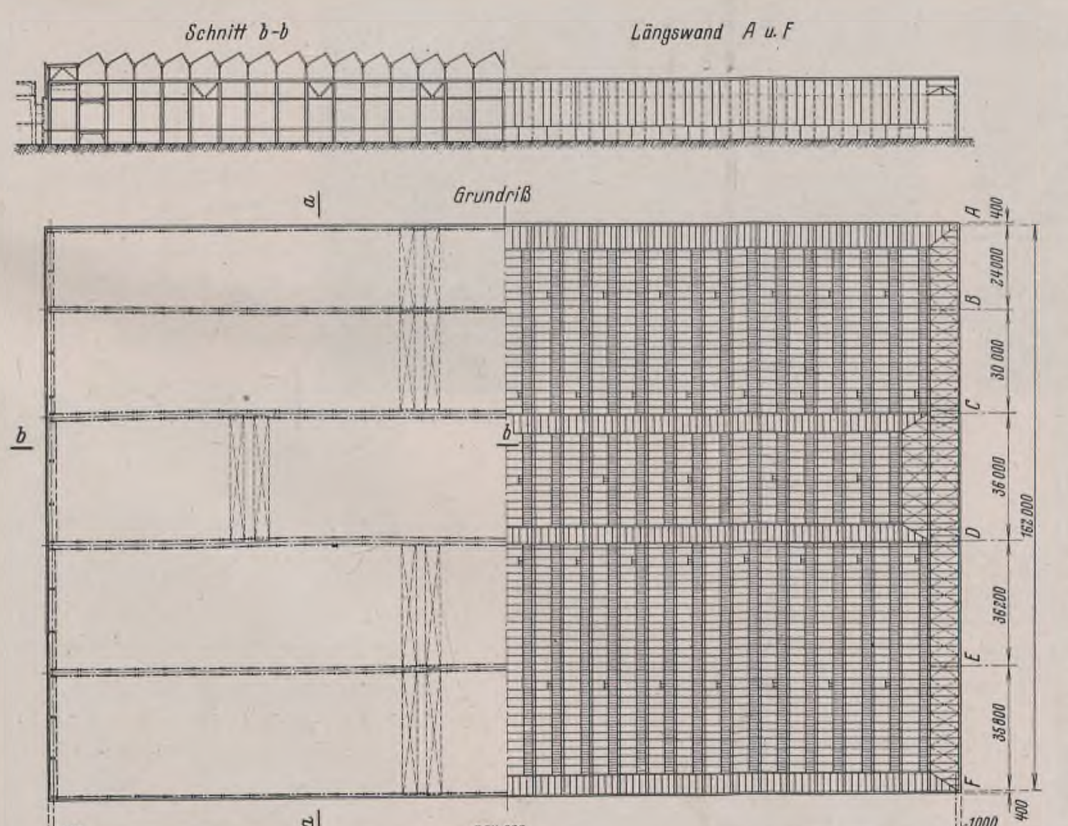


Bild 1. Übersicht.

Ausführung wegen der Vorteile des gleichmäßigsten und größten Lichteinfalls zugrunde gelegt. Die Wahl der Sägedächer und der Stützenabstand von 8 m in der Hallenlängsrichtung ergab eine gute konstruktive Lösung, da die Sägedächer ohne jede Zwischenkonstruktion gleich an die Dachbinder angeschlossen werden konnten. Dieser Anschluß ließ sich durch die Wahl von vollwandigen Bindern sehr einfach gestalten. Die architektonischen und konstruktiven Belange verlangten in diesem Falle also dieselbe Lösung. Bei den Stützen waren infolge der großen Lasten schwere und hohe Walzprofile erforderlich, so daß eine vollwandige Ausbildung derselben neben dem schöneren und ruhigeren Aussehen auch konstruktiv eine bessere Lösung ergab. Mit Rücksicht auf das Aussehen sollten auch alle diagonal laufenden Konstruktionsteile, soweit wirtschaftlich tragbar, möglichst vermieden werden.

Die Wirtschaftlichkeit verlangte eine genaue, statische Erfassung der auftretenden Kräfte, um unnötige Konstruktionsteile zu vermeiden und die vorhandenen Bauteile im Rahmen der Sicherheit voll auszunutzen. Die Forderung, die Stahlkonstruktion in der kürzesten Zeit zu montieren, verlangte Rücksichtnahme auf den Arbeitsfortschritt der Fundierung und sonstigen Betonarbeiten sowie Rücksichtnahme auf eine schnelle Werkarbeit. Eine beschleunigte Werkarbeit und damit auch eine beschleunigte Anlieferung der Konstruktionsteile auf der Baustelle wird durch die Anordnung möglichst vieler gleicher Bauteile gewährleistet. Die Rücksichtnahme auf den Arbeitsfortschritt des Tiefbaues war für die Durchbildung der Stahlkonstruktion von besonderer Wichtigkeit, weil der Hallenfußboden rd. 4 m über Geländehöhe liegt und die gleichzeitige Fertigstellung von Fundamenten und Hallenfußboden auf Kote + 4,0 vom allgemeinen Baubeginn bis zum Beginn der Montage der Stahlkonstruktion nicht möglich war. Um nun der unter Punkt 3 genannten Forderung gerecht zu werden, mußte man

II. Grundlagen für die konstruktive Durchbildung.

Für die konstruktive Durchbildung waren die drei folgenden Gesichtspunkte grundlegend:

1. Die Betriebserfordernisse müssen neben den architektonischen Belangen voll erfüllt werden.
2. Es soll ein möglichst wirtschaftliches Traggerippe mit dem kleinsten Aufwand an Stahl zur Ausführung kommen.
3. Die Aufstellung soll in der kürzesten Zeit durchgeführt werden.

die allgemein übliche Art, die Stützen auf den Hallenfußboden zu stellen, verlassen und einen anderen Weg beschreiten; die Stützen mußten durch den Fußboden hindurch bis auf die in Geländehöhe betonierten Fundamente reichen. Nur so war es möglich, eine kürzeste Bauzeit zu erzielen. Sobald nämlich ein Teil der Fundamente fertiggestellt war, konnte mit der Montierung der Stahlkonstruktion begonnen werden, und die Betonierungsarbeiten des Hallenfußbodens konnten parallel mit der Montage durchgeführt werden. Diese obengenannten drei Forderungen mußten nun auf eine Basis gebracht werden, um die Möglichkeiten für die konstruktive Durchbildung zu schaffen. Der am Entwurf nicht beteiligte Ingenieur wird mit Rücksicht auf die drei gestellten Forderungen die getroffenen Anordnungen der Konstruktion leichter verstehen können.

III. Beschreibung des gewählten Systems.

Bild 1 zeigt eine Übersicht der ganzen Konstruktion. Der Hallenquerschnitt, der sich in fünf Schiffe mit erhöhtem Mittelschiff gliedert, war mit 162 m Gesamtbreite gegeben. Die Hallenlänge beträgt rd. 257 m; der Stützenabstand in Längsrichtung ist 8 m. Der Hallenquerschnitt wird durch das in Bild 2 dargestellte System gebildet und sei nachstehend kurz erläutert:

Die Stützen C und D des Mittelschiffes bilden mit den Bindern A—B—C und D—E—F der auf jeder Seite anschließenden Seitenschiffe einhüftige Rahmen mit eingespannten Ständern, welche die Seitenkräfte aus Wind auf die Hallenlängswände bei A, F und C und D oben sowie die Seitenstöße der in jedem Hallenschiff laufenden Krane aufnehmen und in die Fundamente weiterleiten. Die Einspannung am Stützenfuß und die Weiterleitung der Kräfte durch die Verankerungsschrauben in die Fundamente ist aus Bild 3 ersichtlich. Die Anschlüsse der Binder A—B—C und D—E—F an die Stützen C und D sind als Rahmenecken ausgebildet (Bild 4). Die Binder lagern auf die ganze Breite auf den Stützen C und D auf und sind mit diesen fest vernietet. Die Stützen bei A und F sind Pendelstützen. Der Binderanschluß an diese Stützen ist dementsprechend ausgebildet. Ebenso ist bei der Durchbildung des Stützenfußes hierauf Rücksicht genommen. Die Ankerbolzen sind so angeordnet, daß die Stützen in der Querschnittsebene pendeln können. Die dritte Schraube ist lediglich als Montageschraube gedacht, damit die Stützen A und F beim Aufstellen nicht besonders abgefangen werden müssen (Bild 5). Die Oberteile der Stützen B und E wirken in der Querschnittsebene ebenfalls als Pendel. Die Binder im erhöhten Mittelschiff stützen sich auf die Oberteile der Stützen C und D ab. Um den Längsänderungen des Mittelbinders Rechnung zu tragen, ist der Stützenoberteil bei D als Pendel ausgebildet.

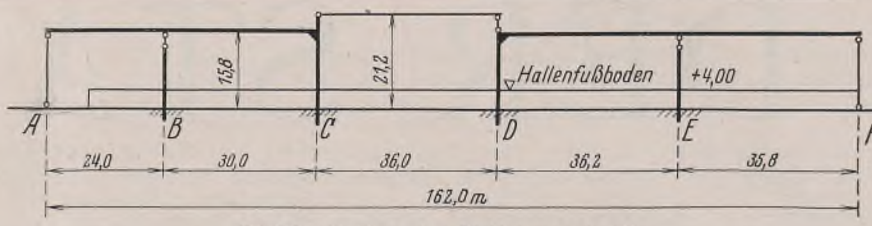


Bild 2. System des Hallenquerschnitts.

In Hallenlängsrichtung werden die Horizontalkräfte von den in Bild 6 dargestellten Systemen aufgenommen:

Zur Aufnahme der Wind- und Bremskräfte werden je 4 Stützen zu einer Gruppe zusammengefaßt. Alle $4 \cdot 8 = 32$ m ist eine Dehnungsfuge durch die ganze Hallenbreite vorgesehen. Zunächst muß für die Aufnahme der Windkräfte infolge Wind auf die beiden Giebelwände bei Punkt 32 und 0 gesorgt werden. Die Stiele der Ausfachung der Giebelwände geben ihre Kräfte an einen horizontalen Windverband ab, der auf die ganze Hallenbreite zwischen 32—31 und 1—0 durchläuft. Bei Punkt 31 liegt im erhöhten Mittelschiff C—D nochmals eine obere Stirnwand, deren Windkräfte von dem oberen horizontalen Windverband aufgenommen werden. Diese Windverbände geben ihre Kräfte jeweils an den Stützenreihen über ver-

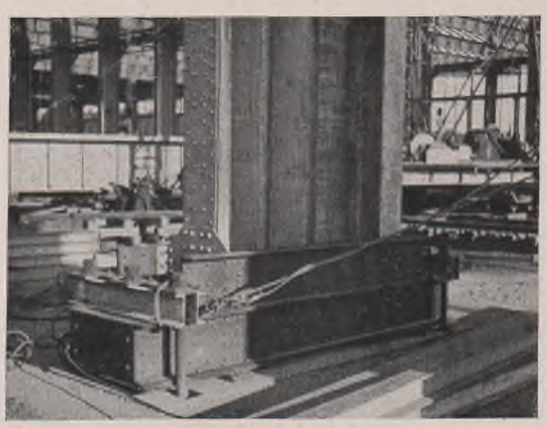


Bild 3. Verankerung einer C-Stütze.

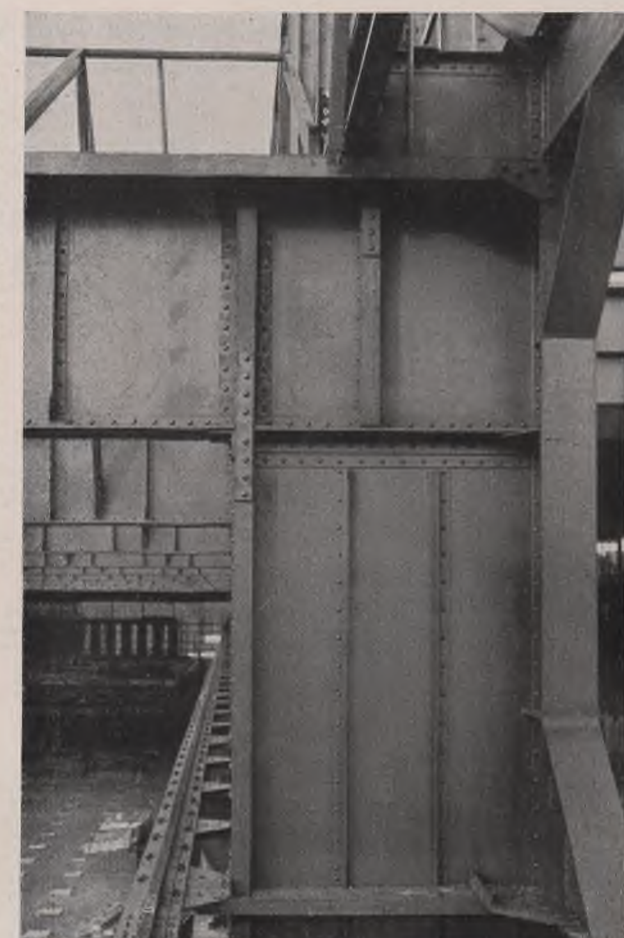


Bild 4. Rahmenartige Ausbildung des Binderanschlusses (A—B—C) bei C.

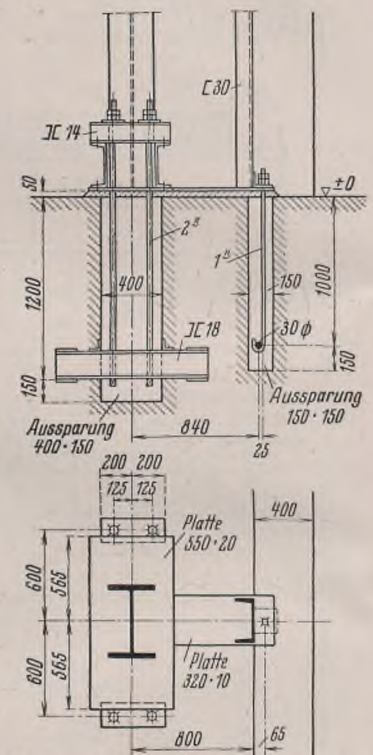


Bild 5. Verankerung der Stützenreihe A und F.

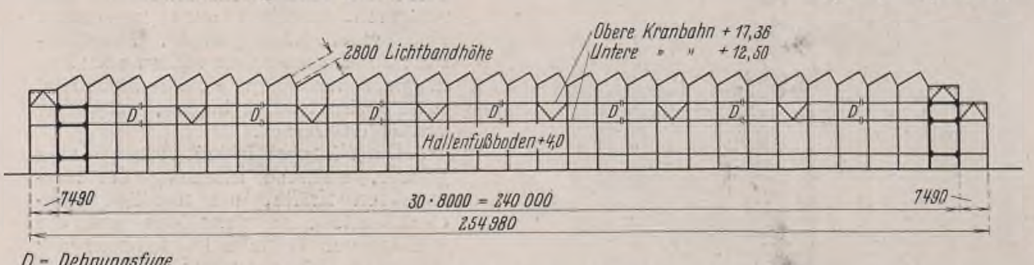


Bild 6. Längsschnitt durch das Mittelschiff C—D.

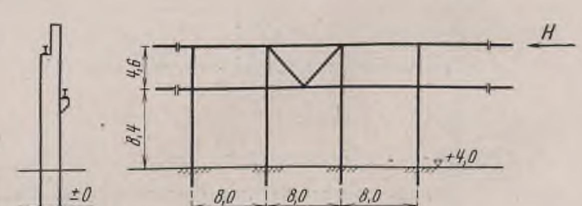


Bild 7. Portale in Hallenlängsrichtung der Stützenreihe C—D.

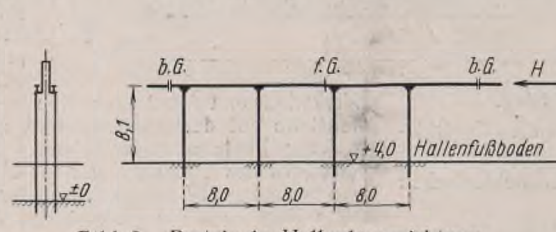


Bild 8. Portale in Hallenlängsrichtung der Stützenreihe B und E.

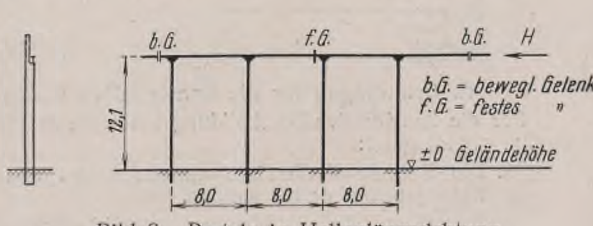


Bild 9. Portale in Hallenlängsrichtung der Stützenreihe A und F.

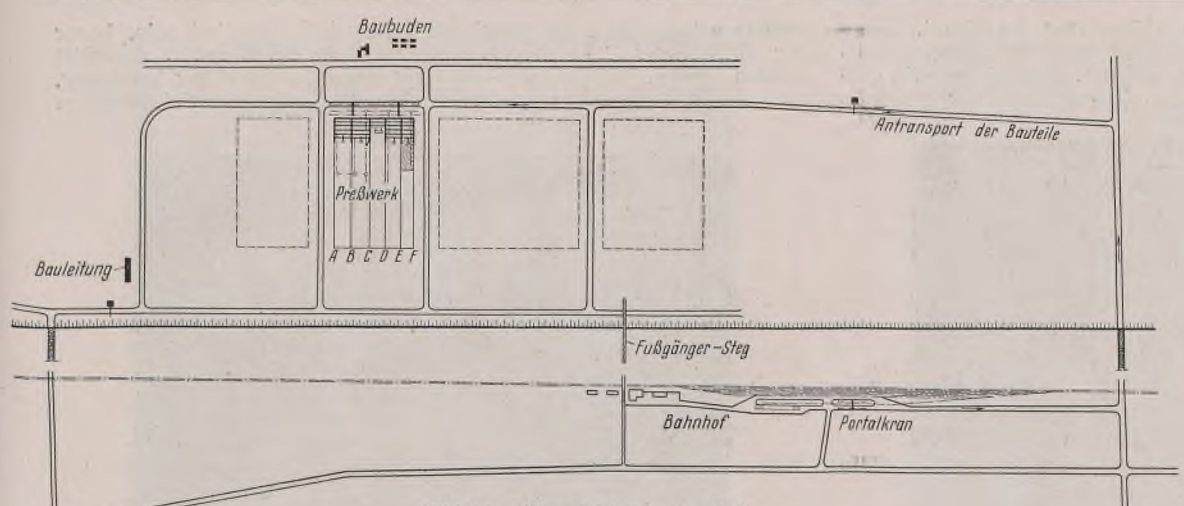


Bild 10. Übersicht der Baustelle.

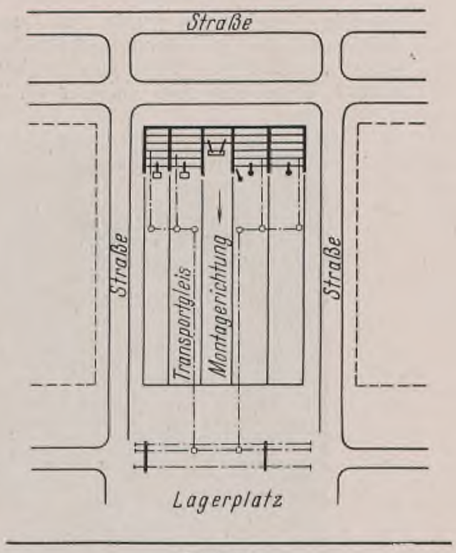


Bild 10a.
Gewünschte Baustelleneinrichtung.

tikale Dreiecksverbände an die besonders angeordneten Windrahmen in den Feldern 31—30 und 2—1 ab. Es sind noch zu berücksichtigen die Längskräfte infolge Wind auf die Dachhaut und Abbremsen der Hallenkrane. In den Stützenreihen *C* und *D* ist hierfür in jeder Gruppe von $4 \cdot 8 = 32$ m Länge ein lotrechter Verband vorgesehen, der diese Kräfte an die biegungssteifen Stützen abgibt. Dabei ist angenommen, daß die Stützen *C* und *D* in Hallenlängsrichtung durch die Eisenbetondecke auf Kote + 4,0 eingespannt sind (Bild 7). Die Stützen selbst sind bis auf die Höhe der Eisenbetondecke vollkommen einbetoniert. In den Stützenreihen *B* und *E* werden die Windkräfte vom Stützenoberteil durch den Horizontalverband zwischen den beiden Kranträgern auf die zwei Portale in den Kranträgerebenen weitergeleitet. Das System ist in Bild 8 dargestellt. Die Einspannung der Stützen durch die Eisenbetonplatte des Hallenfußbodens ist wie bei den Stützen *C* und *D* berücksichtigt. Bei den Stützenreihen *A* und *F* ist die Aufnahme der Längskräfte ähnlich wie bei *B* und *E*; eine Einspannung durch den Hallenfußboden ist jedoch nicht mehr vorhanden, da bei *A* ein Längsgleis die Durchführung der Betondecke auf die ganze Hallenbreite nicht zuließ. Außerdem wäre die Stütze nicht allseitig einbetoniert (wie bei *F*) und somit wäre auch keine allseitige Einspannung vorhanden. Bild 9 zeigt eine Systemskizze für diesen Fall.

IV. Montage der Stahlkonstruktion.

Das gesamte zu montierende Stahlgewicht betrug 6600 t. Die reine Montagezeit, also ohne Einrichten und Räumen der Baustelle war vom 1. September bis 15. Dezember 1938 vorgesehen. Infolge der Schwierigkeiten in der Beschaffung der erforderlichen Fach- und Hilfsarbeiter verschob sich der Montagebeginn auf den 10. September 1938, so daß also rund 14 Wochen zur Verfügung standen. Die wöchentliche Montageleistung mußte im Durchschnitt 470 t erreichen.



Bild 11. Baustelle mit den verschiedenen Montagegeräten.

Dies war bisher für deutsche und europäische Verhältnisse nicht gerade alltäglich. Die Baustelleneinrichtung mußte dementsprechend leistungsfähig sein, und nur so wird man auch die große Zahl der Montagegeräte verstehen können. Für die Anlieferung der Konstruktionsteile, welche von drei verschiedenen Werken erfolgte, war ein genaues Versandprogramm aufgestellt, dessen Einhaltung manchmal Schwierigkeiten bereitete.

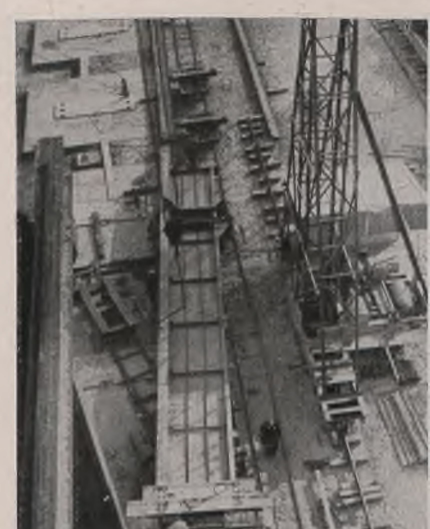


Bild 12. Abnieten des Binderfußes einer *C*-Stütze.



Bild 13. Aufstellen einer *C*-Stütze.

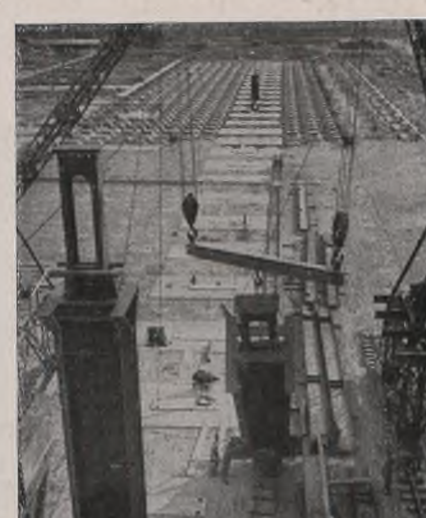


Bild 14. Aufstellen einer *B*-Stütze.

Die Konstruktion wurde auf dem Schienenweg angeliefert. Über dem Zustellgleis und der Ladestraße wurde ein fahrbarer Portalkran aufgestellt, mit dessen Hilfe die Bauteile auf mit Gummi bereifte Anhänger umgeladen und auf der rd. 3 km langen Straße zur Baustelle

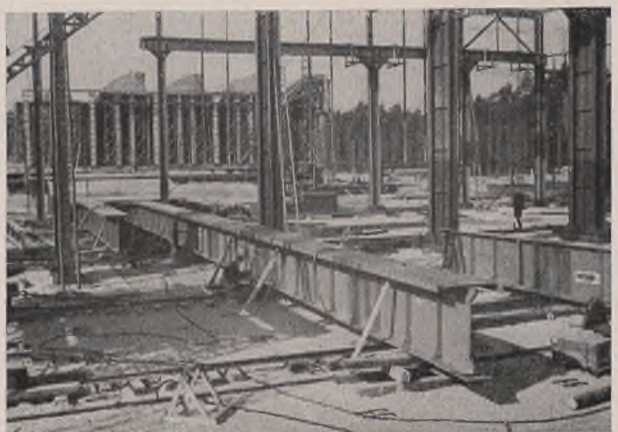


Bild 15. Zusammenbau eines Binders *A—B—C*.

angefahren wurden. Hierzu stand eine Zugmaschine zur Verfügung. Einen Überblick über die ganze Baustelle gibt Bild 10.

An der Baustelle selbst war ein Lagerplatz entlang der Straße auf die ganze Hallenbreite vorhanden. Zwei Portalkrane übernahmen die Ent- und Beladearbeiten der ankommenden Wagen und der zur Einbaustelle abgehenden Rollwagen. Der in Bild 10a skizzierte und vom Standpunkt der Montage aus erwünschte Weg war wegen der Lagerplätze und der Arbeiten des Tiefbaues leider nicht möglich; so mußte der in Bild 10 dargestellte Weg eingeschlagen werden, der montagetechnisch gesehen ungünstiger ist, da die zur Montage parallel laufenden Dacheindeckungs- und Betonarbeiten (Hallenfußboden) den Antransport gefährdeten und die Transportgleise nicht mehr beliebig verlegt werden konnten. Es war nämlich nicht möglich, mit den langen Bauteilen unter spitzem Winkel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stützen hindurchzufahren. Die fortschreitenden Betonierungsarbeiten des Hallenfußbodens ließen außerdem nur östlich der *D*-Stützen und westlich der *C*-Stützen eine Durchfahrt von rd. 5 m lichter Weite für den Materialtransport frei. Die Montagearbeiten wurden noch erschwert durch den Umstand, daß der im Bereich des Seitenschiffs *E—F* gelegene Teil des Hallenfußbodens im voraus



Bild 16. Zusammenbau eines Binders *D—E—F*.



Bild 17. Zusammenbau eines Binders *C—D*.

betoniert worden ist, so daß für den Zusammenbau zwei in verschiedener Höhe liegende Ebenen zur Verfügung standen. Die Konstruktion der Halle bedingte die Art der Montage: die Stützenoberteile bei *C* und *D* stehen auf den Bindern der Seitenschiffe *A—B—C* und *D—E—F*. So mußten naturgemäß auch zuerst die Seitenschiffe montiert sein, bevor der Mittelbinder *C—D* auf die Stützenoberteile bei *C* und *D* abgesetzt werden konnte. In jedem Hallenschiff stand ein Gerät zur Verfügung, was aus Bild 10 und 11 zu ersehen ist. In den beiden Seitenschiffen

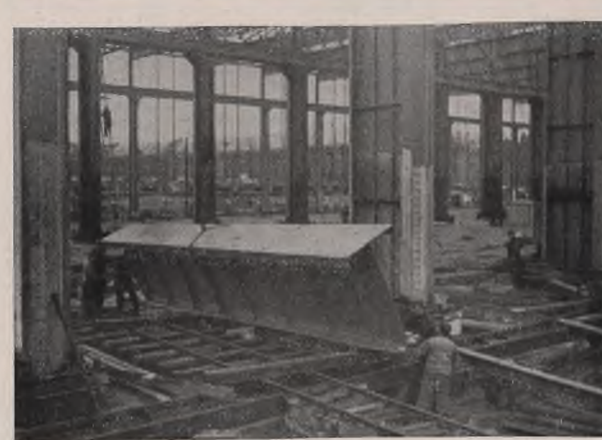


Bild 19. Gekantetes Binderstück.

A—B und *B—C* wurden zwei gleichartige Geräte für die Montage eingesetzt. Jedes Gerät besteht aus einem auf Schienen fahrbaren portalartigen Unterwagen und einem drehbaren Ausleger mit Haupt- und Hilfszug an einer schnabelartigen Verlängerung. Der Nackenzug des Auslegers wird von einem turmartigen Aufbau gehalten. Die Drehbewegung des Auslegers wird mit Hilfe von Drahtseilen von Hand betätigt. Haupt- und Hilfszug haben getrennte elektrische Winden. Das Verfahren jedes Gerätes erfolgte mit einer handangetriebenen Zugwinde. Beim Arbeiten war jedes Gerät durch Keile und Schienenzangen festgelegt und verankert. Außerdem sicherten zwei Drahtseile, die an der Turmspitze befestigt waren, das Gerät gegen Umkippen auch bei seitlicher Auslegerstellung. Im Mittelschiff *C—D* arbeitete ein 30 m hohes Gerüst, das ebenfalls auf Schienen verfahrbar war. Für den Einbau der Binder waren zwei Galgen mit je einer Laufkatze vorhanden. Das Katzfahren begrenzte sich auf verhältnismäßig kleine Strecken und wurde daher von Hand betätigt. Für den Einbau der leichteren Teile der Dachkonstruktion und der Kranträgerverbände waren drehbare Ausleger vorhanden. Die Drehbewegung wurde wie bei den beiden anderen Geräten gehandhabt. In den Schiffen *D—E* und *E—F* standen normale Seilderricks mit den erforderlichen elektrischen Winden



Bild 18. Kanten eines Binderstückes.



Bild 20. Zusammenbau des Binders.

und Abspannseilen. Jeder Nichtbeteiligte wird vielleicht denken, ob ein besonderer Grund für die Verwendung so verschiedenartiger Geräte in den Schiffen *A—B—C—D* und *D—E—F* vorgelegen hat. Diese Verschiedenartigkeit ist darauf zurückzuführen, daß zwei verschiedene



Bild 21. Hochziehen des Binders.



Bild 22. Gerät für den Einbau der Sägedachkonstruktion.



Bild 23. Die montierte Sägedachkonstruktion.

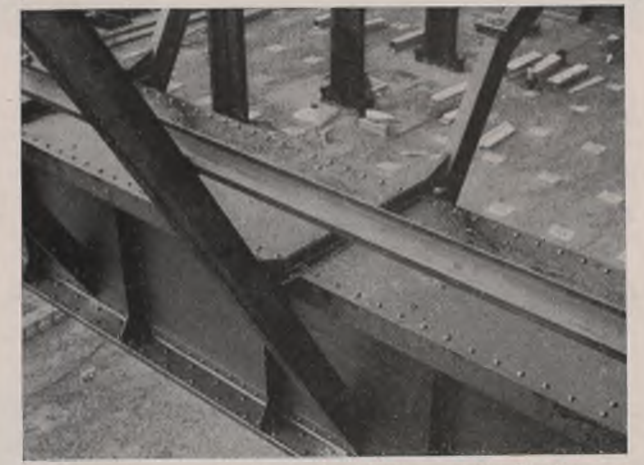


Bild 25. Anschluß der Sägedächer an die Binder.

Firmen die Stahlkonstruktion montiert haben und jede Firma die bei ihr eingeführte Geräteart verwendete. Man wird sich nun die Frage stellen, welche der beiden Gerätearten, die komplizierten Gerüste mit Auslegern und Katzen oder die einfachen Seilderricks sich besser geeignet haben. Eine klare Antwort läßt sich hierauf nicht ohne weiteres geben; denn zu jedem Gerät gehört das entsprechende Personal und auf die Schulung dieses Personals wird es immer ankommen. Die Seilderricks haben zunächst den Vorteil, daß sie eine viel geringere Aufstellungs- und Abbruchszeit beanspruchen und allein schon aus diesem Grunde wirtschaftlicher erscheinen. Nachteilig ist im allgemeinen das Abfangen mittels Seilen und das damit verbundene Verholen der Winden. Das Verfahren wird fast immer etwas gefährlicher sein, jedoch gibt es Monteure, die mit den Seilderricks regelrecht exerzieren. Die Gerüste mit Auslegern erfordern eine Mehrarbeit beim Zusammenbau und Abbruch, sie sind aber standsicherer und die Gefahrenmomente sind aus diesem Grunde kleiner. Dies erscheint heutzutage bei dem verschärften Arbeitstempo besonders wichtig, zumal man sich die Arbeitskräfte auch nicht mehr gerade aussuchen kann. Vergleicht man die Leistungsfähigkeit der verschiedenen Gerätearten, so wird man zugeben, daß die Gerüste mit drehbaren Auslegern und Hilfszügen vielseitiger sind. So wurden z. B. mit den Gerüsten die Stützen gestellt, Binder zusammengestellt und hochgezogen, dann die Sägedächer eingebaut. Mit den Seilderricks konnten die Sägedächer nicht eingebaut werden, sondern es war hierfür ein Spezialgerät vorhanden, das weiter unten beschrieben wird. Nach Beendigung der Montage konnte festgestellt werden, daß beide Gerätearten sich in bezug auf Leistungsfähigkeit fast gleichwertig sind; denn es ist keiner von den beiden verschie-



Bild 24.
Abnieten eines Binderanschlusses bei *C*.

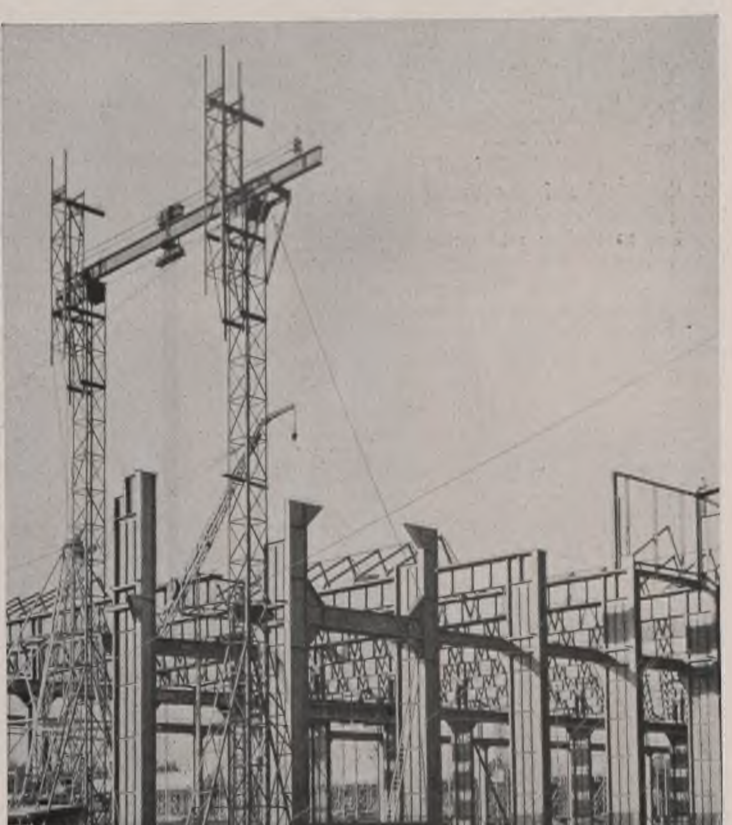


Bild 26.
Rahmen in der Stützenreihe *C*, zwischen 2 und 1.

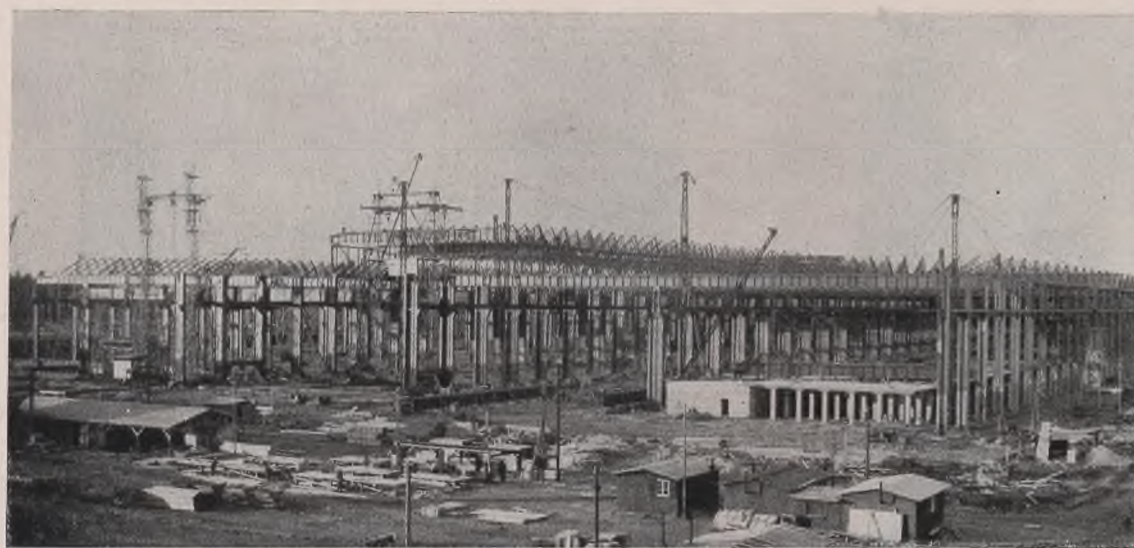


Bild 27. Blick auf die Halle von Südosten.

denen Gerätearten montierten Hallenteile zurückgeblieben. Was die Wirtschaftlichkeit anbelangt, so werden die Mehrkosten der Aufstellung der einen Art durch die Mehrkosten beim Verfahren der Seilderricks ziemlich aufgewogen werden.

Die Montage begann also mit dem Aufstellen der Stützen aller Reihen von *A—F*. Das Aufstellen und Verankern der Stützen eilte der übrigen Montage immer einige Felder voraus, besonders in den Reihen *C* und *D*.

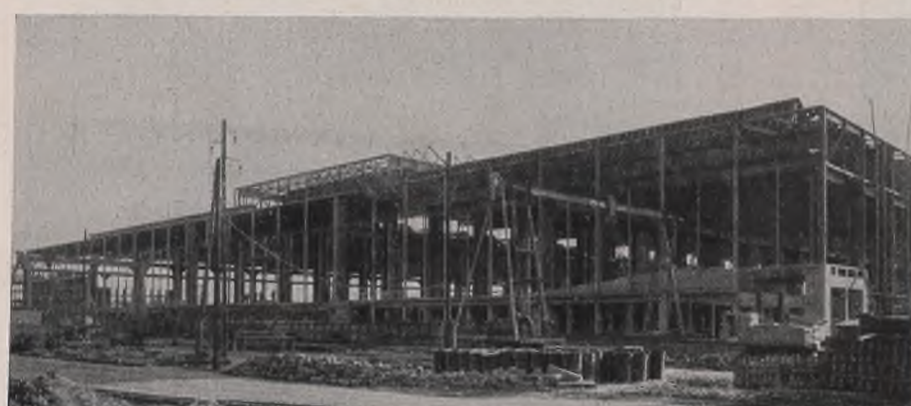


Bild 28. Lagerplatz und nördliche Giebelwand bei 32.

Mit Rücksicht auf das Verladen wurden die Füße der Stützen *C* und *D* in der Werkstätte nicht angenietet, sondern vollkommen getrennt verschickt. Der Zusammenbau und das Abnieten erfolgte erst auf der Baustelle. Die Bilder 12 und 13 zeigen diesen Vorgang. Die gestaffelte Stellung der Geräte war für das Verankern der Abspannseile sehr günstig; denn nur so ließ sich ein kompliziertes Übereinandergreifen der Seile vermeiden. Die Stützen „*B*“ wurden an eine Traverse angehängt, die ihrerseits an zwei Geräten eingehängt war (Bild 14). Das Zusammenwirken der beiden Geräte hat sich dabei nicht als nachteilig herausgestellt, obwohl die Ausleger

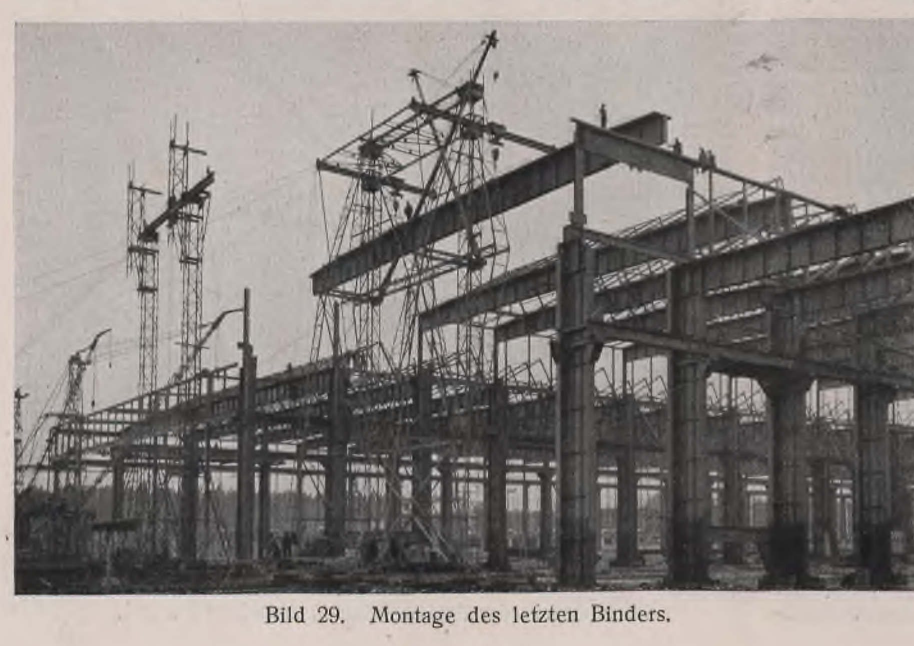


Bild 29. Montage des letzten Binders.

auch eine Drehbewegung ausführen mußten. Die *A*-Stütze konnte mit einem Gerät aufgestellt werden, da die Ausladung und das Stückgewicht kleiner waren. Die Stückgewichte betrugen 9, 12 und 16 t für die *A*-, *B*- und *C*-Stützen. Im Anschluß an die Stützen konnten bei *A*, *C*, *D* und *F* gleich die 16 m langen Kranträger gezogen werden, so daß ein provisorisches Abspannen sich erübrigte. Nur bei den Stützen *B* und *E* wurden die Kranträger mit Rücksicht auf den Binder nachträglich eingebaut.

Die Binder selbst wurden am Boden zusammengelegt, verdornt und verschraubt und dann abgenietet. Der Binderquerschnitt ist ⊤-förmig; der Obergurt ist wesentlich breiter als der Untergurt. Die hohen Binderteile wurden aus diesem Grund beim Antransport und auf dem Lagerplatz alle mit dem Obergurt als Auflagerfläche gelagert und mußten vor dem Zusammenbau um 180° gedreht werden. Bild 15 zeigt den Zusammenbau eines Binders *A—B—C*. Die Binder *D—E—F* mußten im Teil *D—E* auf Böcken zusammengebaut werden, um auf die Höhe des im voraus fertiggestellten Hallenfußbodens zu kommen (Bild 16). Der Zusammenbau des Binders *C—D* war etwas schwieriger, da die Ausleger des im Mittelschiff arbeitenden Gerätes die Lasten der Binderteile nicht heben konnten. Es standen nur die Katzen zum Hochziehen zur Verfügung. Es wurde daher ein Hilfszug an den Kranträgern aufgehängt und die Binderteile wurden mit Schrägzug vom Transportgleis zwischen die Stützen *C* gezogen. Der Schrägzug wurde mit Seilen abgestoppt, so daß durch Nachlassen des Abstoppseiles der Hilfszug wieder seine vertikale Lage erreichte. Mit dem Hilfszug konnten die Binderteile gleich um 180° gedreht werden und auf dem vorher verlegten Quergleis an die richtige Stelle verfahren werden. Die Bilder 17 bis 21 zeigen diesen Vorgang. Das Bindergewicht war 15 t. Die ganze Dachkonstruktion von *A—D*, bestehend aus Sägedächern und Randabschluß, wurde in jedem Feld sofort eingebaut. Die Ausleger der Geräte der Seitenschiffe *A—B* und *B—C* hatten hierfür eine schnabelartige Verlängerung mit einem Hilfszug, welcher von einer besonderen elektrischen Winde aus bedient wurde. Im Mittelschiff *C—D* wurde der Einbau der oberen Längswände, Kranträgerverbände, Sägedächer und seitlichen Abschlüsse mit den beiden langen Schwenkmasten vorgenommen, welche diese Arbeiten sehr erleichterten. In den beiden Seitenschiffen *D—E* und *E—F* wurde die Dachkonstruktion unabhängig von der übrigen Montage eingebaut, d. h. diese mußte immer mindestens drei Felder vorauseilen. Es war für diesen Zweck ein besonderes Gerät konstruiert worden, das aus den Bildern 22 und 23 zu ersehen ist und das von einer Stellung aus drei Felder bestreichen konnte. Dieses Gerät konnte von Hand auf dem Binderobergurt verfahren werden (zwischen den Nietreihen). Es wurde jeweils ein Feld von 8 m auf die ganze Breite von $D—F = 2 \cdot 36 = 72$ m fertig eingebaut, während eine andere Kolonne gleichzeitig am Boden die Einzelteile der Sägedächer für das nächste Feld zusammengelegt hatte. Dieses Feld wurde dann auf dem Rückweg montiert, während die Bodenkolonne das dritte Feld wieder vorbereitete. Das Gerät hatte alle erforderlichen Rüstungen angehängt; das Hochziehen der Sägedachkonstruktion mußte leider von Hand vorgenommen werden. Alle drei Felder mußte das Gerät versetzt werden. Es wurde dazu in zwei Teile zerlegt, in Gerät und Rüstung, und mit einem einfachen Stahlmast, der auf dem Hallenfußboden verfahren wurde und mit Seilen abgefangen war, jedesmal wieder am Boden abgesetzt. Trotz des Umsetzens dieses Gerätes war seine Leistungsfähigkeit doch sehr gut. Es konnte hierdurch vor allem eine Trennung zwischen der Hauptmontage der schweren Teile und der Montage der leichten Teile erreicht werden, wodurch eine Beschleunigung beider Arbeiten leichter möglich ist. Diese Beschleunigung läßt sich erreichen durch die Möglichkeit, mehr Leute unterzubringen, da die Arbeitsstellen räumlich voneinander getrennt sind, und dadurch, daß jede Montierkolonne immer nur dieselbe Arbeit zu verrichten hat, also früher durch die schnellere Aneignung gewisser Kniffe die Höchstleistung erreicht.

Die beiden ersten Felder machten naturgemäß wesentlich mehr Arbeit als die darauffolgenden; denn jede Baustelle muß sich zuerst „einlaufen“, d. h. die Mannschaft muß sich auf die Arbeitsvorgänge einspielen. Der Einbau der vielen kleinen Teile der Verbände beanspruchte außerdem viel Zeit. Alle Zwischenfelder waren abgesehen von kleinen Unregelmäßigkeiten, die sich aber auch wiederholten, gleich, so daß der Montagevorgang immer derselbe war. Die Schwierigkeit lag also nicht mehr in der Montage selbst, sondern in der kurzen Bauzeit. Meistens ist es dann so,



Bild 30. Blick in das Mittelschiff *C—D* von Süden.



Bild 31. Aufbringen der Bimsbetondielen.



Bild 32. Dacheindeckung und Ausbildung der Rinne.



Bild 33. Ausmauern des westlichen Abschlusses der Sägedächer.

daß, wenn alles „wie am Schnürchen" läuft, das Hallenende nicht mehr allzufern ist.

Die Bilder 24 bis 29 zeigen noch einige Aufnahmen von verschiedenen Montagezuständen. Aus Bild 24 ist das Abnieten eines Binderanschlusses an eine *C*-Stütze zu ersehen. Bild 25 zeigt den Anschluß der Sägedächer an die Binder. Der Rahmen in der Stützenreihe *C* zwischen 2 und 1 ist aus Bild 26 zu ersehen. Die Querriegel dieser Rahmen wurden zunächst nur mit ein paar Schrauben und Winkeln an die Stützen *B*, *C*, *D* und *F* angeheftet und dann verschweißt. Bild 27 gibt einen Überblick auf die fünfschiffige Halle. Es ist hier auch der im voraus betonierte Teil des Hallenfußbodens im Seitenschiff *E—F* zu erkennen. Bild 28 zeigt einen Blick auf den Lagerplatz und die nördliche Giebelwand bei 32. Der Hallenfußboden ist hier schon auf die ganze Hallenbreite betoniert; mit der Ausmauerung der Giebelwand ist ebenfalls angefangen worden. Bild 29 zeigt den Einbau des letzten Binders. Das fertig montierte Mittelschiff gibt Bild 30 wieder. Das Bild zeigt, daß die Forderung, die architektonischen Belange zu berücksichtigen, nicht erfolglos gestellt worden ist.

Über die Dacheindeckung sei kurz folgendes erwähnt:

Die Sägedächer wurden auf der Nordseite kittlos verglast. Zur Befestigung der Sprossen waren Z-Eisen mit den entsprechenden Bohrungen vorgesehen. Die Abdichtung erfolgte durch die bekannte Sprossenausbildung mit Einlagen aus verschiedenen Dichtungsmaterialien. Die übrigen Flächen wurden mit fabrikmäßig hergestellten Bimsbetondielen abgedeckt. Die Platten hatten an der Oberseite einen Korkbelag, der in der Werkstätte aufgebracht worden war. Die Platten wurden nach firmeneigenen Verfahren durch Bügel oder Klammern an den Sägedächern befestigt und durch Ausfugen jeweils zu einer Einheit zusammengefaßt. Zur Abdichtung wurden die Dielen zweifach mit Pappe überklebt. Aus den Bildern 31, 32 und 33 sind diese Arbeiten zu erkennen. Bild 34 zeigt einen Blick in das nahezu eingerichtete Mittelschiff.

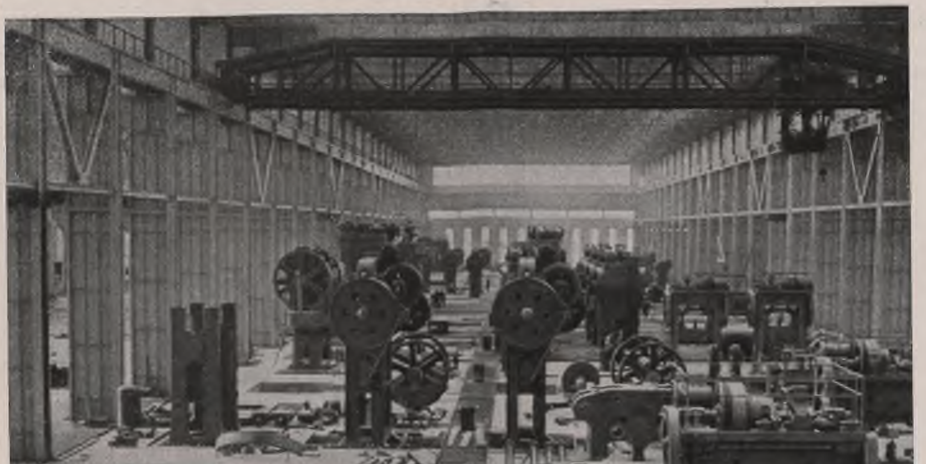


Bild 34. Eingerichtetes Mittelschiff.

V. Allgemeine Angaben.

Die Auftragserteilung erfolgte Ende März 1938. Die Entwurfsbearbeitung mußte sofort und beschleunigt durchgeführt werden, da $^1/_3$ der Stahlkonstruktion auf das Mai-Juni-Kontingent fiel. Die restlichen $^2/_3$ wurden im Juli und August bestellt. Am 1. August wurde mit der Baustelleneinrichtung begonnen, am 1. September sollte Montagebeginn sein, der sich jedoch auf den 10. September verschob. Trotzdem konnte der Montagetermin gehalten werden und die Halle war am 15. Dezember 1938, also rd. $8^1/_2$ Monate nach Auftragserteilung, fertig montiert. Diese Leistung ist immerhin sehr beachtlich und ist ein Beweis für den hohen Stand der deutschen Stahlbauindustrie.

Die gesamte Entwurfsbearbeitung lag in Händen des Architekten Emil Rudolf Mewes, Köln. Zur Ausführung wurde der Entwurf bestimmt, dessen technische Seite von der MAN, Mainz-Gustavsburg, entworfen worden war. Die örtliche Bauleitung wurde von Herrn Architekt Kohlbecker ausgeübt. Die Beratung und Prüfung für den Entwurf und die Bauausführung lag in Händen von Herrn Professor Dr.-Ing. Maier-Leibnitz.

Die Stahlkonstruktion wurde von den drei Firmen MAN, Mainz-Gustavsburg, Seibert, Saarbrücken, und Krupp-Druckenmüller, Berlin-Tempelhof, geliefert. Die Montage wurde von den beiden erstgenannten Firmen ausgeführt. Die Entwurfsbearbeitung für die ganze Stahlkonstruktion, Führung und Montageleitung lagen in den Händen der MAN.

Vorschlag und Kritik einer Bemessungsformel bei außermittig beanspruchten Knickstäben.

Von Professor Dr. Dr.-Ing. Willy Gehler, Dresden.

(Fortsetzung aus Heft 12/13.)

C. Die Begründung des Vorschlages.

I. Umformung der fünf Übersichten von K. Jäger (Jezek).

1. In dem Buch „Die Festigkeit von Druckstäben" hat Karl Jäger (Jezek) in fünf Übersichten[5]) für fünf verschiedene Querschnittstypen die Werte σ_{Kr} [s. Gl. (2b)] bei außermittigem Kraftangriff berechnet. Legt man die beiden vereinfachenden Annahmen zugrunde, daß die Gleichgewichtsfigur eine ganze Sinushalbwelle ist und daß sich die Formänderung nach dem idealplastischen Gesetz (s. Erläuterungen I, S. 10, Bild 1d) vollzieht,

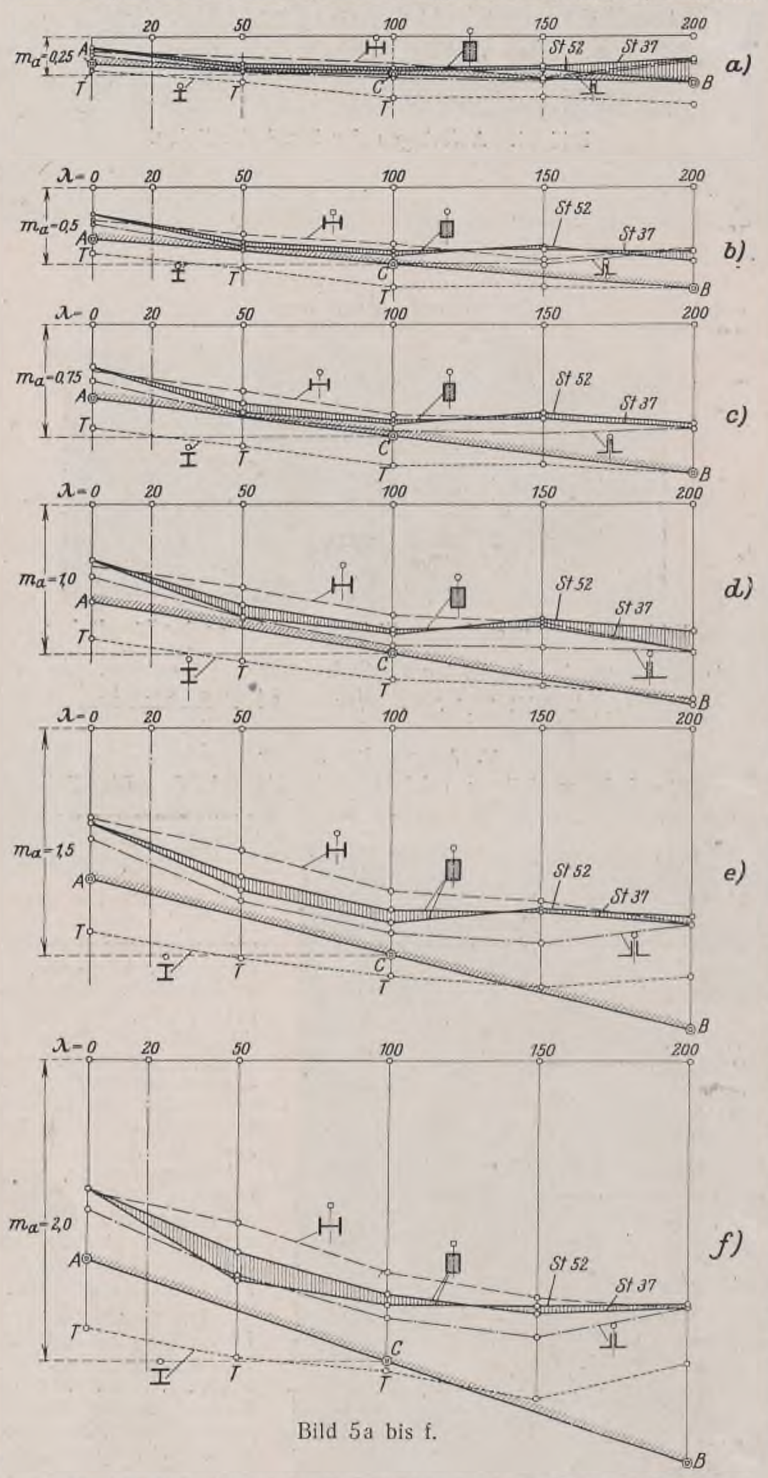


Bild 5a bis f.

so ergibt sich die sogenannte Grundlösung der Aufgabe[6]) in verhältnismäßig einfacher Form. Dabei muß aber immer noch die wesentliche Verschiedenheit der Lösung für die betrachteten fünf Querschnittstypen (Bild 1 u. 2) berücksichtigt werden, von denen in Übersicht I (Heft 12/13, S. 60) die vier ersten zu der Regel-Querschnittsgruppe I gehören, während der fünfte Typ die Ausnahme-Querschnittsgruppe II bildet. Für jeden dieser Type kann nach den fünf Übersichten für St 37 von Jäger (Jezek) der Wert der kritischen Spannung σ_{Kr} entnommen werden, wenn jeweils der Schlankheitsgrad λ und das Außermittigkeitsmaß $m = a : k$ gegeben ist.

[6]) E. Chwalla, Einfluß der Querschnittsform auf das Tragvermögen außermittig gedrückter Baustahlstäbe. Stahlbau 1935, Heft 25 u. 26. — Fr. Hartmann, Knickung, Kippung, Beulung, S. 40 u. 49. Wien 1937, Franz Deuticke.

2. Bei unserer Umrechnung (s. Übersicht I), also beim Übergang vom Spannungsmaßstab der σ_K-λ-Linie zu unserem „bezogenen Flächenmaßstab" der $\alpha\,\omega$-λ-Darstellung [nach Gl. (13)] ist jedoch zu beachten, daß wir einen ersten Anteil des Außermittigkeitsmaßes, nämlich das „baupraktisch unvermeidbare Außermittigkeitsmaß", schon in den ω-Werten enthalten haben (s. Erläuterungen I, S. 11, Vorschlag 1, und die beiden Beispiele, S. 20). Dieser erste Anteil beträgt für St 37

$$m_0 = 0{,}75\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2 \qquad (19)$$

und somit das gesamte Außermittigkeitsmaß

$$m = m_0 + m_a = 0{,}75\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2 + m_a, \qquad (20)$$

wobei m_a das jeweils gegebene, ziffernmäßige, feststellbare Maß der Außermittigkeit bedeutet. [Bei St 52 tritt an Stelle von 0,75 in Gl. (19) der Beiwert 0,95.]

3. Das einfache Verfahren der Umrechnung geht aus folgendem Beispiel hervor. Für einen I-Träger (Typ 1, 2, d. h. Regel-Querschnittsgruppe I und Typ 2, symmetrisch also $e_1 = \frac{h}{2}$) soll für die beiden gegebenen Werte $\lambda = 100$ und $m_a = \frac{a}{k} = 2{,}0$ die zugehörige Ordinate m_x (also die der dritten Teilfläche des Bildes 4) in der $\alpha\,\omega$-Darstellung gefunden werden. Dann ist nach Gl. (20) das gesamte Maß der Außermittigkeit:

$$m = m_0 + m_a = 0{,}75\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2 + 2{,}0 = 2{,}75.$$

Aus Tafel 6 [s. Jäger (Jezek), a. a. O., S. 148] ergibt sich durch Zwischenschaltung (für $m = 2{,}75$ und $\lambda = 100$):

$$\sigma_{Kr} = \frac{1}{2}(0{,}58 + 0{,}53) = 0{,}555 \text{ t/cm}^2,$$

ferner nach unserer Gl. (3b):

$$\alpha\,\omega = \frac{\sigma_F}{\sigma_{Kr}} = \frac{2{,}40}{0{,}555} = 4{,}325.$$

Da nach Tafel 2 (DIN E 4114) für $\lambda = 100$ die Knickzahl $\omega = 2{,}256$ ist, erhält man nach Gl. (12)

$$m_x = \alpha\,\omega - \omega = 4{,}325 - 2{,}256 = 2{,}069.$$

Nach diesem Rechnungsgang wurden die Werte der Übersicht I für die Schlankheitsgrade $\lambda = 0$, 50, 100, 150 und 200 berechnet, und zwar jeweils für $m_a = 0{,}25$, 0,50, 0,75, 1,0, 1,5 und 2,0 sowie für die angegebenen fünf Querschnittstypen.

4. In Bild 5a bis f sind diese Ergebnisse als Ordinaten m_x unter den Abszissen λ aufgetragen worden, und zwar jeweils für einen bestimmten Wert m_a (z. B. $m_a = 0{,}25$). Die Bilder 5a bis f enthalten somit für die fünf verschiedenen Werte m_a jeweils vier Linien, die zu den Typen 1 bis 4 der Regel-Querschnittsgruppe I gehören, während in Bild 6 die fünf Linien (für $m_a = 0{,}25$ bis $m_a = 2{,}0$) des Typs 5 (Ausnahme-Querschnittsgruppe II) dargestellt sind.

5. Endlich wurden in Übersicht I noch die Ergebnisse zum Vergleich von St 37 und St 52 unter Annahme eines Rechteckquerschnitts nach Jäger-Jezek zusammengestellt und die entsprechenden Linien in Bild 6 eingetragen. Da die Abweichungen, wie aus den schraffierten Flächen zu erkennen ist, sehr gering sind, können die für St 37 zu ziehenden Schlußfolgerungen auch ohne weiteres auf St 52 übertragen werden.

II. 1. Die Bedingung zur Begrenzung der Biegezugspannungen [Gl. (2) in DIN E 4114]

$$\sigma_{bz} - \frac{S}{F} \leqq \sigma_{zul} \qquad (21)$$

wollen wir nun ebenfalls in das $\alpha\,\omega$-λ-System transformieren, lediglich um ihre einschränkende Wirkung festzustellen und zu veranschaulichen. Bei Ermittlung von σ_{bz} ist bekanntlich an Stelle von F der verschwächte Querschnitt F_0 einzusetzen. Ferner ist nach dem „Satz von der mittleren Proportionalen" (Bild 7b)

$$e_2\,k_2 = i^2 = e_1\,k_1, \qquad (22)$$

somit angenähert:

$$W_2 = \frac{J_n}{e_2} = \sim \frac{F_n\,i^2}{e_2} = F_n\,k_1 \cdot \frac{e_1}{e_2}$$

und mit $m_a = a : k_1$:

$$\sigma_{bz} = \frac{M}{W_2} = \frac{S}{F_n} \cdot \frac{a}{k_1} \cdot \frac{e_2}{e_1} = \frac{S}{F_n} \cdot m_a \cdot \frac{e_2}{e_1}. \qquad (23)$$

Wird Gl. (21) durch $(S : F)$ geteilt, so ergibt sich [nach Gl. (12)]

$$m_a \cdot \frac{F}{F_n} \cdot \frac{e_2}{e_1} - 1 \leqq \alpha\,\omega \equiv \omega + m_x,$$

weil wiederum nach Gl. (5) u. (6) $\sigma_{zul} : \frac{S}{F} = \sigma_{zul} : \sigma_{d\,zul} = \alpha\,\omega$ ist. So-

mit erhält man hier für die dritte Teilfläche (Bild 4) gemäß Gl. (21) die Ordinate:

$$m_x' = m_a \cdot \frac{F}{F_n} \cdot \frac{e_2}{e_1} - (\omega + 1) \qquad (24)$$

Nach Gl. (13) wird sodann [s. Gl. (16)]

$$\varkappa\,\omega = \omega + m_x' = m_a \cdot \frac{F}{F_n} \cdot \frac{e_2}{e_1} - 1 \qquad (25)$$

wobei wiederum nach Gl. (2a) jeweils $\varkappa\,\omega \cdot \frac{S}{F} \leqq \sigma_{zul}$ sein muß.

2. Für den Anwendungsfall eines gleichschenkligen Winkels (oder Doppelwinkels) sollen die neuen Grenzlinien in Bild 6 eingetragen werden. Bei den üblichen Winkeln (s. Stahl im Hochbau, 8. Aufl., 1930, S. 275) ist im Mittel $F_0 : F = 0{,}85$ und $e_2 : e_1 = 2{,}45$, also nach Gl. (24) der Zahlenbeiwert von m_a

$$\frac{F}{F_n} \cdot \frac{e_2}{e_1} = \frac{2{,}45}{0{,}85} = 2{,}88$$

und somit

$$m_x' = 2{,}88\,m_a - (\omega + 1). \qquad (26)$$

Führt man unsere ω-λ-Gleichung nach Gl. (11) ein, so wird

$$m_x = 2{,}88\,m_a - 2\left[1 + \left(\frac{\lambda - 20}{100}\right)^2\right].$$

Den Grenzwert $m_x = 0$ erhält man somit bei:

$$\lambda_0 = 100\sqrt{1{,}44\,m_a - 1} + 20.$$

Die Wurzel ist nur dann reell, wenn

$$m_a \geqq \frac{1}{1{,}44} = \text{rd. } 0{,}7 \text{ ist.} \qquad (27)$$

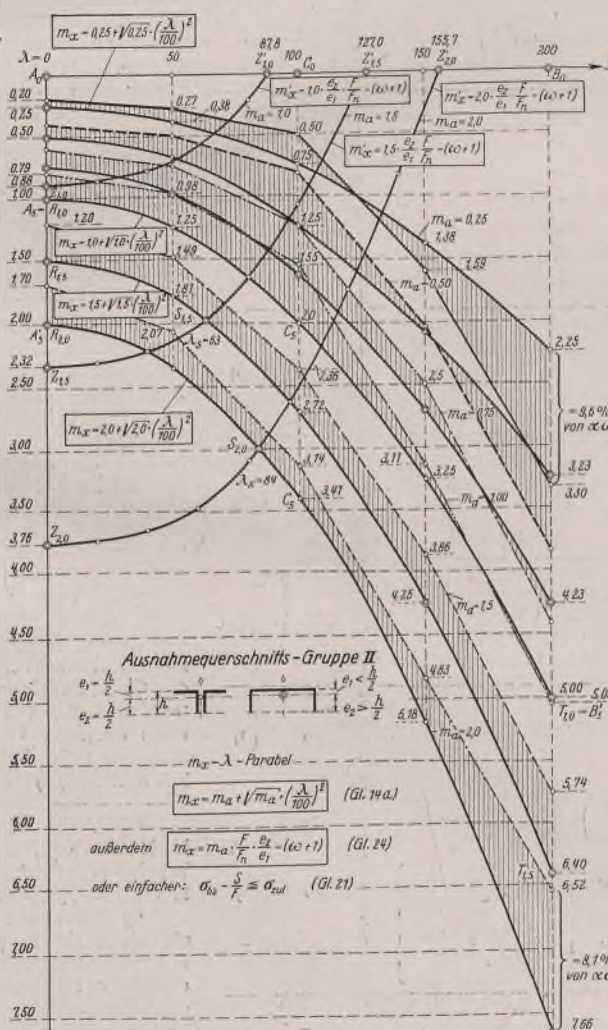


Bild 6.

In Bild 6 sind für $m_a = 1{,}0$ bzw. 1,5 und 2,0 die nach Gl. (24) berechneten Werte m_x' in Abhängigkeit von λ eingetragen, wobei die genauen ω-Werte der Tafel 2 (DIN E 4114) eingesetzt wurden. Die sich ergebenden m_x'-λ-Linien sind mit ZZ' bezeichnet (s. a. Bild 4). Einen Schnittpunkt S mit den entsprechenden m_x-λ-Linien, die mit RT bezeichnet sind, erhält man hier nur für $m_a > 1{,}0$, also z. B. $S_{1,5}$ für $m_a = 1{,}5$ und $S_{2,0}$ für $m_a = 2{,}0$. (Das Fehlen eines solchen Schnittpunktes S für $m_a = 1{,}0$ erklärt sich dadurch, daß die Ordinaten der m_x-λ-Linien absichtlich etwas vergrößert angenommen sind, um die einfache Gl. (14a) zu erhalten.)

Damit ist die Begründung dafür erbracht, daß bei der Ausnahme-Querschnittsgruppe II $\left(\text{mit dem Kennzeichen } e_1 < \frac{h}{2}\right)$ mit $\varkappa\,\omega$ der Sicherheitsnachweis jeweils sowohl nach Gl. (14) als auch nach Gl. (15) geführt werden muß.

3. Folgerungen aus Bild 6. Der Nachweis der Biegezugspannungen, Gl. (15) soll eine neue einschränkende Bedingung bei der Bemessung der Ausnahme-Querschnittsgruppe II bilden. Sie wirkt sich aber, wie Bild 6 zeigt, überhaupt nur aus,

a) wenn sie allein [also ohne Gl. (14)] bestünde bei verhältnismäßig großen Hebelwerten $[m_a > 0.7$ nach Gl. (27)], und bei gedrungenen Stäben,

b) wenn sie gleichzeitig mit Gl. (14) als Grenze dient für Hebelwerte $m_a > 1{,}0$, und wiederum bei gedrungenen Stäben (z. B. bei Winkeln) und bei $m_a = 2{,}0$ dann, wenn $\lambda < 84$ ist (s. Punkt $S_{2,0}$ in Bild 6), und bei $m_a = 1{,}5$, wenn $\lambda < 63$ ist (s. Punkt $S_{1,5}$).

Hieraus ergibt sich wiederum die Notwendigkeit, dann, wenn $m_a > 1$ ist, sowohl nach Gl. (14) als auch nach Gl. (15) den Sicherheitsnachweis zu führen.

III. Die Ergebnisse der „Grundlösung".

Da wir von den fünf Übersichten aus dem Buche von K. Jäger (Jezek)[5]) ausgegangen sind und die in dieser Arbeit hergeleiteten Beziehungen auch in den Erläuterungen [Teil I, Gl. (1) bis (4) u. (9)] wiedergegeben wurden, sollen hier die Ergebnisse der dabei verwendeten sogenannten Grundlösung erläutert und kritisch betrachtet werden. Am kürzesten lassen sich diese Ergebnisse in einer Anzahl von σ_{Kr}-λ-Gleichungen zusammenfassen, die sich mit Rücksicht auf die Querschnittsform unterscheiden (s. Übersicht II).

1. Die Veränderlichen der Aufgabe und die idealisierenden Annahmen. Das vorliegende Problem ist deshalb der rechnerischen Behandlung schwer zugänglich, weil folgende fünf Veränderlichen auftreten:

I. die Spannung $\sigma_a = \sigma_K$ bzw. σ_{Kr} im Querschnittsschwerpunkt (oder die spezifische Stufe der Druckkraft P);

II. die Stabschlankheit $\lambda = l : i$ (Einfluß der Länge und der Stützungsart der Stabenden);

III. die plastischen Eigenschaften des Werkstoffes (Werte der Spannungen und Dehnungen an der Proportionalitäts- und Fließgrenze, sowie die Länge des Fließbereiches bis zum Verfestigungsbeginn);

IV. die Außermittigkeit (oder der Hebelwert) $m_a = a : k$ (oder die Laststufe des Biegemoments M);

V. die Querschnittsform des Knickstabes.

Bei mittigem Druck treten nur die drei Veränderlichen I bis III auf, von denen I und II durch die beiden Koordinaten des σ_K-λ-Systems berücksichtigt werden können, während die dritte (III) die Unterscheidung in zwei Baustahlsorten (St 37 und St 52), also in zwei verschiedene σ_K-λ-Linien gewählt wird. Die leider oft beträchtlichen Streuungen bei St 37 mußten daher bei der Festlegung der Tragfähigkeitslinie (σ_K-λ-Linie) unserer Bestimmungen berücksichtigt werden (ebenso wie die beiden anderen praktisch vorhandenen Unzulänglichkeiten einer unvermeidbaren geringen Anfangskrümmung und Außermittigkeit).

Bei außermittigem Druck treten die Veränderlichen IV und V neu hinzu. Vor allem macht aber auch die Veränderliche III, also das Verhalten des Baustoffs (und zwar im plastischen Bereich), eine strenge rechnerische Lösung in übersichtlicher Form nahezu unmöglich. Durch die Annahme eines „ideal plastischen" Verhaltens (s. Bild 3) wird diese Schwierigkeit großzügig überwunden. Man nimmt dabei an:

a) Die Hookesche Gerade und damit auch die Euler-Hyperbel (also die Proportionalität $\varepsilon = \sigma : E$ und das Ebenbleiben der Querschnitte nach Bernoulli) gelten bis zur Fließgrenze $(\sigma_P = \sigma_F)$.

b) Der Fließbereich (bis zum Verfestigungsbeginn) ist beliebig lang.

c) Die Biegefigur ist eine ganze Sinus-Halbwelle.

Dann kann man nach den einfachen Regeln der Elastizitätslehre und der Statik bis zu der durch das Fließen gegebenen Schwelle σ_F leicht rechnen. Man führt somit das plastische Problem zunächst auf ein elastostatisches zurück. Hierbei ist jedoch zu bedenken, daß nach den Dresdner Versuchen[7]) die P-Grenze für St 37 in der Regel bereits bei $\sigma_P =$ rd. $0{,}80\,\sigma_F$ erreicht wird (dagegen bei hochwertigem Baustahl, z. B. St 48, erst bei $\sigma_P =$ rd. $0{,}90\,\sigma_S$). Bei den bekannten Züricher Knickversuchen von M. Roš und J. Brunner[8]) war $\sigma_P : \sigma_S = 1900 : 2700 = 0{,}70$ (also noch niedriger). Der größte Übelstand besteht aber darin, daß bei St 37 bekanntlich σ_F stark schwankt und damit die einzige hier als maßgebend angesehene Kennziffer des Werkstoffes. Bei den neueren Dahlemer Versuchen des Deutschen Stahlbau-Verbandes[9]) ergab sich (bei St 37) $\sigma_S = 2400$ bis

[7]) W. Gehler, Sicherheitsgrad und Beanspruchung. Internat. Kongreß für Brückenbau und Hochbau 1928 in Wien, S. 223. Wien 1929, Verlag Jul. Springer.

[8]) M. Roš u. J. Brunner, Die Knickfestigkeit von an beiden Enden gelenkig gelagerten Stäben aus Konstruktionsstahl, Zürich 1926, und Schlußberichte der Internat. Kongresse für Brückenbau und Hochbau, Wien 1928 u. Paris 1932.

[9]) Grüning, Stahlbau 1936, S. 17.

2850 kg/cm², so daß die Abweichung + 19 % betrug. Die Abweichungen der Ergebnisse dieser sehr sorgfältigen Dahlemer Versuche von den nach der Grundlösung berechneten Werten ermittelt Jäger (Jezek)[10] zu — 3 % und + 5 %.

Erste Folgerung: Die abweichende Lage der Fließgrenze kann wohl bei der Auswertung von Versuchsergebnissen berücksichtigt werden, nicht aber bei der Bemessung von Bauteilen. Da wir aus diesen Gründen den Sicherheitsgrad reichlich wählen müssen, hat „es offenbar keinen Zweck, die Genauigkeit der Rechnung auf die Spitze zu treiben"[11]) und hier genauere Verfahren als die „Grundlösung" anzuwenden.

Zweite Folgerung: Die nach dieser Grundlösung gefundenen Annäherungswerte werden von den wahren Werten gegebenenfalls bei den Laststufen $\sigma > 0{,}8\,\sigma_S$ stärker abweichen, in denen sich das hier angenommene idealplastische Gesetz von dem wirklichen Verhalten offensichtlich entfernt. Da, nach den σ_{Kr}-λ-Linien von Jäger-Jezek zu schließen, hierdurch der Bereich $m_a \leqq 0{,}25$ stärker betroffen wird, sind die Werte dieses Bereiches nicht ganz zuverlässig begründet, vor allem für die Schlankheiten $\lambda = 80$ bis $\lambda = 120$, weil hier durch die Annahmen der Grundlösung die σ_{Kr}-λ-Linien (nach Bild 3c) zu stark in die Ecke bei Q gedrängt werden.

Endlich hat die Annahme vom Ebenbleiben der Querschnitte eine wesentliche Bedeutung. Sie gilt nach den bisherigen Versuchserfahrungen selbstverständlich genau im elastischen Bereich und ohne nennenswerten Fehler wohl auch zwischen der P-Grenze und dem Fließbereich (allgemein) bei den meisten Querschnitten. Diese Annahme verursacht jedoch starke Abweichungen von der Wirklichkeit bei I-Trägern dann, wenn die Fließgrenze an einzelnen Stellen erreicht oder überschritten wird. Die genauen Züricher Versuche von Stüssi und Kollbrunner[12]) (1934) hatten u. a. folgende Ergebnisse: „Bei I-Trägern darf nicht von dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm für reinen Zug und Druck auf die Formänderung bei Biegung geschlossen werden (Abweichung 18 %), da die Querschnitte im plastischen Bereich nicht eben bleiben." (Übrigens schwankte σ_F, obwohl alle Stäbe aus St 37 der gleichen Charge stammten, um ± 10 % um den Mittelwert 3360 kg/cm², allerdings bei einer Profilhöhe von leider nur 46 mm.) Sobald die Fließgrenze um 8 % fiel, stieg die Durchbiegung um 12 %. (In diesem Zusammenhang sei auf die Schubverteilungszahl hingewiesen, die bekanntlich eine Kennziffer der Querschnittsform ist und wohl auch als ein Maßstab für das „Nichtebenbleiben" des Querschnitts angesehen werden kann. Während sie beim Rechteck 1,2 beträgt, steigt sie bei I-Trägern auf 2,0 und 2,4.)[13])

[10]) Fußnote 4 a. a. O., S. 231.

[11]) Hartmann, a. a. O., Fußnote 1, S. 59.

[12]) F. Stüssi u. C. F. Kollbrunner, Beitrag zum Traglastverfahren, Bautechn. 1935, S. 264.

[13]) Die starke Abhängigkeit des Fließbeginns von der verschiedenen Breite einzelner Profilteile (z. B. des Flansches und des Steges beim I-Träger) veranschaulicht auch die neuzeitliche „werkstoff-mechanische Behandlung der Festigkeitslehre", die besonders für die räumlichen Spannungszustände der Maschinenteile von grundlegender Bedeutung ist (s. W. Kuntze-Berlin, Festigkeitstheoretische Untersuchungen, Handbuch der

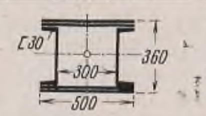
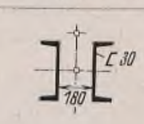
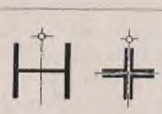
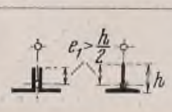
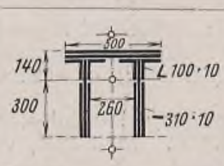
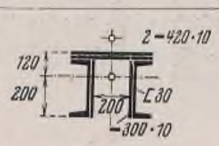
Übersicht II.

Elementarglieder:

$$X_a = \frac{m\,\sigma_{Kr}}{\sigma_F - \sigma_{Kr}} = \frac{m}{\alpha\omega - 1} \quad \text{und} \quad X_b = \frac{e_2}{e_1}\cdot\frac{m\,\sigma_{Kr}}{\sigma_F + \sigma_{Kr}} = \frac{e_2}{e_1}\cdot\frac{m}{\alpha\omega + 1}$$

Grundgleichung:

$$\lambda_{Kr}^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{Kr}}\left\{1 - X_{a,b} + c_1 X_{a,b}^2 - c_2 X_{a,b}^3 + \cdots\right\} = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{Kr}}\cdot K$$

Profil	Querschnitt	Verzerrungszustand	$K =$			Jäger (Jezek) a. a. O. Seite	Gl.
			1. Regel-Querschnittsgruppe I $\left(e_1 \geqq \frac{h}{2}\right)$.				
1		A	$1 - X_a + c_1 X_a^2 - c_2 X_a^3 + \ldots$			103	(13)
2		A	$1 - X_a + \frac{1}{3}\cdot X_a^2 - \frac{1}{27}\cdot X_a^3 = \left(1 - \frac{1}{3}\cdot X_a^3\right)$			83	(I)
3		A	$1 - X_a + \frac{t}{h}\left(1 - \frac{t}{h}\right) X_a^2$			132	(5)
4		A	$1 - X_a \mp 0{,}082\, X_a^2$			142	(3)
5		A	$1 - X_a + 0{,}115\, X_a^2$			154	(20)
6		A	$1 - X_a + 0{,}086\, X_a^2$			156	(26)
7		A	$1 - X_a + \frac{1}{3}\cdot X_a^2 - \frac{1}{81}\cdot X_a^3$			169	(1)
8		A	$1 - X_a + 0{,}25\, X_a^2$			199	(2)
			2. Ausnahme-Querschnittsgruppe II $\left(e_1 < \frac{h}{2}\right)$.				
9		A	$\lambda_G^2 \leqq 0{,}335\cdot\frac{\pi^2 E}{\sigma_{Kr}}$		$1 - X_a + 0{,}21\, X_a^2$	185	(3)
		B	$\lambda_G^2 > 0{,}335\cdot\frac{\pi^2 E}{\sigma_{Kr}}$		$1 - X_b + 0{,}25\, X_b^2$	185	(5)
10		A	$\lambda_G^2 \leqq 0{,}37\cdot\frac{\pi^2 E}{\sigma_{Kr}}$	$\sigma_G \leqq 870$ kg/cm²	$1 - X_a + 0{,}20\, X_a^2$	194	(16)
		B	$\lambda_G^2 > 0{,}37\cdot\frac{\pi^2 E}{\sigma_{Kr}}$	$\sigma_G > 870$ kg/cm²	$1 - X_b + 0{,}25\, X_b^2$	195	(19)
11		A	$\lambda_G^2 \leqq 0{,}57\cdot\frac{\pi^2 E}{\sigma_{Kr}}$	$\sigma_G \leqq 600$ kg/cm²	$1 - X_a + 0{,}17\, X_a^2$	197	(23)
		B	$\lambda_G^2 > 0{,}57\cdot\frac{\pi^2 E}{\sigma_{Kr}}$	$\sigma_G > 600$ kg/cm²	$1 - X_b + 0{,}10\, X_b^2$	197	(26)

Dritte Folgerung: In unserem Bild 5 sind die für den I-Querschnitt nach der Grundlösung berechneten Werte m_x deshalb nicht als maßgebend anzusehen, weil dann, wenn der hier wirksame, breite und starke Zuggurt zu fließen beginnt, die Querschnitte nicht mehr eben bleiben. Dieses heute noch stark umstrittene Problem kann erst nach Durchführung genauer Versuche mit Druckstäben bei außermittigem Kraftangriff befriedigend geklärt werden.

2. Die Grundgleichungen nach Jäger (Jezek) (Übersicht II).

a) Die Zusammenstellung der Grundgleichungen, die sämtlich die Form aufweisen:

$$(28)\qquad \lambda^2_{Kr} = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{Kr}}\left\{1 - X_{a,b} + c_1 X^2_{a,b} - c_2 X^3_{a,b} + \ldots\right\} = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{Kr}} \cdot K$$

zeigt deutlich den Aufbau dieser Funktion, wobei für die Regel-Querschnittsgruppe I $\left(\text{mit dem Druckrandabstand } e_1 \geqq \frac{h}{2}\right)$ das Elementarglied [nach Gl. (3b)]

$$(29)\qquad X_a = \frac{m\,\sigma_{Kr}}{\sigma_F - \sigma_{Kr}} = \frac{m}{\frac{\sigma_F}{\sigma_{Kr}} - 1} = \frac{m}{\alpha\,\omega - 1}$$

ist (s. Querschnittsprofil 1 bis 8) und für die Ausnahme-Querschnittsgruppe II $\left(\text{s. Profil 9 bis 11, mit dem Druckrandabstand } e_1 < \frac{h}{2}\right)$ das Elementarglied lautet:

$$(30)\qquad X_b = \frac{e_2}{e_1} \cdot \frac{m\,\sigma_{Kr}}{\sigma_F + \sigma_{Kr}} = \frac{e_2}{e_1} \cdot \frac{m}{\frac{\sigma_F}{\sigma_{Kr}} + 1} = \frac{e_2}{e_1} \cdot \frac{m}{\alpha\,\omega + 1}.$$

b) Erläuterung der Elementarglieder [Gl. (29) u. (30)].

Wie der Vergleich der einzelnen Gleichungen in Übersicht II erkennen läßt, unterscheiden sich diese nur durch die Zahlenbeiwerte c_1 und c_2, die im dritten und vierten Gliede der konvergierenden Reihe K [Gl. (28)] jeweils auftreten und die verschiedenen Querschnittstypen kennzeichnen. Dagegen ist ihnen allen das erste und zweite Glied von K gemeinsam, also der Ausdruck

$$(31)\qquad \lambda^2_{Kr} = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{Kr}}\left\{1 - X_{a,b}\right\}.$$

Diese Gleichung (mit X_a bzw. X_b), die also unabhängig von der Querschnittsform ist, erhält man nach Jäger (Jezek)[14]) bei steigender Belastung für den Augenblick, in dem gerade das Fließen am Druckrand bzw. Zugrand beginnt (s. auch Gl. (9) der Erläuterungen I, S. 13). Da nach Gl. (28) für $\lambda = 0$ das Elementarglied $X_a = 1$ bzw. $X_b = 1$ wird, liegt es nahe, für diesen bekannten Fall der Festigkeitslehre (ohne Knickung) diese Werte zu bestimmen.

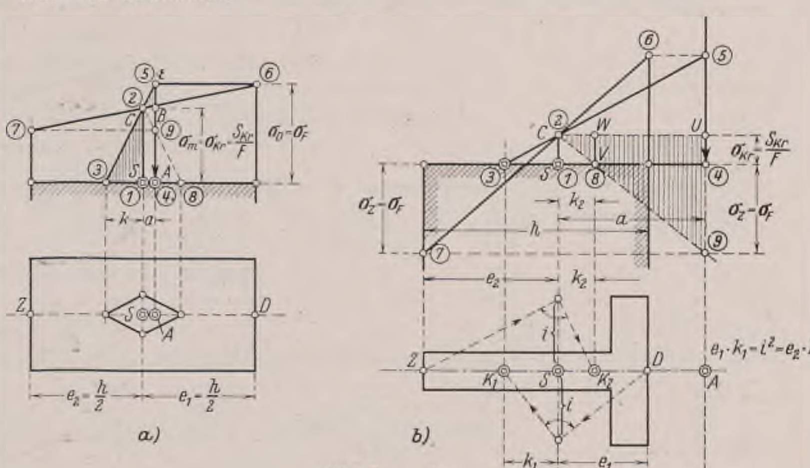


Bild 7a u. b.

Nach Bild 7a, das das bekannte Verfahren zur zeichnerischen Bestimmung der Randspannungen bei außermittigem Kraftangriff darstellt[15]), folgt dann, wenn am Druckrand D die Spannung $\sigma_D = \sigma_F$ erreicht wird (da hier $\sigma_m = \sigma_{Kr}$ und $m = a : k$ ist):

$$\frac{SC}{BE} = \frac{\sigma_m}{\sigma_D - \sigma_m} = \frac{\sigma_{Kr}}{\sigma_F - \sigma_{Kr}} = \frac{k}{a} = \frac{1}{m},$$

also

$$(32)\qquad 1 = \frac{m\,\sigma_{Kr}}{\sigma_F - \sigma_{Kr}} = X_a.$$

Auch unser Kennzeichen, daß hier der Druckrandabstand $e_1 \geqq \frac{h}{2}$ sein soll, trifft zu, da (nach Abb. 7a) $e_1 = \frac{h}{2}$ ist.

Anderseits erhält man bei dem stark unsymmetrischen Querschnitt (des Bildes 7b) $e_1 < \frac{h}{2}$, wobei die Kraft jenseits des Druckrandes angreift, so daß am Zugrand $\sigma_Z = \sigma_F$ erreicht werden kann. Da wiederum $e_1 k_1 = i^2 = e_2 k_2$ und $m = a\,k_1$ ist, ergibt sich

$$\frac{VW}{TU} = \frac{\sigma_{Kr}}{\sigma_F + \sigma_{Kr}} = \frac{k_2}{a} = \frac{e_1}{e_2} \cdot \frac{k_1}{a} = \frac{e_1}{e_2} \cdot \frac{1}{m}$$

oder

$$(33)\qquad 1 = \frac{e_2}{e_1} \cdot \frac{m\,\sigma_{Kr}}{\sigma_F + \sigma_{Kr}} = X_b,$$

Damit ist Gl. (31) als Grundgleichung für den Fließbeginn deutlich veranschaulicht und durch die Bilder 7a u. b auch das Fließen am Druckrand und am Zugrand erläutert. (Schluß folgt.)

Werkstoffprüfung, II. Bd., S. 723, Berlin 1939, Verlag Jul. Springer; W. Kuntze, Stahlbau 1933, S. 49; 1935, S. 9, und vor allem auch J. Fritzsche-Prag, Stahlbau 1936, S. 65, 90 u. 137 (insbesondere S. 94, Bild 9); Stahlbau 1937, S. 137; 1938, S. 54, 67, 121 u. 132; endlich K. Klöppel, Stahlbau 1936, S. 105). Wollte man den Einfluß der Ungleichmäßigkeit der Querschnittsform auf den Fließbeginn berücksichtigen, so müßte man eine besondere Formziffer, in ähnlicher Weise wie bei der Bemessung von Schweißnähten, einführen, worauf aber der Einfachheit halber verzichtet werden soll.

[14]) Fußnote 4 a. a. O., S. 80 u. 107.

[15]) W. Gehler, Taschenbuch für Bauingenieure, 1928, V. Aufl., Bd. I, S. 257, Fig. 97b. Berlin, Verlag Jul. Springer.

Verschiedenes.

Platten unter Eisenbahngleisen bei beschränkter Konstruktionsdicke und kleinstem Stahlquerschnitt. Bei Bahnbrücken mit durchgehender Gleisbettung (insbesondere bei Straßenunterführungen) ist bei umzubauenden Bauwerken die Konstruktionsdicke (KD) in der Regel beschränkt, während bei neu zu bauenden Bauwerken eine Beschränkung der KD erwünscht ist. Abgesehen von Stahlüberbauten mit Tonnen- oder Buckelblechen, die bei dieser Betrachtung wegen des Stahlbedarfs ausscheiden, kommen bei Stützweiten l = bis rd. 20 m Platten aus einbetonierten Walzträgern, hier abgekürzt BE (bzw. geschweißten Sonderprofilen), und bei l = bis rd. 13 m Eisenbetonplatten, hier abgekürzt EB, in Frage. Die zeitgemäße Forderung nach geringstem Stahlverbrauch verlangt ein scharfes Abwägen dieser beiden Konstruktionsarten gegeneinander.

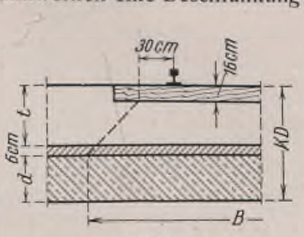


Bild 1.

Als Hilfsmittel für Entwurf und Berechnung sollen Tafel A für BE und Tafel B für EB dienen. Soweit dies nicht schon durch die Tafeln selbst und die Beispiele geschieht, gelten noch folgende Erläuterungen: Grundlagen sind: DV 804 der Deutschen Reichsbahn = Berechnungsgrundlagen für stählerne Eisenbahnbrücken, DIN 1075 = Berechnungsgrundlagen für Massivbrücken.

Die Tafeln sind für eine Plattenbreite $b = 1$ m und für Lastenzug N aufgestellt, da bis rd. 6 m Lastenzug N und E gleich und von $l = 6$ bis 13 m (der oberen Grenze für Eisenbeton) die Unterschiede gering sind.

Verteilungsbreite B der Verkehrslast:

BE	$B = 350$ cm	
EB	$B = 80 + 4\,t$ (cm) bei $t \leqq 55$ cm $B = 190 + 2\,t$ (cm) bei $t > 55$ cm	(Bild 1)

Während F_e und KD für EB aus Tafel B entnommen werden können, erhält man für BE:

$$(1)\qquad F_e = \frac{F}{e}\ (\text{cm}^2)$$

F = Querschnittsfläche aus den üblichen Profiltafeln, e = Trägerabstand

$$(2)\qquad \text{KD}_{40} = h + 52 + \frac{l}{40} + (c)\ \ldots \text{ für } t = 40 \text{ cm}$$

$$(3)\qquad \text{KD}_{30} = h + 42 + \frac{l}{40} + (c)\ \ldots \text{ für } t = 30 \text{ cm}.$$

c = Betondeckung, wenn Träger unten ummantelt sind (Bild 2).

Tafel B gilt für einfach und doppelt bewehrte Querschnitte, letztere bis zu einem Verhältnis $F_e : F_e' = 1 : 1{,}5$ als obere Grenze. Hierbei muß darauf geachtet werden, daß mit F_e' nur so weit gegangen wird, als es

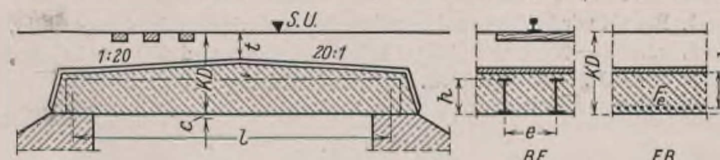


Bild 2.

Tabelle 1.



	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
ϕ mm	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
t'_{min} cm	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	4,4	4,8	5,2	5,6	6,0	6,4	6,8	7,2	7,6	8,0
F_e cm²	26,33	35,31	45,29	55,83	66,84	78,50	86,36	94,17	102,12	110,06	117,83	125,63	133,52	141,39	149,21	157,0

Tabelle 2. Einfache Bewehrung: $\sigma_{b/e} = 50/1400$ kg/cm².

l	F_e (cm²)				KD (cm)				d (cm)			
(m)	$t = 40$ cm	55	80	120	$t = 40$ cm	55	80	120	$t = 40$ cm	55	80	120
2,5	23,3	20,4 = −2,9	19,0 = −4,3	18,0 = −5,3	88	99 = +11	122 = +34	160 = +72	42	38 = −4	36 = −6	34 = −8
5,0	45,0	40,4 = −4,6	37,6 = −7,4	35,1 = −9,9	123	130 = +7	152 = +29	188 − +65	77	69 = −8	66 = −11	62 = −15
7,5	68,2	61,2 = −7,0	58,4 = −9,8	55,9 = −12,3	161	165 = +4	184 = +23	221 = +60	115	104 = −11	98 = −17	95 = −20
10,0	93,1	84,5 = −8,6	79,8 = −13,3	77,5 = −15,6	201	201 = ±0	221 = +20	255 = +54	155	140 = −15	135 = −20	129 = −26
12,5	120,5	109,5 = −11,0	104,2 = −16,3	100,5 = −20,0	246	241 = −5	259 = +13	294 = +48	200	181 = −19	173 = −27	168 = −32
	d. h. Abnahme von F_e				d. h. Zunahme von KD				d. h. Abnahme von d			

die einlagig zugelassenen Eisen gemäß Tabelle 1 erlauben.

Bei EB gilt als geringste Bettungsdicke $t = 40$ cm, die auch bei BE zugrunde gelegt ist. Bei letzterer kann bei besonders beschränkter KD unter Annahme von Eisenschwellen $t = 30$ cm eingesetzt werden. Ist eine Vergrößerung der Schotterdicke t bei BE nur nachteilig auf KD und F_e, so zeigt eine Zunahme von t bei EB die in Tabelle 2 dargestellten Auswirkungen.

Ähnlich ist auch das Verhältnis bei doppelter Bewehrung. Der Zunahme von t und damit von KD bei EB entspricht eine im Verhältnis geringere Abnahme von F_e und d, so daß bei beschränkter KD allgemein mit $t = 40$ cm zu rechnen ist.

Die Querbewehrung kann bei BE und EB als gleich angenommen werden und muß, da hier nicht behandelt, für den Gesamtstahlbedarf noch berücksichtigt werden.

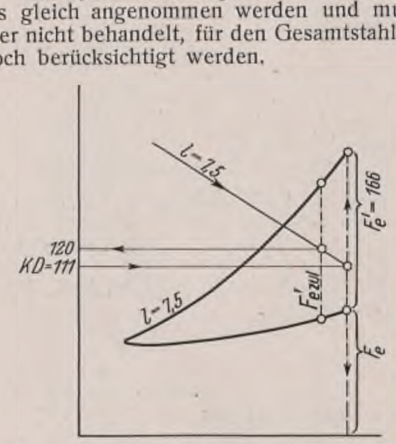
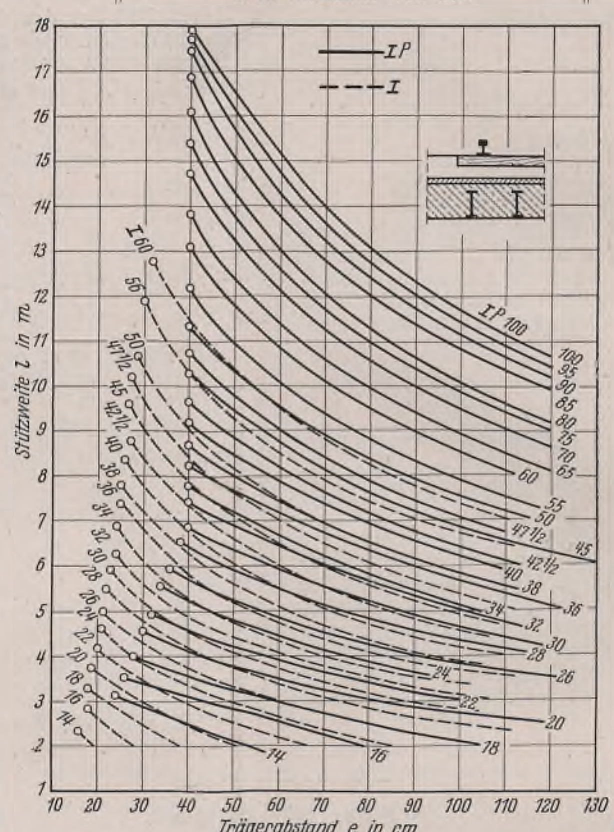
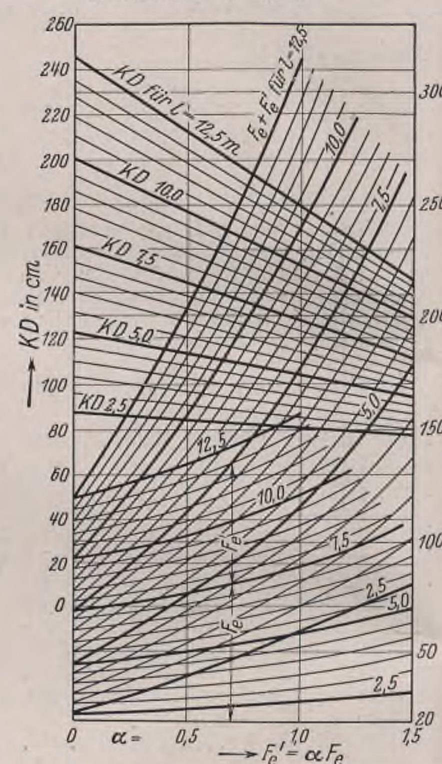


Bild 3.



Tafel A. Einbetonierte Walzträger unter Eisenbahngleisen.
Lastenzug N; St 37; Schienenstöße geschweißt oder nicht vorhanden; Verteilungsbreite B für Verkehrslast 3,50 m.



Tafel B. Einfach und doppelt bewehrte Eisenbetonplatten unter Eisenbahngleisen.
Lastenzug N; Plattenbreite $b = 1,0$ m; Schotterstärke $t = 40$ cm; $\sigma_b = 50$ kg/cm²; $\sigma_e = 1400$ kg/cm²; $d = \text{KD} - 46$ cm; $h = d - 5$ cm; $h' = 4$ cm.

Die Platten besitzen oben eine 6 cm dicke AIB-Abdichtungs- und Schutzdecke und ein beiderseitiges Längsgefälle von 20 : 1 (Bild 2).

Beispiel 1.

Gegeben: $l = 7,50$ m, Lastenzug N,
gesucht: $\min F_e$ bei unbeschränkter KD und $t = 80$ cm.

a) EB:
(Tabelle 2) KD = 184 cm, $d = 184 - 86 = 98$ cm, $h = 98 - 5 = 93$ cm,
$F_e = 58,4$ cm² nach Tabelle 1 einlagig möglich!

b) BE:

(Tafel A)	Profil	IP 34	IP 36	IP 38	I 38	I 47½	I 50	I 55	I 60
	e (cm)	44	53	59	27	51	59	77	98
nach (2)	KD_{40} (cm)	105	107	109	109	118	121	126	131
nach (3)	KD_{30} (cm)	95	97	99	99	108	111	116	121
nach (1)	F_e (cm²)	395	362	**328**	396	320	305	276	**260**

d. h.: 1. Bei BE wird KD gegenüber einfach bewehrten EB immer geringer,
2. $\min F_e = 260$ cm² bei I 60 mit $e = 100$ cm und $KD_{40} = 131$ cm,
3. $\min KD_{40} = 109$ cm bzw. $\min KD_{30} = 99$ cm bei IP 38 mit $e = 59$ cm und $F_e = 328$ cm².

Beispiel 2.

Gegeben: $l = 7,50$ m, Lastenzug N, KD = 111 cm,
gesucht: $\min F_e$.

a) EB: (Tafel B) $F_e = 110$ cm²
$F_e' = 166$ cm² bei verlängerter Kurve
$F_e + F_e' = 276$ cm².

Da $F_e' = 166$ cm² nach Tabelle 1 einlagig nicht möglich ist, müßte man, wenn EB zur Ausführung gelangen sollte, so weit auf dem Kurvenzweig zurückgehen, bis der Höchstwert der zur Verfügung stehenden Eisen nach Tabelle 1 für den F_e' erreicht wird (Bild 3), d. i. bei vorhandenem ϕ 30 mm mit $F_e' = 117,8$ cm² bei KD = 120 cm, jedoch $>$ 111, somit

b) BE: nach Beispiel 1 und (2) bzw. (3)

$$h_{40} = 111 - 52 - \frac{750}{40} = 40 \text{ cm Trägerhöhe}$$

I 40 mit $e = 33$ cm und $F_e = 358$ cm²;

$$h_{30} = 111 - 42 - \frac{750}{40} = 52 \text{ cm Trägerhöhe}$$

I 50 mit $e = 59$ cm und $F_e = 305$ cm²,

maßgebend I 50.

Waldemar Hüther, München.

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt.
Verlag: Wilhelm Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W 9.
Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

DER STAHLBAU

Schriftleitung:
Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule
Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599
Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61
Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage zur Zeitschrift **DIE BAUTECHNIK** Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

13. Jahrgang | BERLIN, 16. August 1940 | Heft 16/18

Die Berechnung der regelmäßig vieleckigen Rahmenkuppeln.

Von Oberingenieur **Fritz Wansleben**, Rheinhausen.

Grundlagen.

Allgemeines.

Unter einer Rahmenkuppel verstehen wir ein räumliches Tragwerk, welches gemäß Bild 1 aus mehreren, meist waagerecht liegenden vieleckigen Stabringen besteht, deren Eckpunkte durch Rippenstäbe miteinander verbunden sind. Diese liegen in der Regel in lotrechten Ebenen. Die Stäbe sind biegungs- und verdrehungsfest und in den Knotenpunkten steif miteinander verbunden. Dieser feste Anschluß der Stäbe gibt dem Tragwerk die erforderliche Standfestigkeit.

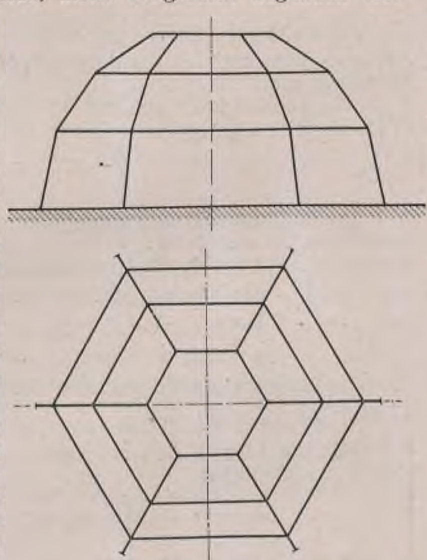


Bild 1.

Ein Bauwerk dieser Art ist sehr hochgradig[1]) statisch unbestimmt und ist daher in ganz allgemeinen Fällen bei exakter Behandlung wegen des ungeheueren Umfanges der Rechenarbeit einer praktischen Berechnung nicht zugänglich. Es ist daher auch noch keine ausführliche, für den praktischen Gebrauch verwendbare Theorie der Rahmenkuppeln bekanntgeworden. Bisher sind hauptsächlich die sogenannten Rippenkuppeln behandelt worden[2]). Dies sind Raumtragwerke, bei denen nur die Rippenstäbe und der Schlußring, in den sie oben münden, biege- und verdrehungssteif sind. Die Ringstäbe sind jedoch gelenkig oder gar verschieblich an ihnen befestigt.

Die hierfür aufgestellten Rechnungen waren trotz der erheblich geringeren Zahl von Unbekannten noch recht verwickelt. Wegen der tatsächlich praktisch nicht vorhandenen gelenkigen, sondern vielmehr steifen Ringanschlüsse können die Ergebnisse nur als grobe Annäherungen bewertet werden. Auch der Vorschlag, die Wirkung der fest angeschlossenen Ringstäbe durch Modellversuche festzustellen, kann nur als ein zu ganz groben Ergebnissen führender Notbehelf bezeichnet werden, dessen rechnerische Auswertung auch nicht einfach ist.

Ein Versuch, die Knickfestigkeit eines Kuppeltragwerks aus steifen Stäben zu ermitteln, ist bisher nicht bekanntgeworden.

In der vorliegenden Abhandlung ist gezeigt worden, daß in besonderen Fällen und bei Benutzung gewisser mathematischer Kunstgriffe eine exakte Berechnung der Rahmenkuppel sowohl als Festigkeits- als auch als Stabilitätsproblem verhältnismäßig sehr einfach und für die Praxis brauchbar ist. Solche Sonderfälle der Ausführung sind glücklicherweise Regelfälle der Praxis.

Die hier gegebene Theorie ist natürlich auch zur Berechnung von prismatischen oder abgestumpft pyramidenförmigen Stockwerkrahmen gültig, weil diese Tragwerke Sonderformen der Rahmenkuppel sind.

Voraussetzungen.

Die Vorbedingungen für die einfache Berechnungsmöglichkeit der Rahmenkuppel sind bezüglich des Tragwerks die Achsensymmetrie in geometrischer und physikalischer Beziehung sowie die Geradzahligkeit der Rippen. Die Ringe liegen also in waagerechten Ebenen und sind untereinander ähnliche, regelmäßige und geradzahlige Vielecke. Die Rippen sind einander gleich und liegen zweckmäßig in lotrechten Radialebenen. Die Rippenfüße können entweder gelenkig auf den Fundamenten ruhen oder in ihnen fest eingespannt sein. Die Art der Lagerung ist, solange sie der Symmetriebedingung entspricht, für die Berechnung ohne Bedeutung. Bemerkenswert ist hier, daß eine gelenkige Auflagerung der Rippen keinerlei Vereinfachungen in der Berechnung bringt.

Bezüglich der Knotenlasten, welche sowohl aus Kräften als auch aus Momenten bestehen können, brauchen wir keinerlei einschränkende Annahmen zu machen. Als Bedingung für die Durchführbarkeit der Rechnung ist es jedoch notwendig, diese Lasten in sogenannte Sinus- bzw. Cosinusgruppen aufzuteilen, was stets exakt möglich ist. Die Aufteilung erfolgt nach den aus der harmonischen Analyse bekannten Regeln.

Begriffsfestlegung für die Rechnung.

Um bei dem etwas verwickelten Zusammenhang der Rechnung Fehler zu vermeiden, sollen in diesem Abschnitt die hier vorkommenden Bezeichnungen in ihrer Bedeutung und die Vorzeichenannahmen klargestellt werden (Bild 2).

Wir geben den Rippen, von oben gesehen, im Uhrzeigersinn die Ordnungszahlen: $1, 2, 3, \ldots i \ldots 2n$. Die Ebenen, in denen die Rippen liegen, sind gegeneinander um die gleichen Winkel $\alpha = \frac{\pi}{n}$ gedreht. Die Ringe wollen wir von unten nach oben mit I, II, ... J ... N bezeichnen. Ihre Stabquerschnitte sind gegen die Ringebenen um die Winkel β geneigt. Die Rippenstäbe nehmen wir wegen der einfacheren Rechnung von Knotenpunkt zu Knotenpunkt als gerade an. Sie schließen mit der Lotrechten die Winkel γ ein. Für die Knotenpunkte, deren Ordnungszahl Ji ist, liegen die Koordinatenachsen X, Y und Z lotrecht, radial und tangential. Ihre positiven Richtungen sind: abwärts, nach innen und, von innen gesehen, nach rechts. Die Drehungen ξ, η und ζ der Knotenpunkte um die Koordinatenachsen sind positiv, wenn sie, von oben bzw. gegen die y- oder z-Richtung gesehen, rechtsdrehend sind. Ferner werden wir die Neigungsänderungen φ und ϱ der Rippenstäbe bzw. ψ und $\varkappa$ der Ringstäbe als positiv bezeichnen, wenn sie positiven Verschiebungsdifferenzen entsprechen. Die Stabkräfte in den Rippen bzw. Ringen sind S' bzw. $\overline{S}$ und werden in üblicher Weise als Zugkräfte positiv angenommen. Zur Darstellung von Momenten benutzen wir Vektoren, welche in den durch die betreffenden Momente erzeugten Nullachsen liegen. Sie sind, in Pfeilrichtung gesehen, rechtsdrehend. Die in den Rippenstäben wirkenden Biegemomente M' und M'' sind positiv, wenn die durch sie erzeugten Zugspannungen auf der inneren bzw. der (von innen gesehen) rechten Stabseite liegen. Die Biegemomente $\overline{M}$ und $\overline{\overline{M}}$ in den Ringstäben wollen wir als positiv bezeichnen, wenn sie auf der nach dem Kuppelinnern bzw. nach dem höher liegenden Ring gelegenen Stabseite Zugspannungen erzeugen. Der positive Sinn der Drehmomente $\mathfrak{M}'$ und $\overline{\mathfrak{M}}$ in den Rippen- und Ringstäben ist, gegen die Schnittflächen der Stäbe gesehen, der Uhrzeigersinn. Bei den Querkräften Q' und Q'' bzw. $\overline{Q}$ und $\overline{\overline{Q}}$ wählen wir das Vorzeichen positiv, wenn sie positiven Momentendifferenzen entsprechen. F' und I' bzw. $\overline{F}$ und $\overline{I}$ sind die Flächen- und Drehträgheitsmomente der Rippen- bzw. Ringquerschnitte. Ferner bedeuten J', J'', $\overline{J}$ und $\overline{\overline{J}}$ die den gleich gekennzeichneten Biegemomenten entsprechenden Querschnitts-

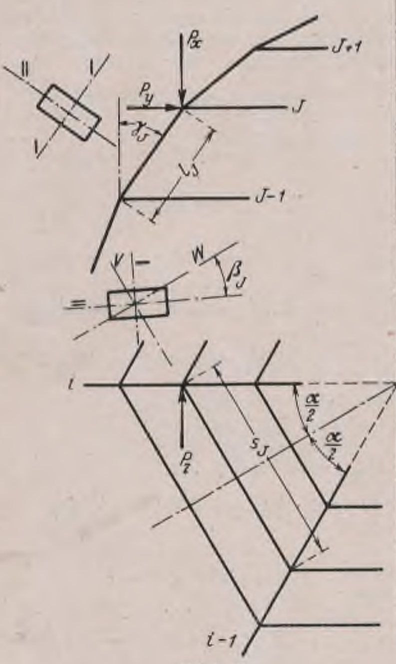


Bild 2.

[1]) Bei einer 16eckigen Kuppel mit 7 Ringen und eingespannten Rippenfüßen ist z. B. der Grad der statischen Unbestimmtheit 672fach.

[2]) Siehe Literaturverzeichnis.

trägheitsmomente. Schließlich bezeichnen in üblicher Weise E bzw. G den Elastizitäts- bzw. Schubmodul. Ihr Verhältnis zueinander ist: $\frac{G}{E}=\lambda$. Die Wärmedehnungsziffer des Baustoffes ist ε.

Die Belastungen.

Die Lasten können beliebig gerichtet und über die Stäbe verteilt sein. Wir wollen sie jedoch, um die Übersichtlichkeit der Rechnung nicht unnötig zu erschweren, nur an den Ringstäben angreifend annehmen.

Die durch die Zwischenbelastung der Ringstäbe im unverzerrten Kuppelsystem entstehenden Biegemomente werden in der Berechnung zweckmäßig von den durch die Knotenlasten erzeugten Kraftwirkungen getrennt behandelt.

Die Zwischenbelastungen zerlegen wir am besten in die geneigt liegenden Hauptebenen der Ringstabquerschnitte. Die Stäbe sind dann als beiderseits fest eingespannte Träger zu berechnen.

Als Knotenlasten kommen die Mittelkräfte der sich bei dieser Zwischenrechnung ergebenden Auflagerdrücke und Einspannmomente in Betracht.

Wir werden sie nach den Koordinatenrichtungen in die Komponenten P_x, P_y und P_z bzw. M_x, M_y und M_z zerlegen. Nun teilen wir diese Lastkomponenten, wie schon als Voraussetzung für die Durchführbarkeit der Rechnung gefordert, in eine Reihe von Sinus- und Cosinusgruppenlasten verschiedener Stufen gemäß der Besselschen Formel:

$$\begin{aligned}P_i=B_{(o)}&+\left(A_{(1)}\cdot\sin\alpha i+B_{(1)}\cdot\cos\alpha i\right)+\dots\\&+\left(A_{(k)}\cdot\sin k\alpha i+B_{(k)}\cdot\cos k\alpha i\right)+\dots\\&+\left(A_{(n-1)}\cdot\sin(n-1)\alpha i+B_{(n-1)}\cdot\cos(n-1)\alpha i\right)+B_{(n)}\cdot\cos n\alpha i.\end{aligned}$$

Hierin bedeuten: $\alpha=\frac{\pi}{n}$ und die Beiwerte A und B:

$$B_{(o)}=\frac{1}{2n}\sum_i P_i \qquad A_{(k)}=\frac{1}{n}\sum_i P_i\cdot\sin k\alpha i$$

$$B_{(n)}=\frac{1}{2n}\sum_i(-1)^i P_i \qquad B_{(k)}=\frac{1}{n}\sum_i P_i\cdot\cos k\alpha i.$$

Diese Beiwerte nennen wir die Lastgrößen. Der eingeklammerte Index bezeichnet die Belastungsstufe, zu welcher der Beiwert gehört. Wir sehen, daß jede Belastungsstufe zwei Lastgruppen besitzt, und zwar eine Cosinus- und eine Sinusgruppe. Bei den Anfangs- und Endstufen fallen die Sinusgruppen fort, weil für $k=o$ und $k=n$ die Werte $\sin k\alpha i=0$ sind.

Späterhin werden wir erkennen, daß die Gruppenlasten $P_{(k)x}\cdot\sin k\alpha i$, $P_{(k)y}\cdot\sin k\alpha i$, $P_{(k)z}\cdot\cos k\alpha i$, $M_{(k)x}\cdot\cos k\alpha i$, $M_{(k)y}\cdot\cos k\alpha i$ und $M_{(k)z}\cdot\sin k\alpha i$ einander ähnliche Ringverformungen y_i erzeugen. Das gleiche gilt in entsprechender Weise für die übrigen Gruppenlasten. Um nun einheitlich gebaute Formeln zu erhalten, werden wir den Lastgrößen mit gleichartiger Wirkung ein gleiches Kennzeichen geben. Außerdem werden wir einige Lastgrößen mit Rücksicht auf eine einheitliche Darstellung mit einem negativen Vorzeichen versehen. Wir setzen:

$$(1a)\quad\left\{\begin{array}{ll}\frac{1}{n}\sum P_{xi}\cdot\sin k\alpha i=P^o_{(k)x} & \frac{1}{n}\sum P_{xi}\cdot\cos k\alpha i=P_{(k)x}\\ \frac{1}{n}\sum P_{yi}\cdot\sin k\alpha i=P^o_{(k)y} & \frac{1}{n}\sum P_{yi}\cdot\cos k\alpha i=P_{(k)y}\\ \frac{1}{n}\sum P_{zi}\cdot\cos k\alpha i=P^o_{(k)z} & \frac{1}{n}\sum P_{zi}\cdot\sin k\alpha i=-P_{(k)z}\\ \frac{1}{n}\sum M_{xi}\cdot\cos k\alpha i=M^o_{(k)x} & \frac{1}{n}\sum M_{xi}\cdot\sin k\alpha i=-M_{(k)x}\\ \frac{1}{n}\sum M_{yi}\cdot\cos k\alpha i=M^o_{(k)y} & \frac{1}{n}\sum M_{yi}\cdot\sin k\alpha i=-M_{(k)y}\\ \frac{1}{n}\sum M_{zi}\cdot\sin k\alpha i=M^o_{(k)z} & \frac{1}{n}\sum M_{zi}\cdot\cos k\alpha i=M_{(k)z}.\end{array}\right.$$

Hiermit wird also beispielsweise:

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}P_{xi}=P_{(o)x}&+\left(P^o_{(1)x}\cdot\sin\alpha i+P_{(1)x}\cdot\cos\alpha i\right)+\dots\\&+\left(P^o_{(k)x}\cdot\sin k\alpha i+P_{(k)x}\cdot\cos k\alpha i\right)+\dots\\&+\left(P^o_{(n-1)x}\cdot\sin(n-1)\alpha i+P_{(n-1)x}\cdot\cos(n-1)\alpha i\right)\\&+P_{(n)x}\cdot\cos n\alpha i\\ M_{xi}=M^o_{(o)x}&+\left(M^o_{(1)x}\cdot\cos\alpha i-M_{(1)x}\cdot\sin\alpha i\right)+\dots\\&+\left(M^o_{(k)x}\cdot\cos k\alpha i-M_{(k)x}\cdot\sin k\alpha i\right)+\dots\\&+\left(M^o_{(n-1)x}\cdot\cos(n-1)\alpha i-M_{(n-1)x}\cdot\sin(n-1)\alpha i\right)\\&+M^o_{(n)x}\cdot\cos n\alpha i.\end{aligned}\right.$$

Im allgemeinen sind die Lastgruppen $P_{(o)x}$ und $P_{(o)y}$ von ausschlaggebender Größe, weil in ihnen das Eigengewicht und die volle Schneelast der Kuppel enthalten sind. In den übrigen Lastgruppen kommen lediglich die Unregelmäßigkeiten der Belastungen zur Geltung. Ihre statischen Wirkungen sind in der Regel um so kleiner, je höher die Belastungsstufe k ist. Ferner erkennen wir, daß für die beiden Lastgruppen $P_{(o)x}$ und $P_{(o)y}$ die Stabkräfte groß und die Biegemomente klein, dagegen für die übrigen Lastgruppen umgekehrt die Stabkräfte klein und die Momente groß werden. Wir wollen daher als einzige und in den Grenzen der Rechengenauigkeit liegende vereinfachende Annahme nur für die beiden Lastgruppen $P_{(o)x}$ und $P_{(o)y}$ die Stablängenänderungen berücksichtigen, obgleich eine genauere Rechnung grundsätzlich keine Schwierigkeiten bereiten würde. Diese Sonderannahme ist für die Berechnung formal ohne Bedeutung, weil die Belastungsstufe nullter Ordnung sowieso besonders behandelt werden muß.

Es zeigt sich, daß bei Wahl von Gruppenlasten der in Gl. (1) angegebenen Art die Verformungen der Rippen und Ringe einander ähnlich werden und den gleichen funktionalen Verlauf besitzen wie die Lasten. Als Folge dieser Tatsache sind die statischen Wirkungen der einzelnen Lastgruppen voneinander unabhängig. Dies ist für die Berechnung von wesentlicher Bedeutung.

Zu den Belastungen gehören auch die Wärmeeinflüsse. Da das Kuppeltragwerk in der Regel durch die darüberliegende Dachhaut gegen unmittelbare Sonnenbestrahlung geschützt wird, brauchen wir nur in allen Stäben gleiche Temperaturänderungen t zu berücksichtigen. Das System der Kuppel ändert dann alle seine Maße im gleichen Verhältnis. Nur die Erdscheibe behält ihre ursprüngliche Größe. Dies ist statisch gleichbedeutend mit einer entgegengesetzten Veränderung der Erdscheibenabmessungen bei unveränderten Systemmaßen der Kuppel.

Mathematische Hilfsmittel.

Damit der Leser den späteren Entwicklungen folgen kann, werden hier zur Klarstellung des benutzten Rechnungsverfahrens, seiner Operationen und deren Symbole einige Grundbegriffe angegeben, zumal wir aus Zweckmäßigkeitsgründen in der Begriffsfestlegung einiger Rechenvorgänge von der üblichen Darstellungsweise bewußt abweichen.



Bild 3.

Wir denken uns entsprechend Bild 3 in den Teilpunkten einer Linie, die der Reihe nach mit den Ordnungszahlen 1, 2, 3 . . . i . . . bezeichnet sind, irgendwelche Rechnungswerte y_i aufgetragen. Diese sollen nach einem bestimmten Gesetz von der Ordnungszahl i abhängig sein.

Wir kennzeichnen nun die Differenz bzw. Summe der beiderseits der Teilstrecke i gelegenen y-Werte mit

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}y_i-y_{i-1}&=\Delta y_i\\ y_i+y_{i-1}&=\sigma y_i.\end{aligned}\right.$$

Die Differenzen bzw. Summen der zu beiden Seiten des Teilpunktes i liegenden, zu den Teilstrecken $i+1$ und i gehörenden Differenzen bzw. Summen Δy_i bzw. σy_i sind die Differenzen oder Summen zweiter Ordnung für Punkt i. Sie werden geschrieben:

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}\Delta y_{i+1}-\Delta y_i&=y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}=\Delta^2 y_i\\ \sigma y_{i+1}+\sigma y_i&=y_{i+1}+2y_i+y_{i-1}=\sigma^2 y_i,\end{aligned}\right.$$

oder es ist die Differenzensumme oder Summendifferenz

$$(3a)\quad \Delta y_{i+1}+\Delta y_i=\sigma y_{i+1}-\sigma y_i=y_{i+1}-y_{i-1}=\sigma\Delta y_i=\Delta\sigma y_i.$$

Für die hier in Betracht kommenden Winkelfunktionen ist mit den Kurzbezeichnungen:

$$(4a)\quad\left\{\begin{aligned}\omega_k&=2\cdot\sin\frac{k\alpha}{2}\\ \chi_k&=2\cdot\cos\frac{k\alpha}{2}\\ \omega_k\chi_k&=2\cdot\sin k\alpha.\end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad\left\{\begin{array}{ll}\Delta\cdot\sin k\alpha i=\omega_k\cdot\cos k\alpha(i-{}^1\!/_2) & \Delta\cdot\cos k\alpha i=-\omega_k\cdot\sin k\alpha(i-{}^1\!/_2)\\ \sigma\cdot\sin k\alpha i=\chi_k\cdot\sin k\alpha(i-{}^1\!/_2) & \sigma\cdot\cos k\alpha i=\chi_k\cdot\cos k\alpha(i-{}^1\!/_2)\\ \Delta^2\cdot\sin k\alpha i=-\omega_k^2\cdot\sin k\alpha i & \Delta^2\cdot\cos k\alpha i=-\omega_k^2\cdot\cos k\alpha i\\ \sigma^2\cdot\sin k\alpha i=\chi_k^2\cdot\sin k\alpha i & \sigma^2\cdot\cos k\alpha i=\chi_k^2\cdot\cos k\alpha i\\ \Delta\sigma\cdot\sin k\alpha i=\omega_k\chi_k\cdot\cos k\alpha i & \Delta\sigma\cdot\cos k\alpha i=-\omega_k\chi_k\cdot\sin k\alpha i.\end{array}\right.$$

Um die Differenzen und Summen nach den Ordnungszahlen I, II, . . . J . . . von den entsprechenden Operationen nach den Ordnungszahlen i zu unterscheiden, sollen sie einen Kennstrich erhalten, z. B.

$$\Delta' y_J=y_J-y_{J-1}.$$

Wie wir späterhin feststellen werden, betreffen die höheren Differenzen- und Summenbildungen nach den Ordnungszahlen J-Werte, welche aus mehreren Faktoren bestehen. So ist z. B.

$$\Delta'\left[a_J\sigma'\left(b_Jy_J\right)\right]=a_{J+1}\left(b_{J+1}y_{J+1}+b_Jy_J\right)-a_J\left(b_Jy_J+b_{J-1}y_{J-1}\right).$$

Wir werden noch ein weiteres Differenzen- und Summenzeichen benutzen, wenn es sich beispielsweise um Momente handelt, die unmittelbar rechts und links oder oberhalb und unterhalb eines Knotenpunktes wirken. Diese Zeichen erhalten einen Kennpunkt, z. B.

$$\Delta^{\cdot} M_i=M_i^r-M_i^l \quad\text{oder}\quad \sigma^{\cdot} M_J=M_J^o+M_J^u.$$

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir zur eigentlichen Berechnung der Rahmenkuppel über.

Die Berechnung.

Die Gleichgewichtsbedingungen.

Wir denken uns einen beliebigen Knotenpunkt Ji aus dem Kuppeltragwerk herausgeschnitten und gemäß Bild 4 und 5 die Schnittkräfte daran angebracht. Um die Übersichtlichkeit der Zeichnungen nicht zu stören, sind die an dem Knotenpunkt angreifenden Lasten bzw. Lastmomente nicht eingetragen worden. Außerdem liegen die Schnittstellen unmittelbar am Systempunkt und sind nicht, wie in den Abbildungen aus Gründen der Deutlichkeit der Darstellung, vom Knotenpunkt abgerückt.

Es lassen sich zwei Gruppen von je drei Bedingungsgleichungen aufstellen, welche sich auf die Koordinatenachsen beziehen.

Die erste Gruppe umfaßt die Kräfte.

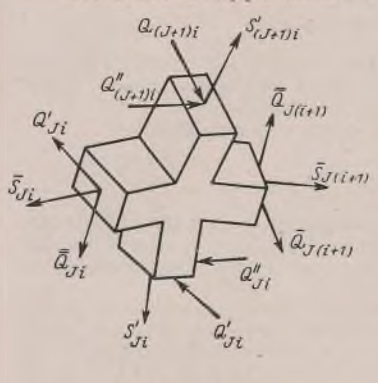


Bild 4.

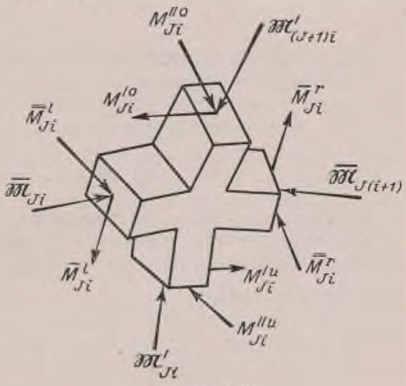


Bild 5.

Lassen wir der Einfachheit wegen die Knotenbezeichnungen fort, dann lauten die Bedingungsgleichungen dieser Gruppe:

$$(5)\quad\begin{cases} P_x - \varDelta'(S'\cdot\cos\gamma) + \varDelta'(Q'\cdot\sin\gamma) + \varDelta\bar{Q}\cdot\sin\beta - \varDelta\bar{Q}\cdot\cos\beta = 0 \\ P_y + \varDelta'(S'\cdot\sin\gamma) + \varDelta'(Q'\cdot\cos\gamma) + \sigma\bar{S}\cdot\sin\frac{\alpha}{2} + \varDelta\bar{Q}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\beta \\ \qquad + \varDelta\bar{Q}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\beta = 0 \\ P_z + \varDelta' Q'' + \varDelta\bar{S}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} - \sigma\bar{Q}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\beta - \sigma\bar{Q}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\beta = 0. \end{cases}$$

Die zweite Gruppe von Gleichgewichtsbedingungen umfaßt die Momente. Die Gleichungen dieser Gruppe lauten:

$$(6)\quad\begin{cases} M_x + \varDelta''(M''\cdot\sin\gamma) + \varDelta'(\mathfrak{M}'\cdot\cos\gamma) - \varDelta^{\cdot}\bar{M}\cdot\cos\beta - \varDelta^{\cdot}\bar{M}\cdot\sin\beta = 0 \\ M_y - \varDelta''(M''\cdot\cos\gamma) + \varDelta'(\mathfrak{M}'\cdot\sin\gamma) - \varDelta^{\cdot}\bar{M}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\beta \\ \qquad + \varDelta^{\cdot}\bar{\bar{M}}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\beta + \sigma\bar{\mathfrak{M}}\cdot\sin\frac{\alpha}{2} = 0 \\ M_z + \varDelta'' M' + \sigma^{\cdot}\bar{M}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\beta - \sigma^{\cdot}\bar{\bar{M}}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\beta \\ \qquad + \varDelta\bar{\mathfrak{M}}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} = 0. \end{cases}$$

Da alle Belastungen und Formänderungen und damit auch die Schnittkräfte von der Ordnungszahl i funktional abhängig sind, lassen sich für jede Belastungsgruppe soviele Gruppen von Bedingungsgleichungen beider Arten aufstellen, wie Ringe im Tragwerk vorhanden sind. Da wir $2n$ Lastgruppen und N Ringe haben, ist die Zahl der Bedingungsgleichungen $12\,nN$. Von diesen werden jedoch $12(n-1)N$ Gleichungen bezüglich ihrer festen Beiwerte paarweise einander gleich, weil jede Belastungsstufe mit Ausnahme der niedrigsten und höchsten aus je zwei funktional gleichwertigen Lastgruppen besteht.

Außer diesen Gleichgewichtsbedingungen stehen zur Ermittlung der statisch unbestimmten Größen noch Auflagerbedingungen zur Verfügung, in denen die Wirkung einer gelenkigen oder fest eingespannten Lagerung der Rippenfüße zum Ausdruck kommt. Sie werden später angegeben.

Die Systemverformungen und ihre Zusammenhänge.

Bei der untersten Belastungsstufe unterscheiden wir voraussetzungsgemäß zwei Arten von Verformungen des Kuppelsystems. Die eine umfaßt die Folgen der Stablängenänderungen, die andere die Wirkungen der Stabverbiegungen und -verdrehungen. Die erste Art der Verformung tritt nur unter den Lastgruppen $P_{(o)x}$, $P_{(o)y}$ und $M_{(o)z}$, die andere nur unter den Lastgruppen $P_{(o)z}$, $M_{(o)x}$ und $M_{(o)y}$ auf.

Wegen der allseitig gleichen Belastungen dieser Stufe sind die Änderungen δs der Stablängen s bei jedem Ring und die Änderung δl der Stablängen l aller Rippen bezüglich der Ordnungszahl i unveränderlich. Sie rufen eine Veränderung der Ringhalbmesser um

$$(7)\quad y_{(o)} = \frac{-\delta s}{2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}$$

hervor. Aus dem Unterschied dieser Werte der verschiedenen Ringe sowie den Änderungen der Rippenstablängen finden wir gemäß Bild 6 die Neigungsänderung der Rippenstäbe in radialem Sinne:

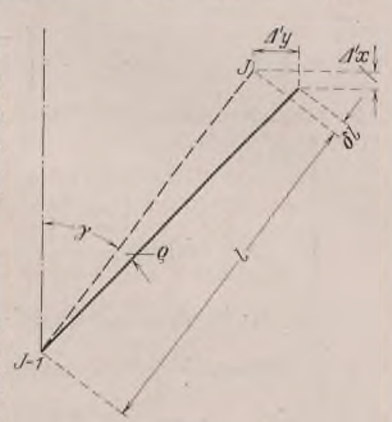


Bild 6.

$$(8)\quad \varrho_{(o)} = \frac{-1}{l\cdot\cos\gamma}\left(\frac{\varDelta'\delta s}{2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}} + \delta l\cdot\sin\gamma\right).$$

Die lotrechte Knotenpunktverschiebung $\varDelta' x_{(o)}$ hat keinerlei statische Wirkung und ist daher für uns ohne Interesse.

Die der Belastungsgruppe $P_{(o)z}$ entsprechenden Verformungen sind verzerrungsfreie Drehungen der Ringe, bei denen sich alle Knotenpunkte eines Ringes um das gleiche Maß $z_{(o)}$ verschieben. Hieraus ergeben sich die Neigungen der Rippenstäbe in tangentialer Richtung zu

$$(9)\quad \varphi_{(o)} = \frac{\varDelta' z_{(o)}}{l}$$

und eine Drehung der Ringstäbe gegen ihre ursprüngliche Lage zu

$$(10)\quad \psi_{(o)} = \frac{2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{s}\cdot z_{(o)}.$$

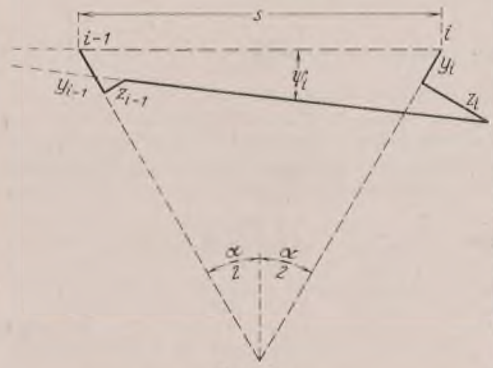


Bild 7.

Zu den vorstehenden und noch folgenden Formeln bemerken wir grundsätzlich, daß in ihnen immer nur dann die einzelnen Größen durch die Ordnungszahlen der betrachteten Teile gekennzeichnet werden, wenn es zum richtigen Verständnis und zur Vermeidung von Fehlern unbedingt notwendig ist.

Bei den Belastungen höherer Stufen lassen sich alle Formänderungen des Kuppelsystems auf die Radialverschiebungen y der Knotenpunkte zurückführen. Die Voraussetzung hierfür ist, daß

$$(11)\quad y_{(k)i} = y^{o}_{(k)}\cdot\sin k\alpha i + y_{(k)}\cdot\cos k\alpha i.$$

Nach Bild 7 besteht ganz allgemein die Beziehung

$$z_i\cdot\cos\frac{\alpha}{2} - y_i\cdot\sin\frac{\alpha}{2} = z_{i-1}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} + y_{i-1}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Diese können wir auch in der Form schreiben:

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\varDelta z_i = \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sigma y_i.$$

Bilden wir auf beiden Seiten dieser Gleichung die Differenz und beachten den funktionalen Verlauf von y, dann finden wir

$$(12)\quad z_{(k)i} = -\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\omega_k^2}\cdot\varDelta\sigma y_{(k)i}.$$

Bild 7 entnehmen wir ferner die Winkeländerung

$$\psi_i = \frac{\varDelta y_i\cdot\cos\frac{\alpha}{2} + \sigma z_i\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{s}.$$

Drücken wir hierin z_i gemäß Gl. (12) durch y_i aus und beachten, daß

$$\omega_k^2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2} - \chi_k^2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2} = \omega_k^2 - \omega_1^2,$$

dann ist

$$(13)\quad \psi_{(k)i} = \frac{\omega_k^2 - \omega_1^2}{s\,\omega_k^2\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\varDelta y_{(k)i}.$$

Diese Neigungsänderung zerlegt sich entsprechend den Neigungen der Trägheitshauptachsen der Ringstäbe in die Komponenten

$$(13\text{a})\quad\begin{cases} \bar{\psi} = \psi\cdot\cos\beta \\ \bar{\bar{\psi}} = \psi\cdot\sin\beta. \end{cases}$$

Aus Gl. (13) erkennen wir noch, daß sich bei der Belastungsstufe $k=1$ die Ringe nicht verformen, sondern sich nur gegeneinander verschieben.

Die Neigungsänderungen der Rippenstäbe ergeben sich in radialem Sinne zu

$$(14)\quad \varrho_{(k)i} = \frac{\varDelta' y_{(k)i}}{l\cdot\cos\gamma}$$

und in tangentialem Sinne zu

$$(15)\quad \varphi_{(k)i} = \frac{-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{l\,\omega_k^2}\cdot\varDelta'(\varDelta\sigma y_{(k)i}).$$

Die Folgen der radialen Neigungsänderungen der Rippenstäbe sind lotrechte Verschiebungen $\varDelta' x = \operatorname{tg}\gamma\,\varDelta' y$.

Nehmen wir an, daß die Fußpunkte der Rippen keine lotrechten Verschiebungen erleiden, dann ist für den Knotenpunkt Ji die Gesamtverschiebung:

$$(16)\quad x_{(k)Ji} = y_{(k)Ji}\cdot\operatorname{tg}\gamma_J - \sum_{1}^{J-1}\left(y_{(k)i}\,\varDelta'\cdot\operatorname{tg}\gamma\right).$$

Bezeichnen wir

$$(17\text{a})\quad\begin{cases} y^{o}_{(k)J}\cdot\operatorname{tg}\gamma_J - \sum_{1}^{J-1}\left(y^{o}_{(k)}\,\varDelta'\cdot\operatorname{tg}\gamma\right) = x^{o}_{(k)J} \text{ und} \\ y_{(k)J}\cdot\operatorname{tg}\gamma_J - \sum_{1}^{J-1}\left(y_{(k)}\,\varDelta'\cdot\operatorname{tg}\gamma\right) = x_{(k)J}, \end{cases}$$

dann können wir auch schreiben:

$$(17)\quad x_{(k)i} = x^{o}_{(k)}\cdot\sin k\alpha i + x_{(k)}\cdot\cos k\alpha i.$$

Damit ergeben sich die lotrechten Neigungen der Ringstäbe zu

$$\varkappa_{(k)i} = \frac{\Delta x_{(k)i}}{s}. \tag{18}$$

Sie zerlegen sich in die Komponenten

$$\left\{\begin{aligned} \bar{\varkappa} &= -\varkappa \cdot \sin\beta \\ \bar{\bar{\varkappa}} &= \varkappa \cdot \cos\beta. \end{aligned}\right. \tag{18a}$$

Durch Gl. (16) ist die Abhängigkeit der Winkel $\varkappa$ von den Radialverschiebungen y gegeben.

Wie zu vermuten ist und wie sich aus der weiteren Entwicklung der Berechnung als Notwendigkeit ergibt, unterstehen die Knotendrehwinkel der gleichen Gesetzmäßigkeit wie die Lastgruppen.

Wir schreiben daher:

$$\left\{\begin{aligned} \xi_{(k)i} &= \xi^o_{(k)} \cdot \cos k\alpha i - \xi_{(k)} \cdot \sin k\alpha i \\ \eta_{(k)i} &= \eta^o_{(k)} \cdot \cos k\alpha i - \eta_{(k)} \cdot \sin k\alpha i \\ \zeta_{(k)i} &= \zeta^o_{(k)} \cdot \sin k\alpha i + \zeta_{(k)} \cdot \cos k\alpha i. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Die Komponenten dieser Knotendrehwinkel in bezug auf die Neigungen der Trägheitshauptachsen der Stabquerschnitte sind:

$$\left\{\begin{array}{lll} \xi' = 0 & \eta' = 0 & \zeta' = \zeta \\ \xi'' = -\xi \cdot \sin\gamma & \eta'' = \eta \cdot \cos\gamma & \zeta'' = 0 \\ \bar{\xi} = \xi \cdot \cos\beta & \bar{\eta} = \eta \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\beta & \bar{\zeta}_{\substack{r\\l}} = \mp \zeta \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\beta \\ \bar{\bar{\xi}} = \xi \cdot \sin\beta & \bar{\bar{\eta}} = \eta \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\beta & \bar{\bar{\zeta}}_{\substack{r\\l}} = \mp \zeta \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\beta. \end{array}\right. \tag{19a}$$

Aus den Knotendrehwinkeln können wir die Stabverdrehungen ermitteln. Sie sind:

$$\left\{\begin{aligned} \vartheta' &= \Delta'\xi \cdot \cos\gamma + \Delta'\eta \cdot \sin\gamma \\ \bar{\vartheta} &= -\sigma\eta \cdot \sin\frac{\alpha}{2} + \Delta\zeta \cdot \cos\frac{\alpha}{2}. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Bei den Verformungen aus Wärmeeinflüssen berücksichtigen wir gemäß der Bemerkung im Abschnitt über die Belastungen nur die Relativverformung der Erdscheibe gegen das Kuppelsystem. Ist r_0 der Halbmesser des Fußkreises der Rippen, dann wird

$$y_{0t} = r_0 \varepsilon t \tag{21}$$

und damit

$$\varrho_{\mathrm{I}t} = \frac{-r_0 \varepsilon t}{l_{\mathrm{I}} \cdot \cos\gamma_{\mathrm{I}}}. \tag{22}$$

Der Zusammenhang zwischen den Verformungen und Kräften.

Von den drei Verformungsarten, welche bei den vorliegenden Untersuchungen in Betracht gezogen sind, ist die Längenänderung der Stäbe infolge der Stabkräfte S in ihrer Auswirkung von geringster Bedeutung. Sie sollten daher voraussetzungsgemäß nur für die unterste Laststufe berücksichtigt werden. Die Stablängenänderungen sind

$$\delta l = \frac{l S'_{(o)}}{EF'} \quad \text{bzw.} \quad \delta s = \frac{s \bar{S}_{(o)}}{EF}. \tag{23}$$

Von größerer, wenn auch nicht ausschlaggebender Bedeutung sind die Verdrehungen der Stäbe unter der Wirkung der Drehmomente. Hier bestehen die einfachen Beziehungen:

$$\mathfrak{M}' = \frac{GI'}{l} \cdot \vartheta' \quad \text{bzw.} \quad \bar{\mathfrak{M}} = \frac{G\bar{I}}{s} \cdot \bar{\vartheta}. \tag{24}$$

Den wesentlichsten Anteil an der Verformung des Kuppeltragwerks haben die Verbiegungen.

Verschieben sich zwei benachbarte Knotenpunkte $i-1$ und i ohne Drehung so gegeneinander, daß der sie verbindende Stab eine Neigungsänderung ε erfährt (Bild 8), dann entstehen rechts vom Knotenpunkt $i-1$ bzw. links vom Knoten i die Biegemomente

$$M^r_{i-1} = -\frac{6EJ}{l} \cdot \varepsilon$$

bzw.

$$M^l_i = +\frac{6EJ}{l} \cdot \varepsilon.$$

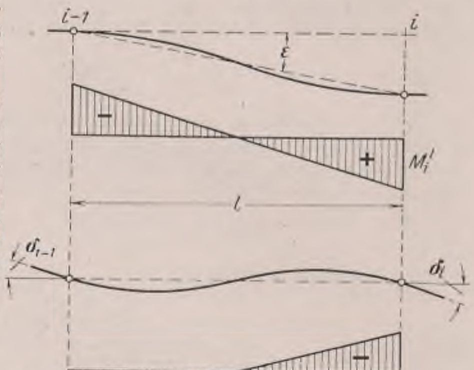


Bild 8.

Werden hingegen die Knotenpunkte um die Winkel δ_{i-1} bzw. δ_i gedreht, dann entstehen an den Stabenden die Momente

$$M^r_{i-1} = -\frac{2EJ}{l}(2\delta_{i-1} + \delta_i)$$

bzw.

$$M^l_i = -\frac{2EJ}{l}(\delta_{i-1} + 2\delta_i).$$

Im allgemeinen treten beide Verformungen gleichzeitig auf, so daß die an gleichen Stellen auftretenden Momente als Summen der Teilmomente erscheinen, z. B.

$$M^l_i = \frac{2EJ}{l}\left[3\varepsilon - (\delta_{i-1} + 2\delta_i)\right]. \tag{25}$$

Ist im besonderen der Knotenpunkt $i-1$ frei drehbar, dann ist dort $M^r_{i-1} = 0$. Dies entspricht einem Knotendrehwinkel

$$\delta_{i-1} = \frac{3\varepsilon - \delta_i}{2}.$$

Wir können demnach z. B. unter Benutzung der allgemeinen Formeln die Auflagerbedingungen an den Fußpunkten der Kuppelrippen durch entsprechend gewählte Fußdrehwinkel berücksichtigen.

Bei gelenkigem Knotenpunkt $i-1$ ergibt sich das Moment

$$M^l_i = \frac{3EJ}{l}(\varepsilon - \delta_i). \tag{25a}$$

Unter Benutzung der vorstehend entwickelten Zusammenhänge ergeben sich für die unterste Laststufe, und zwar zunächst für die Wirkung der Lastengruppen $P_{(o)x}$, $P_{(o)y}$ und $M_{(o)z}$ die Momente in den Rippenstäben:

$$\left\{\begin{aligned} M'^o_{J-1} &= \frac{2J'_J}{l_J}\left\{\frac{3}{\cos\gamma_J}\left[\frac{S'_{(o)} \cdot \sin\gamma_J}{F'_J} + \frac{1}{2l_J \cdot \sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \Delta'\left(\frac{\bar{S}_{(o)} s_J}{\bar{F}_J}\right)\right] - E\left(\zeta_{(o)J} + 2\zeta_{(o)J-1}\right)\right\} \\ M'^u_J &= \frac{2J'_J}{l_J}\left\{\frac{-3}{\cos\gamma_J}\left[\frac{S'_{(o)} \cdot \sin\gamma_J}{F'_J} + \frac{1}{2l_J \cdot \sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \Delta'\left(\frac{\bar{S}_{(o)} s_J}{\bar{F}_J}\right)\right] + E\left(2\zeta_{(o)J} + \zeta_{(o)J-1}\right)\right\} \\ Q'_{(o)J} &= \frac{6J'_J}{l_J^2}\left\{\frac{-2}{\cos\gamma_J}\left[\frac{S'_{(o)} \cdot \sin\gamma_J}{F'_J} + \frac{1}{2l_J \cdot \sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \Delta'\left(\frac{\bar{S}_{(o)} s_J}{\bar{F}_J}\right)\right] + E\sigma'\zeta_{(o)J}\right\}. \end{aligned}\right. \tag{26}$$

oder bei gelenkiger Lagerung der Fußpunkte:

$$\left\{\begin{aligned} M'^u_{\mathrm{I}} &= \frac{3J'_{\mathrm{I}}}{l_{\mathrm{I}}}\left\{\frac{-1}{\cos\gamma_{\mathrm{I}}}\left[\frac{S'_{(o)} \cdot \sin\gamma_J}{F'_{\mathrm{I}}} + \frac{\bar{S}_{(o)} s_{\mathrm{I}}}{2l_{\mathrm{I}} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \bar{F}_{\mathrm{I}}}\right] + E\zeta_{(o)\mathrm{I}}\right\} \\ Q'_{\mathrm{I}} &= \frac{M'^u_{\mathrm{I}}}{l_{\mathrm{I}}}. \end{aligned}\right. \tag{26a}$$

Die Momente in den Ringstäben sind bei dieser Belastungsart von unveränderlicher Größe.

$$\left\{\begin{aligned} \bar{M}_{(o)J} &= -\frac{2E\bar{J}_J}{s_J} \cdot \zeta_{(o)J} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\beta \\ \bar{\bar{M}}_{(o)J} &= \frac{2E\bar{\bar{J}}_J}{s_J} \cdot \zeta_{(o)J} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\beta \\ \bar{Q}_{(o)} &= \bar{\bar{Q}}_{(o)} = 0. \end{aligned}\right. \tag{27}$$

Unter der Wirkung der Lastengruppen $P_{(o)z}$, $M_{(o)x}$ und $M_{(o)y}$ treten außer den Verformungen $\varphi_{(o)}$ und $\psi_{(o)}$ nur noch die Knotendrehwinkel $\xi_{(o)}$ und $\eta_{(o)}$ auf. Es werden dann in den Rippenstäben:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{M}'_{(o)} &= \frac{GI'_J}{l_J}\left(\Delta'\xi_{(o)} \cdot \cos\gamma_J + \Delta'\eta_{(o)} \cdot \sin\gamma_J\right) \\ M''^o_{(o)J-1} &= \frac{2EJ''_J}{l_J}\left[\frac{-3}{l_J} \cdot \Delta' z_{(o)} - \left(\xi_{(o)J} + 2\xi_{(o)J-1}\right)\sin\gamma_J + \left(\eta_{(o)J} + 2\eta_{(o)J-1}\right)\cos\gamma_J\right] \\ M''^u_{(o)J} &= \frac{2EJ''_J}{l_J}\left[\frac{3}{l_J} \cdot \Delta' z_{(o)} + \left(2\xi_{(o)J} + \xi_{(o)J-1}\right)\sin\gamma_J - \left(2\eta_{(o)J} + \eta_{(o)J-1}\right)\cos\gamma_J\right] \\ Q''_{(o)J} &= \frac{6EJ''}{l_J^2}\left[\frac{2}{l_J} \cdot \Delta' z_{(o)} + \sigma'\xi_{(o)J} \cdot \sin\gamma_J - \sigma'\eta_{(o)J} \cdot \cos\gamma_J\right]. \end{aligned}\right. \tag{28}$$

Im Falle einer gelenkigen Fußlagerung wird

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{M}'_{(o)\mathrm{I}} &= 0 \\ M''^u_{(o)\mathrm{I}} &= \frac{3EJ''_{\mathrm{I}}}{l_{\mathrm{I}}}\left[\frac{z_{(o)\mathrm{I}}}{l_{\mathrm{I}}} + \xi_{(o)\mathrm{I}} \cdot \sin\gamma_{\mathrm{I}} - \eta_{(o)\mathrm{I}} \cdot \cos\gamma_{\mathrm{I}}\right] \\ Q''_{(o)\mathrm{I}} &= \frac{M''^u_{\mathrm{I}}}{l_{\mathrm{I}}}. \end{aligned}\right. \tag{28a}$$

Für die Ringstäbe ergeben sich:

$$\left\{\begin{aligned} \bar{\mathfrak{M}}_{(o)} &= -\frac{2G\bar{I}}{s} \cdot \eta_{(o)} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \\ \bar{M}^l_{(o)i} &= -\bar{M}^r_{(o)i-1} = \frac{6E\bar{J}}{s} \cdot \left[\frac{2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\beta}{s} \cdot z_{(o)} - \xi_{(o)} \cdot \cos\beta - \eta_{(o)} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\beta\right] \\ \bar{Q}_{(o)} &= \frac{2\bar{M}^l_{(o)i}}{s} \end{aligned}\right. \tag{29}$$

Noch (29)

$$\left\{\begin{aligned} \overline{\overline{M}}{}^{l}_{(o)i} &= -\overline{\overline{M}}{}^{r}_{(o)i-1} = \frac{6E\overline{\overline{J}}}{s} \\ &\cdot\left[\frac{2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\beta}{s}\cdot z_{(o)} - \xi_{(o)}\cdot\sin\beta + \eta_{(o)}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\beta\right] \\ \overline{\overline{Q}}_{(o)} &= \frac{2\,\overline{\overline{M}}{}^{l}_{(o)i}}{s}. \end{aligned}\right.$$

Bei den höheren Belastungsstufen treten sämtliche Kräfte und Verformungen genau wie die Lastgruppen paarweise, d. h. in je zwei Teilen auf, welche sich bei genau gleichen Abhängigkeitsverhältnissen der Veränderlichen nur durch deren Größe und durch die gegenseitige funktionale Verschiebung um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ unterscheiden. Es genügt daher, die formale Entwicklung der Berechnungsgleichungen nur für den jeweils ersten Teil der Größen durchzuführen. Der zweite Teil kann dann durch Austausch der Veränderlichen und durch Ersatz der Funktion $\sin k\alpha i$ durch $\cos k\alpha i$ bzw. $\cos k\alpha i$ durch $-\sin k\alpha i$ sofort angeschrieben werden.

Für die Rippenstäbe finden wir:

(30)

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{M}'_{(k)i} &= \frac{GI'_J}{l_J}\left(\Delta'\xi^o_{(k)}\cdot\cos\gamma + \Delta'\eta^o_{(k)}\cdot\sin\gamma\right)\cos k\alpha i \\ M'^{o}_{(k)J-1} &= \frac{2EJ'_J}{l_J}\left[\frac{-3\Delta' y^o_{(k)J}}{l_J\cdot\cos\gamma_J} - \left(\zeta^o_{(k)J} + 2\zeta^o_{(k)J-1}\right)\right]\sin k\alpha i \\ M'^{u}_{(k)J} &= \frac{2EJ'_J}{l_J}\left[\frac{3\Delta' y^o_{(k)J}}{l_J\cdot\cos\gamma_J} + \left(2\zeta^o_{(k)J} + \zeta^o_{(k)J-1}\right)\right]\sin k\alpha i \\ Q'_{(k)} &= \frac{6EJ'_J}{l^2}\left[\frac{2\Delta' y^o_{(k)J}}{l_J\cdot\cos\gamma_J} + \sigma'\zeta^o_{(k)}\right]\sin k\alpha i \\ M''^{o}_{(k)J-1} &= \frac{2EJ''_J}{l_J}\left\{\frac{3\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{l}\cdot\frac{\chi_k}{\omega_k}\cdot\Delta' y^o_{(k)}\right. \\ &\left.-\left(\xi^o_{(k)J} + 2\xi^o_{(k)J-1}\right)\sin\gamma + \left(\eta^o_{(k)J} + 2\eta^o_{(k)J-1}\right)\cos\gamma\right\}\cos k\alpha i \\ M''^{u}_{(k)J} &= \frac{2EJ''_J}{l_J}\left\{\frac{-3\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{l}\cdot\frac{\chi_k}{\omega_k}\cdot\Delta' y^o_{(k)}\right. \\ &\left.+\left(2\xi^o_{(k)J} + \xi^o_{(k)J-1}\right)\sin\gamma - \left(2\eta^o_{(k)} + \eta^o_{(k)J-1}\right)\cos\gamma\right\}\cos k\alpha i \\ Q''_{(k)} &= \frac{6EJ''}{l^2}\left\{\frac{-2\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{l}\cdot\frac{\chi_k}{\omega_k}\cdot\Delta' y^o_{(k)}\right. \\ &\left.+\sigma'\xi^o_{(k)}\cdot\sin\gamma - \sigma'\eta^o_{(k)}\cdot\cos\gamma\right\}\cos k\alpha i. \end{aligned}\right.$$

Bei gelenkiger Lagerung der Rippenfüße erhalten wir die Sonderwerte:

(30a)

$$\left\{\begin{aligned} &\mathfrak{M}'_{(k)\mathrm{I}} = 0 \qquad Q'_{(k)\mathrm{I}} = \frac{M'^{u}_{(k)\mathrm{I}}}{l_{\mathrm{I}}} \qquad Q''_{(k)\mathrm{I}} = \frac{M''^{u}_{(k)\mathrm{I}}}{l_{\mathrm{I}}} \\ &M'^{u}_{(k)\mathrm{I}} = \frac{3EJ'_{\mathrm{I}}}{l_{\mathrm{I}}}\left[\frac{y^o_{(k)\mathrm{I}}}{l_{\mathrm{I}}\cdot\cos\gamma_{\mathrm{I}}} + \zeta^o_{(k)\mathrm{I}}\right]\sin k\alpha i \\ &M''^{u}_{(k)\mathrm{I}} = \frac{3EJ''_{\mathrm{I}}}{l_{\mathrm{I}}}\left[\frac{-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{l}\cdot\frac{\chi_k}{\omega_k}\cdot y^o_{(k)\mathrm{I}}\right. \\ &\left.\qquad + \xi^o_{(k)\mathrm{I}}\cdot\sin\gamma_{\mathrm{I}} - \eta^o_{(k)\mathrm{I}}\cdot\cos\gamma_{\mathrm{I}}\right]\cos k\alpha i. \end{aligned}\right.$$

Bei den Ringstäben wird mit den Kurzbezeichnungen:

(31)

$$\left\{\begin{aligned} \overline{Y}_{(k)} &= \left(\frac{\omega_k^2 - \omega_1^2}{\omega_k^2\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\cos\beta + \operatorname{tg}\gamma\cdot\sin\beta\right)y_{(k)J} - \sin\beta\sum_{\mathrm{I}}^{J-1} y_{(k)}\Delta'\cdot\operatorname{tg}\gamma \\ \overline{\overline{Y}}_{(k)} &= \left(\frac{\omega_k^2 - \omega_1^2}{\omega_k^2\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\sin\beta - \operatorname{tg}\gamma\cdot\cos\beta\right)y_{(k)J} + \cos\beta\sum_{\mathrm{I}}^{J-1} y_{(k)}\Delta'\cdot\operatorname{tg}\gamma. \end{aligned}\right.$$

(32)

$$\left\{\begin{aligned} \overline{\mathfrak{M}}_i &= \frac{G\overline{I}}{s}\left[-\chi_k\eta_k^o\cdot\sin\frac{\alpha}{2} + \omega_k\zeta^o_{(k)}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right]\cos k\alpha\left(i-{}^1/_2\right) \\ \overline{M}{}^{r}_{(k)i-1} &= \frac{2E\overline{J}}{s}\left[-3\overline{Y}_{(k)i} + \left(\xi_{(k)i} + 2\xi_{(k)i-1}\right)\cos\beta\right. \\ &\left.+\left(\eta_{(k)i} + 2\eta_{(k)i-1}\right)\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\beta + \left(\zeta_{(k)i} - 2\zeta_{(k)i-1}\right)\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\beta\right] \\ \overline{M}{}^{l}_{(k)i} &= \frac{2E\overline{J}}{s}\left[3\overline{Y}_{(k)i} - \left(2\xi_{(k)i} + \xi_{(k)i-1}\right)\cos\beta\right. \\ &\left.-\left(2\eta_{(k)i} + \eta_{(k)i-1}\right)\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\beta - \left(2\zeta_{(k)i} - \zeta_{(k)i-1}\right)\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\beta\right] \\ \overline{Q}_{(k)i} &= \frac{6E\overline{J}}{s^2}\left[\frac{2\omega_k}{s}\cdot\overline{Y}{}^o_{(k)} - \chi_k\left(\xi^o_{(k)}\cdot\cos\beta + \eta^o_{(k)}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\beta\right)\right. \\ &\left.-\omega_k\zeta^o_{(k)}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\beta\right]\cos k\alpha\left(i-{}^1/_2\right) \end{aligned}\right.$$

Noch (32)

$$\left\{\begin{aligned} \overline{\overline{M}}{}^{r}_{(k)i-1} &= \frac{2E\overline{\overline{J}}}{s}\left[-3\overline{\overline{Y}}_{(k)i} + \left(\xi_{(k)i} + 2\xi_{(k)i-1}\right)\sin\beta\right. \\ &\left.-\left(\eta_{(k)i} + 2\eta_{(k)i-1}\right)\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\beta - \left(\zeta_{(k)i} - 2\zeta_{(k)i-1}\right)\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\beta\right] \\ \overline{\overline{M}}{}^{l}_{(k)i} &= \frac{2E\overline{\overline{J}}}{s}\left[3\overline{\overline{Y}}_{(k)i} - \left(2\xi_{(k)i} + \xi_{(k)i-1}\right)\sin\beta\right. \\ &\left.+\left(2\eta_{(k)i} + \eta_{(k)i-1}\right)\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\beta + \left(2\zeta_{(k)i} - \zeta_{(k)i-1}\right)\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\beta\right] \\ \overline{\overline{Q}}_{(k)i} &= \frac{6E\overline{\overline{J}}}{s^2}\left[\frac{2\omega_k}{s}\cdot\overline{\overline{Y}}{}^o_{(k)} - \chi_k\left(\xi^o_{(k)}\cdot\sin\beta - \eta^o_{(k)}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\beta\right)\right. \\ &\left.+\omega_k\zeta^o_{(k)}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\beta\right]\cos k\alpha\left(i-{}^1/_2\right). \end{aligned}\right.$$

Wir haben hier die Biegemomente in der unentwickelten Form angeschrieben, weil ihre vollständige Form wenig geeignet ist. Statt dessen werden wir nachstehend die Momentendifferenzen und -summen angeben, wie sie in den Gleichgewichtsbedingungen erscheinen:

(32a)

$$\left\{\begin{aligned} \Delta^{\cdot}\overline{M}_{(k)i} &= \frac{2E\overline{J}}{s}\left[\frac{-3\omega_k\chi_k}{s}\cdot\overline{Y}{}^o_{(k)} + \left(6-\omega_k^2\right)\left(\xi^o_{(k)}\cdot\cos\beta\right.\right. \\ &\left.\left.+\eta^o_{(k)}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\beta\right) + \omega_k\chi_k\zeta^o_{(k)}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\beta\right]\cos k\alpha i \\ \sigma^{\cdot}\overline{M}_{(k)i} &= \frac{2E\overline{J}}{s}\left[\frac{3\omega_k^2}{s}\cdot\overline{Y}{}^o_{(k)} - \omega_k\chi_k\left(\xi^o_{(k)}\cdot\cos\beta\right.\right. \\ &\left.\left.+\eta^o_{(k)}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\beta\right) - \left(6-\chi_k^2\right)\zeta^o_{(k)}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\beta\right]\sin k\alpha i \\ \Delta^{\cdot}\overline{\overline{M}}_{(k)i} &= \frac{2E\overline{\overline{J}}}{s}\left[\frac{-3\omega_k\chi_k}{s}\cdot\overline{\overline{Y}}{}^o_{(k)} + \left(6-\omega_k^2\right)\left(\xi^o_{(k)}\cdot\sin\beta\right.\right. \\ &\left.\left.-\eta^o_{(k)}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\beta\right) - \omega_k\chi_k\zeta^o_{(k)}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\beta\right]\cos k\alpha i \\ \sigma^{\cdot}\overline{\overline{M}}_{(k)i} &= \frac{2E\overline{\overline{J}}}{s}\left[\frac{3\omega_k^2}{s}\cdot\overline{\overline{Y}}{}^o_{(k)} - \omega_k\chi_k\left(\xi^o_{(k)}\cdot\sin\beta\right.\right. \\ &\left.\left.-\eta^o_{(k)}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\beta\right) + \left(6-\chi_k^2\right)\zeta^o_{(k)}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\beta\right]\sin k\alpha i. \end{aligned}\right.$$

Die Stabkräfte S' und $\overline{S}$ können wir nicht in Beziehung zu den Systemverformungen setzen, weil sie rein statisch bedingt sind. Wir kennen von ihnen lediglich ihren funktionalen Verlauf. Er ist

(33)

$$\left\{\begin{aligned} S'_{(k)i} &= S^{o\prime}_{(k)}\cdot\sin k\alpha i + S'_{(k)}\cdot\cos k\alpha i \\ \overline{S}_{(k)i} &= \overline{S}{}^o_{(k)}\cdot\sin k\alpha\left(i-{}^1/_2\right) + \overline{S}_{(k)}\cdot\cos k\alpha\left(i-{}^1/_2\right). \end{aligned}\right.$$

Als Unbekannte verbleiben uns S', $\overline{S}$, y (bzw. z_o), ξ, η und ζ. Ihre Zahl ist gleich der Zahl der Gleichgewichtsbedingungen.

Die Ermittlung der Unbekannten.

Um die Unbekannten zu berechnen, setzen wir die im vorhergehenden Abschnitt ermittelten Kräfte und Momente in die Gleichgewichtsbedingungen Gl. (5) u. (6) ein.

Bei der untersten Belastungsstufe werden wir wieder die Lastgruppen in zwei ähnlich wirkende Teile zerlegen. Wirken nur die Lastengruppen $P_{(o)x}$, $P_{(o)y}$ und $M_{(o)z}$, dann fallen in den Gleichgewichtsbedingungen zahlreiche Glieder fort, und es bleiben von den sechs Gleichungen nur die drei nachstehenden übrig:

$$P_{(o)x} - \Delta'\left(S'_{(o)}\cdot\cos\gamma\right) + \Delta'\left(Q'_{(o)}\cdot\sin\gamma\right) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; = 0$$

$$P_{(o)y} + \Delta'\left(S'_{(o)}\cdot\sin\gamma\right) + \Delta'\left(Q'_{(o)}\cdot\cos\gamma\right) + \overline{S}_{(o)}\cdot 2\cdot\sin\frac{\alpha}{2} \;.\;.\; = 0$$

$$M_{(o)z} + \Delta'^{\cdot} M'_{(o)} + 2\,\overline{M}_{(o)}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\beta - 2\,\overline{\overline{M}}_{(o)}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\beta = 0.$$

Setzen wir in diese Gleichungen die Werte der Momente und Querkräfte entsprechend Gl. (26) u. (26a) ein, dann wird aus ihnen:

(34)

$$\left\{\begin{aligned} &P_{(o)x} - \left[\mathfrak{a}_{J+1}S'_{(o)J+1} - \mathfrak{a}_J S'_{(o)J}\right]\frac{-6}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left[\mathfrak{b}_{J+1}\overline{S}_{(o)J+1} - \mathfrak{b}_J\overline{S}_{(o)J}\right. \\ &\left.+\mathfrak{b}_{J-1}\overline{S}_{(o)J-1}\right] + 6E\left[\mathfrak{c}_{J+1}\zeta_{(o)J+1} + \mathfrak{c}_J\zeta_{(o)J} - \mathfrak{c}_{J-1}\zeta_{(o)J-1}\right] = 0 \\ &P_{(o)y} + \left[\mathfrak{a}'_{J+1}S'_{(o)J+1} - \mathfrak{a}'_J S'_{(o)J}\right]\frac{-6}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left[\mathfrak{b}'_{J+1}\overline{S}_{(o)J+1} - \mathfrak{b}'_J\overline{S}_{(o)J}\right. \\ &\left.+\mathfrak{b}'_{J-1}\overline{S}_{(o)J-1}\right] + 6E\left[\mathfrak{c}'_{J+1}\zeta_{(o)J+1} + \mathfrak{c}'_J\zeta_{(o)J} - \mathfrak{c}'_{J-1}\zeta_{(o)J-1}\right] = 0 \\ &M_{(o)z} + \left[\mathfrak{a}''_{J+1}S'_{(o)J+1} - \mathfrak{a}''_J S'_{(o)J}\right]\frac{+3}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left[\mathfrak{b}''_{J+1}\overline{S}_{(o)J+1} - \mathfrak{b}''_J\overline{S}_{(o)J}\right. \\ &\left.-\mathfrak{b}''_{J-1}\overline{S}_{(o)J-1}\right] - 2E\left[\mathfrak{c}''_{J+1}\zeta_{(o)J+1} + 2\mathfrak{c}''_J\zeta_{(o)J} + \mathfrak{c}''_{J-1}\zeta_{(o)J-1}\right] = 0. \end{aligned}\right.$$

In diesen Gleichungen bedeuten:

$$(34\mathrm{a})\quad\left\{\begin{aligned}
&\mathfrak{a}_{J+1}=\cos\gamma_{J+1}\left(1+\frac{12\,J'_{J+1}\cdot\operatorname{tg}^2\gamma_{J+1}}{F'_{J+1}\,l^2_{J+1}}\right)\\
&\mathfrak{a}'_{J+1}=\sin\gamma_{J+1}\left(1-\frac{12\,J'_{J+1}}{F'_{J+1}\,l^2_{J+1}}\right)\qquad \mathfrak{a}''_{J+1}=\frac{J'_{J+1}\cdot\operatorname{tg}\gamma_{J+1}}{F'_{J+1}\,l_{J+1}}\\
&\mathfrak{a}_J=\cos\gamma_J\left(1+\frac{12\,J_J'\cdot\operatorname{tg}^2\gamma_J}{F_J'\,l_J^2}\right)\\
&\mathfrak{a}_J'=\sin\gamma_J\left(1-\frac{12\,J_J'}{F_J'\,l_J^2}\right)\qquad \mathfrak{a}_J''=\frac{J_J'\cdot\operatorname{tg}\gamma_J}{F_J'\,l_J}\\
&\mathfrak{b}_{J+1}=\frac{J'_{J+1}\cdot\operatorname{tg}\gamma_{J+1}}{l^3_{J+1}}\cdot\frac{s_{J+1}}{F_{J+1}}\qquad \mathfrak{b}_{J-1}=\frac{J_J'\cdot\operatorname{tg}\gamma_J}{l_J^3}\cdot\frac{s_{J-1}}{F_{J-1}}\\
&\mathfrak{b}'_{J+1}=\frac{J'_{J+1}}{l^3_{J+1}}\cdot\frac{s_{J+1}}{F_{J+1}}\qquad \mathfrak{b}'_{J-1}=\frac{J_J'}{l_J^3}\cdot\frac{s_{J-1}}{F_{J-1}}\\
&\mathfrak{b}''_{J+1}=\frac{J'_{J+1}}{l^2_{J+1}\cdot\cos\gamma_{J+1}}\cdot\frac{s_{J+1}}{F_{J+1}}\qquad \mathfrak{b}''_{J-1}=\frac{J_J'}{l_J^2\cdot\cos\gamma_J}\cdot\frac{s_{J-1}}{F_{J-1}}\\
&\mathfrak{b}_J=\left(\frac{J'_{J+1}\cdot\operatorname{tg}\gamma_{J+1}}{l^3_{J+1}}+\frac{J_J'\cdot\operatorname{tg}\gamma_J}{l_J^3}\right)\frac{s_J}{F_J}\\
&\mathfrak{b}_J'=\left(\frac{J'_{J+1}}{l^3_{J+1}}+\frac{J_J'}{l_J^3}\right)\frac{s_J}{F_J}+\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}\\
&\mathfrak{b}_J''=\left(\frac{J'_{J+1}}{l^2_{J+1}\cdot\cos\gamma_{J+1}}-\frac{J_J'}{l_J^2\cdot\cos\gamma_J}\right)\frac{s_J}{F_J}\\
&\mathfrak{c}_{J+1}=\frac{J'_{J+1}\cdot\sin\gamma_{J+1}}{l^2_{J+1}}\qquad \mathfrak{c}_{J-1}=\frac{J_J'\cdot\sin\gamma_J}{l_J^2}\\
&\mathfrak{c}'_{J+1}=\frac{J'_{J+1}\cdot\cos\gamma_{J+1}}{l^2_{J+1}}\qquad \mathfrak{c}'_{J-1}=\frac{J_J'\cdot\cos\gamma_J}{l_J^2}\\
&\mathfrak{c}''_{J+1}=\frac{J'_{J+1}}{l_{J+1}}\qquad \mathfrak{c}''_{J-1}=\frac{J_J'}{l_J}\\
&\mathfrak{c}_J=\left(\frac{J'_{J+1}\cdot\sin\gamma_{J+1}}{l^2_{J+1}}-\frac{J_J'\cdot\sin\gamma_J}{l_J^2}\right)\\
&\mathfrak{c}_J'=\left(\frac{J'_{J+1}\cdot\cos\gamma_{J+1}}{l^2_{J+1}}-\frac{J_J'\cdot\cos\gamma_J}{l_J^2}\right)\\
&\mathfrak{c}_J''=\left[\frac{J'_{J+1}}{l_{J+1}}+\frac{J_J'}{l_J}+\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{s}\cdot J_w\right].
\end{aligned}\right.$$

In $\mathfrak{c}_J''$ erscheint ein Trägheitsmoment J_w; die Bedeutung desselben sowie die Bedeutung der in den noch folgenden Formeln auftretenden Größen J_v und J_{vw} ist durch die Beziehung gegeben:

$$(35)\quad\left\{\begin{aligned}
J_v&=\bar{J}\cdot\cos^2\beta+\bar{\bar{J}}\cdot\sin^2\beta\\
J_w&=\bar{J}\cdot\sin^2\beta+\bar{\bar{J}}\cdot\cos^2\beta\\
J_{vw}&=(\bar{\bar{J}}-\bar{J})\,\frac{\sin 2\beta}{2}.
\end{aligned}\right.$$

Es sind J_v und J_w die Trägheitsmomente und J_{vw} das Zentrifugalmoment des Ringstabquerschnitts in bezug auf die lotrechte und waagerechte Achse.

Wir können für jeden Ring eine Gleichungsgruppe (34) aufstellen. Da die Rippen am obersten Ring enden, fallen in den Gleichungen für diesen Ring alle mit dem Index $J+1$ behafteten Glieder fort. Für den untersten Ring sind die Gleichungen je nach Art der Auflagerung der Rippenfüße verschieden. Bei fester Einspannung fallen alle Glieder mit dem Index $J-1$ fort. Ist dagegen die Auflagerung gelenkig, dann ändern sich außerdem die Festwerte der Gleichungen und lauten:

$$(34\mathrm{b})\quad\left\{\begin{aligned}
&\mathfrak{a}_{\mathrm{II}}=\cos\gamma_{\mathrm{II}}\left(1+\frac{12\,J_{\mathrm{II}}'\cdot\operatorname{tg}^2\gamma_{\mathrm{II}}}{F_{\mathrm{II}}'\,l_{\mathrm{II}}^2}\right)\qquad \mathfrak{a}_{\mathrm{I}}=\cos\gamma_{\mathrm{I}}\left(1+\frac{3\,J_{\mathrm{I}}'\cdot\operatorname{tg}^2\gamma_{\mathrm{I}}}{F_{\mathrm{I}}'\,l_{\mathrm{I}}^2}\right)\\
&\mathfrak{a}_{\mathrm{II}}'=\sin\gamma_{\mathrm{II}}\left(1-\frac{12\,J_{\mathrm{II}}'}{F_{\mathrm{II}}'\,l_{\mathrm{II}}^2}\right)\qquad \mathfrak{a}_{\mathrm{I}}'=\sin\gamma_{\mathrm{I}}\left(1-\frac{3\,J_{\mathrm{I}}'}{F_{\mathrm{I}}'\,l_{\mathrm{I}}^2}\right)\\
&\mathfrak{a}_{\mathrm{II}}''=\frac{J_{\mathrm{II}}'\cdot\operatorname{tg}\gamma_{\mathrm{II}}}{F_{\mathrm{II}}'\,l_{\mathrm{II}}}\qquad \mathfrak{a}_{\mathrm{I}}''=\frac{J_{\mathrm{I}}'\cdot\operatorname{tg}\gamma_{\mathrm{I}}}{F_{\mathrm{I}}'\,l_{\mathrm{I}}}
\end{aligned}\right.$$

$$\text{Noch }(34\mathrm{b})\quad\left\{\begin{aligned}
&\mathfrak{b}_{\mathrm{II}}=\frac{J_{\mathrm{II}}'\cdot\operatorname{tg}\gamma_{\mathrm{II}}}{l_{\mathrm{II}}^3}\cdot\frac{s_{\mathrm{II}}}{F_{\mathrm{II}}}\qquad \mathfrak{b}_{\mathrm{I}}=\left(\frac{J_{\mathrm{II}}'\cdot\operatorname{tg}\gamma_{\mathrm{II}}}{l_{\mathrm{II}}^3}+\frac{J_{\mathrm{I}}'\cdot\operatorname{tg}\gamma_{\mathrm{I}}}{4\,l_{\mathrm{I}}^3}\right)\frac{s_{\mathrm{I}}}{F_{\mathrm{I}}}\\
&\mathfrak{b}_{\mathrm{II}}'=\frac{J_{\mathrm{II}}'}{l_{\mathrm{II}}^3}\cdot\frac{s_{\mathrm{II}}}{F_{\mathrm{II}}}\qquad \mathfrak{b}_{\mathrm{I}}'=\left(\frac{J_{\mathrm{II}}'}{l_{\mathrm{II}}^3}+\frac{J_{\mathrm{I}}'}{4\,l_{\mathrm{I}}^3}\right)\frac{s_{\mathrm{I}}}{F_{\mathrm{I}}}+\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}\\
&\mathfrak{b}_{\mathrm{II}}''=\frac{J_{\mathrm{II}}'}{l_{\mathrm{II}}^2\cdot\cos\gamma_{\mathrm{II}}}\cdot\frac{s_{\mathrm{II}}}{F_{\mathrm{II}}}\qquad \mathfrak{b}_{\mathrm{I}}''=\left(\frac{J_{\mathrm{II}}'}{l_{\mathrm{II}}^2\cdot\cos\gamma_{\mathrm{II}}}-\frac{J_{\mathrm{I}}'}{2\,l_{\mathrm{I}}^2\cdot\cos\gamma_{\mathrm{I}}}\right)\frac{s_{\mathrm{I}}}{F_{\mathrm{I}}}\\
&\mathfrak{c}_{\mathrm{II}}=\frac{J_{\mathrm{II}}'\cdot\sin\gamma_{\mathrm{II}}}{l_{\mathrm{II}}^2}\qquad \mathfrak{c}_{\mathrm{I}}=\left(\frac{J_{\mathrm{II}}'\cdot\sin\gamma_{\mathrm{II}}}{l_{\mathrm{II}}^2}-\frac{J_{\mathrm{I}}'\cdot\sin\gamma_{\mathrm{I}}}{2\,l_{\mathrm{I}}^2}\right)\\
&\mathfrak{c}_{\mathrm{II}}'=\frac{J_{\mathrm{II}}'\cdot\cos\gamma_{\mathrm{II}}}{l_{\mathrm{II}}^2}\qquad \mathfrak{c}_{\mathrm{I}}'=\left(\frac{J_{\mathrm{II}}'\cdot\cos\gamma_{\mathrm{II}}}{l_{\mathrm{II}}^2}-\frac{J_{\mathrm{I}}'\cdot\cos\gamma_{\mathrm{I}}}{2\,l_{\mathrm{I}}^2}\right)\\
&\mathfrak{c}_{\mathrm{II}}''=\frac{J_{\mathrm{II}}'}{l_{\mathrm{II}}}\qquad \mathfrak{c}_{\mathrm{I}}''=\left(\frac{J_{\mathrm{II}}'}{l_{\mathrm{II}}}+\frac{3\,J_{\mathrm{I}}'}{4\,l_{\mathrm{I}}}+\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{s_{\mathrm{I}}}\cdot J_w\right).
\end{aligned}\right.$$

Zu den Belastungen der hier betrachteten Gruppe gehören auch die Wärmeeinflüsse. Wir benutzen zu ihrer Berechnung Gl. (34), (34a) u. (34b) und setzen in ihnen mit Ausnahme der Gleichungen für den untersten Ring die Lastgrößen $P_{(o)x}=0$, $P_{(o)y}=0$ und $M_{(o)z}=0$. In die Gleichungen für den untersten Ring als Belastungen bei eingespannten Kuppelfüßen:

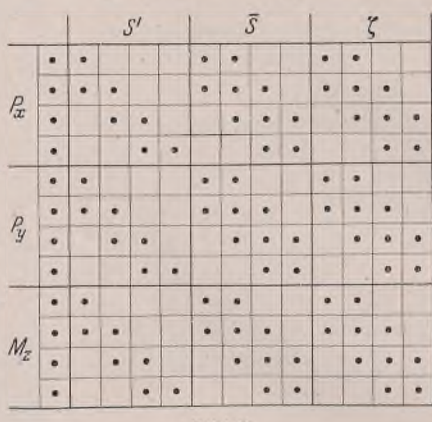


Bild 9.

$$(36)\quad\left\{\begin{aligned}
P_{(o)x}&=\frac{12\,E J_{\mathrm{I}}'}{l_{\mathrm{I}}^2}\cdot\operatorname{tg}\gamma_{\mathrm{I}}\,r_0\,\varepsilon\,t\\
P_{(o)y}&=\frac{12\,E J_{\mathrm{I}}'}{l_{\mathrm{I}}^2}\cdot r_0\,\varepsilon\,t\\
M_{(o)z}&=\frac{6\,E J_{\mathrm{I}}'}{l_{\mathrm{I}}\cdot\cos\gamma_{\mathrm{I}}}\cdot r_0\,\varepsilon\,t
\end{aligned}\right.$$

und bei gelenkig gelagerter Kuppel:

$$(36\mathrm{a})\quad\left\{\begin{aligned}
P_{(o)x}&=\frac{3\,E J_{\mathrm{I}}'}{l_{\mathrm{I}}^2}\cdot\operatorname{tg}\gamma_{\mathrm{I}}\,r_0\,\varepsilon\,t\\
P_{(o)y}&=\frac{3\,E J_{\mathrm{I}}'}{l_{\mathrm{I}}^2}\cdot r_0\,\varepsilon\,t\\
M_{(o)z}&=\frac{3\,E J_{\mathrm{I}}'}{l_{\mathrm{I}}\cdot\cos\gamma_{\mathrm{I}}}\cdot r_0\,\varepsilon\,t.
\end{aligned}\right.$$

Betrachten wir das Gleichungssystem (34), welches in Bild 9 schematisch dargestellt ist, dann erkennen wir, daß es zweckmäßig ist, zunächst aus der oberen Gruppe die S' als Funktion von P_x, $\bar{S}$ und ζ zu berechnen, was wenig Mühe bereitet. Die ermittelten Werte setzen wir in die beiden folgenden Gruppen ein, berechnen aus der zweiten die $\bar{S}$ als Funktionen von P_x, P_y und ζ und setzen schließlich das Ergebnis in die letzte Gleichungsgruppe ein. Aus dieser erhalten wir dann die Knotendrehwinkel ζ als Funktion der drei Lastgruppen. Durch Rückwärtseinsetzen bekommen wir der Reihe nach $\bar{S}$ und S'.

Bei der Belastung durch die Lastgruppen $P_{(o)z}$, $M_{(o)x}$ und $M_{(o)y}$ verbleiben nach Fortfall zahlreicher Glieder die drei Bedingungsgleichungen

$$P_{(o)z}+\Delta' Q''_{(o)}-2\,\bar{Q}_{(o)}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\beta-2\,\bar{\bar{Q}}_{(o)}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\beta=0$$

$$M_{(o)x}+\Delta'\left(\mathfrak{M}'_{(o)}\cdot\cos\gamma\right)+\Delta''\left(M''_{(o)}\cdot\sin\gamma\right)-2\,\bar{M}_{(o)}\cdot\cos\beta-2\,\bar{\bar{M}}_{(o)}\cdot\sin\beta=0$$

$$M_{(o)y}+\Delta'\left(\mathfrak{M}'_{(o)}\cdot\sin\gamma\right)-\Delta''\left(M''_{(o)}\cdot\cos\gamma\right)$$
$$-2\,\bar{M}_{(o)}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\beta+2\,\bar{\bar{M}}_{(o)}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\beta+2\,\mathfrak{M}_{(o)}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}=0.$$

Setzen wir hierin die Sonderwerte der Querkräfte und Momente nach Gl. (28) u. (29) ein, dann wird aus ihnen:

$$(37)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{P_{(o)z}}{6\,E}+2\left[\mathfrak{d}_{J+1}\,z_{(o)J+1}-\mathfrak{d}_J\,z_{(o)J}+\mathfrak{d}_{J-1}\,z_{(o)J-1}\right]\\
&\qquad+\left[\mathfrak{e}_{J+1}\,\xi_{(o)J+1}+\mathfrak{e}_J\,\xi_{(o)J}-\mathfrak{e}_{J-1}\,\xi_{(o)J-1}\right]\\
&\qquad\qquad-\left[\mathfrak{f}_{J+1}\,\eta_{(o)J+1}+\mathfrak{f}_J\,\eta_{(o)J}+\mathfrak{f}_{J-1}\,\eta_{(o)J-1}\right]=0\\
&\frac{M_{(o)x}}{2\,E}-3\left[\mathfrak{d}'_{J+1}\,z_{(o)J+1}-\mathfrak{d}_J'\,z_{(o)J}+\mathfrak{d}'_{J-1}\,z_{(o)J-1}\right]\\
&\qquad+\left[\mathfrak{e}'_{J+1}\,\xi_{(o)J+1}-\mathfrak{e}_J'\,\xi_{(o)J}+\mathfrak{e}'_{J-1}\,\xi_{(o)J-1}\right]\\
&\qquad\qquad-\left[\mathfrak{f}'_{J+1}\,\eta_{(o)J+1}-\mathfrak{f}_J'\,\eta_{(o)J}+\mathfrak{f}'_{J-1}\,\eta_{(o)J-1}\right]=0\\
&\frac{M_{(o)y}}{2\,E}-3\left[\mathfrak{d}''_{J+1}\,z_{(o)J+1}-\mathfrak{d}_J''\,z_{(o)J}+\mathfrak{d}''_{J-1}\,z_{(o)J-1}\right]\\
&\qquad+\left[\mathfrak{e}''_{J+1}\,\xi_{(o)J+1}-\mathfrak{e}_J''\,\xi_{(o)J}+\mathfrak{e}''_{J-1}\,\xi_{(o)J-1}\right]\\
&\qquad\qquad-\left[\mathfrak{f}''_{J+1}\,\eta_{(o)J+1}-\mathfrak{f}_J''\,\eta_{(o)J}+\mathfrak{f}''_{J-1}\,\eta_{(o)J-1}\right]=0.
\end{aligned}\right.$$

In diesen Gleichungen bedeuten:

$$
(37\,a)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\mathfrak{d}_{J+1}=\frac{J''_{J+1}}{l^3_{J+1}},\quad \mathfrak{d}_J=\left(\frac{J''_{J+1}}{l^3_{J+1}}+\frac{J_J''}{l_J^3}+\frac{4\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}}{s^3}\cdot J_v\right),\quad \mathfrak{d}_{J-1}=\frac{J_J''}{l_J^3}\\
&\mathfrak{d}'_{J+1}=\frac{J''_{J+1}\cdot\sin\gamma_{J+1}}{l^2_{J+1}}\qquad \mathfrak{d}'_{J-1}=\frac{J_J''\cdot\sin\gamma_J}{l_J^2}\\
&\mathfrak{d}_J'=\left(\frac{J''_{J+1}\cdot\sin\gamma_{J+1}}{l^2_{J+1}}+\frac{J_J''\cdot\sin\gamma_J}{l_J^2}+\frac{4\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}}{s^2}\cdot J_v\right)\\
&\mathfrak{d}''_{J+1}=\frac{J''_{J+1}\cdot\cos\gamma_{J+1}}{l^2_{J+1}}\qquad \mathfrak{d}''_{J-1}=\frac{J_J''\cdot\cos\gamma_J}{l_J^2}\\
&\mathfrak{d}_J''=\left(\frac{J''_{J+1}\cdot\cos\gamma_{J+1}}{l^2_{J+1}}+\frac{J_J''\cdot\cos\gamma_J}{l_J^2}-\frac{2\cdot\sin\alpha}{s^2}\cdot J_{vw}\right)\\
&\mathfrak{e}_{J+1}=\frac{J''_{J+1}\cdot\sin\gamma_{J+1}}{l^2_{J+1}}\qquad \mathfrak{e}_{J-1}=\frac{J_J''\cdot\sin\gamma_J}{l_J^2}\\
&\mathfrak{e}_J=\left(\frac{J''_{J+1}\cdot\sin\gamma_{J+1}}{l^2_{J+1}}-\frac{J_J''\cdot\sin\gamma_J}{l_J^2}+\frac{4\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{s^2}\cdot J_v\right)\\
&\mathfrak{e}'_{J+1}=\frac{\lambda I'_{J+1}\cdot\cos^2\gamma_{J+1}-2\,J''_{J+1}\cdot\sin^2\gamma_{J+1}}{2\,l_{J+1}}\\
&\mathfrak{e}'_{J-1}=\frac{\lambda I_J'\cdot\cos^2\gamma_J-2\,J_J''\cdot\sin^2\gamma_J}{2\,l_J}\\
&\mathfrak{e}_J'=\Bigg(\frac{\lambda I'_{J+1}\cdot\cos^2\gamma_{J+1}-4\,J''_{J+1}\cdot\sin^2\gamma_{J+1}}{2\,l_{J+1}}\\
&\qquad\qquad+\frac{\lambda I_J'\cdot\cos^2\gamma_J-4\,J_J''\cdot\sin^2\gamma_J}{2\,l_J}+\frac{6\,J_v}{s}\Bigg)\\
&\mathfrak{e}''_{J+1}=\left(\lambda I'_{J+1}+2\,J''_{J+1}\right)\frac{\sin 2\gamma_{J+1}}{4\,l_{J+1}},\quad \mathfrak{e}''_{J-1}=\left(\lambda I_J'+2\,J_J''\right)\frac{\sin 2\gamma_J}{4\,l_J}\\
&\mathfrak{e}_J''=\Bigg[\left(\lambda I'_{J+1}-4\,J''_{J+1}\right)\frac{\sin 2\gamma_{J+1}}{4\,l_{J+1}}\\
&\qquad\qquad+\left(\lambda I_J'-4\,J_J''\right)\frac{\sin 2\gamma_J}{4\,l_J}+\frac{6}{s}\cdot J_{vw}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\Bigg]\\
&\mathfrak{f}_{J+1}=\frac{J''_{J+1}\cdot\cos\gamma_{J+1}}{l^2_{J+1}}\qquad \mathfrak{f}_{J-1}=\frac{J_J''\cdot\cos\gamma_J}{l_J^2}\\
&\mathfrak{f}_J=\left(\frac{J''_{J+1}\cdot\cos\gamma_{J+1}}{l^2_{J+1}}-\frac{J_J''\cdot\cos\gamma_J}{l_J^2}-\frac{2\cdot\sin\alpha}{s^2}\cdot J_{vw}\right)\\
&\mathfrak{f}'_{J+1}=\left(\lambda I'_{J+1}+2\,J''_{J+1}\right)\frac{\sin 2\gamma_{J+1}}{4\,l_{J+1}}\qquad \mathfrak{f}'_{J-1}=\left(\lambda I_J'+2J_J''\right)\frac{\sin 2\gamma_J}{4\,l_J}\\
&\mathfrak{f}_J'=\Bigg[\left(\lambda I'_{J+1}-4\,J''_{J+1}\right)\frac{\sin 2\gamma_{J+1}}{4\,l_{J+1}}\\
&\qquad\qquad+\left(\lambda I_J'-4\,J_J''\right)\frac{\sin 2\gamma_J}{4\,l_J}+\frac{6}{s}\cdot J_{vw}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\Bigg]\\
&\mathfrak{f}''_{J+1}=\frac{\lambda I'_{J+1}\cdot\sin^2\gamma_{J+1}-2\,J''_{J+1}\cdot\cos^2\gamma_{J+1}}{2\,l_{J+1}}\\
&\mathfrak{f}''_{J-1}=\frac{\lambda I_J'\cdot\sin^2\gamma_J-2\,J_J''\cdot\cos^2\gamma_J}{2\,l_J}\\
&\mathfrak{f}_J''=\Bigg[\frac{\lambda I'_{J+1}\cdot\sin^2\gamma_{J+1}+4\,J''_{J+1}\cdot\cos^2\gamma_{J+1}}{2\,l_{J+1}}\\
&\qquad+\frac{\lambda I_J'\cdot\sin^2\gamma_J+4\,J_J''\cdot\cos^2\gamma_J}{2\,l_J}+\frac{2}{s}\left(\lambda I\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}+3\,J_w\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)\Bigg].
\end{aligned}
\right.
$$

Hier gilt bezüglich der Gleichungen für den obersten und untersten Ring das gleiche wie bei der vorhin behandelten Belastung. Im Falle einer gelenkigen Auflagerung werden die Festwerte für den untersten Ring

$$
(37\,b)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\mathfrak{d}_{II}=\frac{J_{II}''}{l_{II}^3}\qquad \mathfrak{d}_I=\left(\frac{J_{II}''}{l_{II}^3}+\frac{J_I''}{4\,l_I^3}+\frac{4\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}}{s^2}\cdot J_v\right)\\
&\mathfrak{d}_{II}'=\frac{J_{II}''\cdot\sin\gamma_{II}}{l_{II}^2},\quad \mathfrak{d}_I'=\left(\frac{J_{II}''\cdot\sin\gamma_{II}}{l_{II}^2}+\frac{J_I''\cdot\sin\gamma_I}{2\,l_I^2}+\frac{4\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{s^2}\cdot J_v\right)\\
&\mathfrak{d}_{II}''=\frac{J_{II}''\cdot\cos\gamma_{II}}{l_{II}^2},\quad \mathfrak{d}_I''=\left(\frac{J_{II}''\cdot\cos\gamma_{II}}{l_{II}^2}+\frac{J_I''\cdot\cos\gamma_I}{l_I^2}-\frac{2\cdot\sin\alpha}{s^2}\cdot J_{vw}\right)\\
&\mathfrak{e}_{II}=\frac{J_{II}''\cdot\sin\gamma_{II}}{l_{II}^2},\quad \mathfrak{e}_I=\left(\frac{J_{II}''\cdot\sin\gamma_{II}}{l_{II}^2}-\frac{J_I''\cdot\sin\gamma_I}{2\,l_I^2}+\frac{4\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{s^2}\cdot J_v\right)
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\text{Noch }(37\,b)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\mathfrak{e}_{II}'=\frac{\lambda I_{II}'\cdot\cos^2\gamma_{II}-2\,J_{II}''\cdot\sin^2\gamma_{II}}{2\,l_{II}}\\
&\mathfrak{e}_I'=\left(\frac{\lambda I_{II}'\cdot\cos^2\gamma_{II}-4\,J_{II}''\cdot\sin^2\gamma_{II}}{2\,l_{II}}-\frac{3J_I''\cdot\sin^2\gamma_I}{2\,l_I}+\frac{6\,J_v}{s}\right)\\
&\mathfrak{e}_{II}''=\left(\lambda I_{II}'+2\,J_{II}''\right)\frac{\sin 2\gamma_{II}}{2\,l_{II}}\\
&\mathfrak{e}_I''=\left[\left(\lambda I_{II}'+4J_{II}''\right)\frac{\sin 2\gamma_{II}}{2\,l_{II}}-\frac{3\,J_I''\cdot\sin 2\gamma_I}{4\,l_I}+\frac{6}{s}\cdot J_{vw}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right]\\
&\mathfrak{f}_{II}=\frac{J_{II}''\cdot\cos\gamma_{II}}{l_{II}^2},\quad \mathfrak{f}_I=\frac{J_{II}''\cdot\cos\gamma_{II}}{l_{II}^2}-\frac{J_I''\cdot\cos\gamma_I}{2\,l_I^2}-\frac{2\cdot\sin\alpha}{s^2}\cdot J_{vw}\\
&\mathfrak{f}_{II}'=\left(\lambda I_{II}'+2\,J_{II}''\right)\frac{\sin 2\gamma_{II}}{4\,l_{II}}\\
&\mathfrak{f}_I'=\left[\left(\lambda I_{II}'+4J_{II}''\right)\frac{\sin 2\gamma_{II}}{4\,l_{II}}-\frac{3J_I''\cdot\sin 2\gamma_I}{4\,l_I}+\frac{6}{s}\cdot J_{vw}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right]\\
&\mathfrak{f}_{II}''=\frac{\lambda I_{II}'\cdot\sin^2\gamma_{II}-2\,J_{II}''\cdot\cos^2\gamma_{II}}{2\,l_{II}}\\
&\mathfrak{f}_I''=\Bigg[\frac{\lambda I_{II}'\cdot\sin^2\gamma_{II}+4\,J_{II}''\cdot\cos^2\gamma_{II}}{2\,l_{II}}\\
&\qquad\qquad+\frac{3\,J_I''\cdot\cos^2\gamma_I}{2\,l_I}+\frac{2}{s}\left(\lambda I\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}+3\,J_w\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)\Bigg].
\end{aligned}
\right.
$$

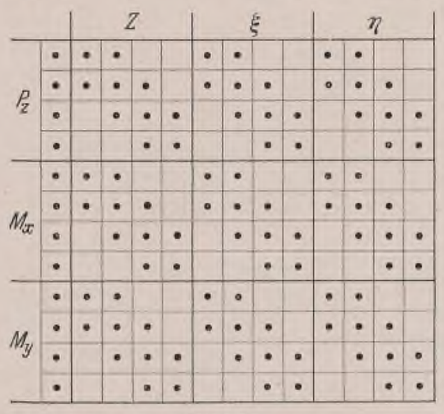


Bild 10.

Das Schema der Gleichungsgruppen (37) ist in Bild 10 dargestellt. Die Auswertung geschieht am besten in der gleichen Art wie bei dem vorhergehend behandelten Belastungsfall.

Bei den höheren Belastungsstufen lauten die ersten drei Gleichgewichtsbedingungen, wenn wir darin die im vorigen Abschnitt ermittelten Kraftwerte einsetzen:

$$
(38)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{P_{(k)x}}{6E}-\left[\frac{S'_{(k)J+1}\cdot\cos\gamma_{J+1}-S'_{(k)J}\cdot\cos\gamma_J}{6E}\right]+2\left[a_{J+1}y_{(k)J+1}\right.\\
&\left.-a_Jy_{(k)J}+a_{J-1}y_{(k)J-1}+a_{J-2}y_{(k)J-2}+\ldots+a_1y_{(k)1}\right]\\
&+b\,\xi_{(k)J}+c\,\eta_{(k)J}+\left[d_{J+1}\zeta_{(k)J+1}+d_J\zeta_{(k)J}-d_{J-1}\zeta_{(k)J-1}\right]=0\\
&\frac{P_{(k)y}}{6E}+\left[\frac{S'_{(k)J+1}\cdot\sin\gamma_{J+1}-S'_{(k)J}\cdot\sin\gamma_J}{6E}\right]+\frac{\varkappa_k\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{6E}\cdot\bar{S}_{(k)J}\\
&+2\left[a'_{J+1}y_{(k)J+1}-a'_Jy_{(k)J}+a'_{J-1}y_{(k)J-1}+\ldots+a_1'y_{(k)1}\right]\\
&+b'\,\xi_{(k)J}+c'\,\eta_{(k)J}+\left[d'_{J+1}\zeta_{(k)J+1}+d'_J\zeta_{(k)J}-d'_{J-1}\zeta_{(k)J-1}\right]=0\\
&\frac{P_{(k)z}}{6E}+\frac{\omega_k\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{6E}\cdot S_{(k)J}-2\cdot\frac{\varkappa_k}{\omega_k}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left[a''_{J+1}y_{(k)J+1}\right.\\
&\left.-a''_Jy_{(k)J}+a''_{J-1}y_{(k)J-1}+a''_{J-2}y_{(k)J-2}+\ldots+a''_1y_{(k)1}\right]\\
&+\left[b''_{k+1}\xi_{(k)J+1}+b''_J\xi_{(k)J}-b''_{J-1}\xi_{(k)J-1}\right]\\
&-\left[c''_{J+1}\eta_{(k)J+1}+c_J''\eta_{(k)J}-c''_{J-1}\eta_{(k)J-1}\right]+d''\zeta_{(k)J}=0.
\end{aligned}
\right.
$$

In diesen Gleichungen bedeuten:

$$
(38\,a)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&a_{J+1}=\frac{J'_{J+1}\cdot\operatorname{tg}\gamma_{J+1}}{l^3_{J+1}}\\
&a_J=\Bigg(\frac{J'_{J+1}\cdot\operatorname{tg}\gamma_{J+1}}{l^3_{J+1}}+\frac{J_J'\cdot\operatorname{tg}\gamma_J}{l_J^3}\\
&\qquad\qquad+\frac{\omega_k^2-\omega_1^2}{s_J^3\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot J_{vw_J}+\frac{\omega_k^2}{s_J^3}\cdot J_{w_J}\cdot\operatorname{tg}\gamma_J\Bigg)\\
&a_{J-1}=\left[\frac{J_J'\cdot\operatorname{tg}\gamma_J}{l_J^3}+\frac{\omega_k^2}{s^3_{J-1}}\cdot J_{w_{J-1}}\left(\operatorname{tg}\gamma_J-\operatorname{tg}\gamma_{J-1}\right)\right]\\
&a_{J-2}=\frac{\omega_k^2}{s^3_{J-2}}\cdot J_{w_{J-2}}\left(\operatorname{tg}\gamma_{J-1}-\operatorname{tg}\gamma_{J-2}\right)\qquad a_1=\frac{\omega_k^2}{s_I^3}\cdot J_{w_1}\cdot\operatorname{tg}\gamma_I
\end{aligned}
\right.
$$

$$a'_{J+1} = \frac{J'_{J+1}}{l^3_{J+1}}$$

$$a_J' = \left(\frac{J'_{J+1}}{l^3_{J+1}} + \frac{J_J'}{l_J^3} + \frac{\omega_k^2 - \omega_1^2}{s_J^3} \cdot J_{v_J} + \frac{\omega_k^2 \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{s_J^3} \cdot J_{vw_J} \cdot \operatorname{tg}\gamma_J\right)$$

$$a'_{J-1} = \left[\frac{J_J'}{l_J^3} + \frac{\omega_k^2 \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{s^3_{J-1}} \cdot J_{vw_{J-1}}(\operatorname{tg}\gamma_J - \operatorname{tg}\gamma_{J-1})\right]$$

$$a'_{J-2} = \frac{\omega_k^2 \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{s^3_{J-2}} \cdot J_{vw_{J-2}}(\operatorname{tg}\gamma_{J-1} - \operatorname{tg}\gamma_{J-2})$$

$$a_{\mathrm{I}}' = \frac{\omega_k^2 \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{s_{\mathrm{I}}^3} \cdot J_{vw_{\mathrm{I}}} \cdot \operatorname{tg}\gamma_{\mathrm{I}} \qquad a''_{J+1} = \frac{J''_{J+1}}{l^3_{J+1}}$$

$$a_J'' = \left(\frac{J''_{J+1}}{l^3_{J+1}} + \frac{J_J''}{l_J^3} - \frac{\omega_k^2 - \omega_1^2}{s_J^3} \cdot J_{v_J} - \frac{\omega_k^2 \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{s_J^3} \cdot J_{vw_J} \cdot \operatorname{tg}\gamma_J\right)$$

$$a''_{J-1} = \left[\frac{J_J''}{l_J^3} - \frac{\omega_k^2 \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{s^3_{J-1}} \cdot J_{vw_{J-1}}(\operatorname{tg}\gamma_J - \operatorname{tg}\gamma_{J-1})\right]$$

$$a''_{J-2} = \frac{\omega_k^2 \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{s^3_{J-2}} \cdot J_{vw_{J-2}}(\operatorname{tg}\gamma_{J-1} - \operatorname{tg}\gamma_{J-2})$$

$$a_{\mathrm{I}}'' = \frac{\omega_k^2 \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{s_{\mathrm{I}}^3} \cdot J_{vw_{\mathrm{I}}} \cdot \operatorname{tg}\gamma_{\mathrm{I}}$$

Noch (38a)

$$b = \frac{\omega_k \varkappa_k}{s^2} \cdot J_{vw} \qquad b' = \frac{\omega_k \varkappa_k}{s^2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot J_v$$

$$b''_{J+1} = \frac{J''_{J+1} \cdot \sin\gamma_{J+1}}{l^2_{J+1}} \qquad b''_{J-1} = \frac{J_J'' \cdot \sin\gamma_J}{l_J^2}$$

$$b_J'' = \left(\frac{J''_{J+1} \cdot \sin\gamma_{J+1}}{l^2_{J+1}} - \frac{J_J'' \cdot \sin\gamma_J}{l_J^2} + \frac{\varkappa_k^2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{s^2} \cdot J_v\right)$$

$$c = \frac{\omega_k \varkappa_k \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{s^2} \cdot J_w \qquad c' = \frac{\omega_k \varkappa_k \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}}{s^2} \cdot J_{vw}$$

$$c''_{J+1} = \frac{J''_{J+1} \cdot \cos\gamma_{J+1}}{l^2_{J+1}} \qquad c''_{J-1} = \frac{J_J'' \cdot \cos\gamma_J}{l_J^2}$$

$$c_J'' = \left(\frac{J''_{J+1} \cdot \cos\gamma_{J+1}}{l^2_{J+1}} - \frac{J_J'' \cdot \cos\gamma_J}{l_J^2} - \frac{\varkappa_k^2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{s^2} \cdot J_{vw}\right)$$

$$d_{J+1} = \frac{J'_{J+1} \cdot \sin\gamma_{J+1}}{l^2_{J+1}} \qquad d_{J-1} = \frac{J_J' \cdot \sin\gamma_J}{l_J^2}$$

$$d_J = \left(\frac{J'_{J+1} \cdot \sin\gamma_{J+1}}{l^2_{J+1}} - \frac{J_J' \cdot \sin\gamma_J}{l_J^2} + \frac{\omega_k^2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{s^2} \cdot J_w\right)$$

$$d'_{J+1} = \frac{J'_{J+1} \cdot \cos\gamma_{J+1}}{l^2_{J+1}} \qquad d'_{J-1} = \frac{J_J' \cdot \cos\gamma_J}{l_J^2}$$

$$d_J' = \left(\frac{J'_{J+1} \cdot \cos\gamma_{J+1}}{l^2_{J+1}} - \frac{J_J' \cdot \cos\gamma_J}{l_J^2} + \frac{\omega_k^2 \cdot \sin\alpha}{s^2 \cdot 2} \cdot J_{vw}\right)$$

$$d'' = \frac{\omega_k \varkappa_k \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}}{s^2} \cdot J_{vw}.$$

Auch hier fallen bei den für den obersten Ring geltenden Gleichungen die Glieder mit dem Index $J+1$ fort. Bei den Gleichungen, die sich auf den untersten Ring beziehen, verschwinden alle Glieder, deren Index $J-1$ und kleiner ist. Außerdem ändern sich bei gelenkiger Lagerung die Festwerte der Gleichungen wie folgt:

(38b)

$$a_{\mathrm{II}} = \frac{J_{\mathrm{II}}' \cdot \operatorname{tg}\gamma_{\mathrm{II}}}{l_{\mathrm{II}}^3} \qquad a_{\mathrm{II}}' = \frac{J_{\mathrm{II}}'}{l_{\mathrm{II}}^3} \qquad a_{\mathrm{II}}'' = \frac{J_{\mathrm{II}}''}{l_{\mathrm{II}}^3}$$

$$a_{\mathrm{I}} = \left(\frac{J_{\mathrm{II}}' \cdot \operatorname{tg}\gamma_{\mathrm{II}}}{l_{\mathrm{II}}^3} + \frac{J_{\mathrm{I}}' \cdot \operatorname{tg}\gamma_{\mathrm{I}}}{4\, l_{\mathrm{I}}^3} + \frac{\omega_k^2 - \omega_1^2}{s^3 \cdot \cos\frac{\alpha}{2}} \cdot J_{vw} + \frac{\omega_k^2}{s^3} \cdot J_w \cdot \operatorname{tg}\gamma_{\mathrm{I}}\right)$$

$$a_{\mathrm{I}}' = \left(\frac{J_{\mathrm{II}}'}{l_{\mathrm{II}}^3} + \frac{J_{\mathrm{I}}'}{4\, l_{\mathrm{I}}^3} + \frac{\omega_k^2 - \omega_1^2}{s^3} \cdot J_v + \frac{\omega_k^2 \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{s^3} \cdot J_{vw} \cdot \operatorname{tg}\gamma_{\mathrm{I}}\right)$$

$$a_{\mathrm{I}}'' = \left(\frac{J_{\mathrm{II}}''}{l_{\mathrm{II}}^3} + \frac{J_{\mathrm{I}}''}{4\, l_{\mathrm{I}}^3} - \frac{\omega_k^2 - \omega_1^2}{s^3} \cdot J_v - \frac{\omega_k^2 \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{s^3} \cdot J_{vw} \cdot \operatorname{tg}\gamma_{\mathrm{I}}\right)$$

Noch (38b)

$$b = \frac{\omega_k \varkappa_k}{s^2} \cdot J_{vw} \qquad b' = \frac{\omega_k \varkappa_k}{s^2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot J_v \qquad b_{\mathrm{II}}'' = \frac{J_{\mathrm{II}}'' \cdot \sin\gamma_{\mathrm{II}}}{l_{\mathrm{II}}^2}$$

$$b_{\mathrm{I}}'' = \left(\frac{J_{\mathrm{II}}'' \cdot \sin\gamma_{\mathrm{II}}}{l_{\mathrm{II}}^2} - \frac{J_{\mathrm{I}}'' \cdot \sin\gamma_{\mathrm{I}}}{2\, l_{\mathrm{I}}^2} + \frac{\varkappa_k^2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{s^2} \cdot J_v\right)$$

$$c = \frac{\omega_k \varkappa_k}{s^2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot J_w, \quad c' = \frac{\omega_k \varkappa_k}{s^2} \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2} \cdot J_{vw}, \quad c_{\mathrm{II}}'' = \frac{J_{\mathrm{II}}'' \cdot \cos\gamma_{\mathrm{II}}}{l_{\mathrm{II}}^2}$$

$$c_{\mathrm{I}}'' = \left(\frac{J_{\mathrm{II}}'' \cdot \cos\gamma_{\mathrm{II}}}{l_{\mathrm{II}}^2} - \frac{J_{\mathrm{I}}'' \cdot \cos\gamma_{\mathrm{I}}}{2\, l_{\mathrm{I}}^2} - \frac{\varkappa_k^2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{s^2} \cdot J_{vw}\right)$$

$$d_{\mathrm{II}} = \frac{J_{\mathrm{II}}' \cdot \sin\gamma_{\mathrm{II}}}{l_{\mathrm{II}}^2} \qquad d_{\mathrm{II}}' = \frac{J_{\mathrm{II}}' \cdot \cos\gamma_{\mathrm{II}}}{l_{\mathrm{II}}^2} \qquad d'' = \frac{\omega_k \varkappa_k \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}}{s^2} \cdot J_{vw}$$

$$d_{\mathrm{I}} = \left(\frac{J_{\mathrm{II}}' \cdot \sin\gamma_{\mathrm{II}}}{l_{\mathrm{II}}^2} - \frac{J_{\mathrm{I}}' \cdot \sin\gamma_{\mathrm{I}}}{2\, l_{\mathrm{I}}^2} + \frac{\omega_k^2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{s^2} \cdot J_w\right)$$

$$d_{\mathrm{I}}' = \left(\frac{J_{\mathrm{II}}' \cdot \cos\gamma_{\mathrm{II}}}{l_{\mathrm{II}}^2} - \frac{J_{\mathrm{I}}' \cdot \cos\gamma_{\mathrm{I}}}{2\, l_{\mathrm{I}}^2} + \frac{\omega_k^2 \cdot \sin\alpha}{s^2\, 2} \cdot J_{vw}\right).$$

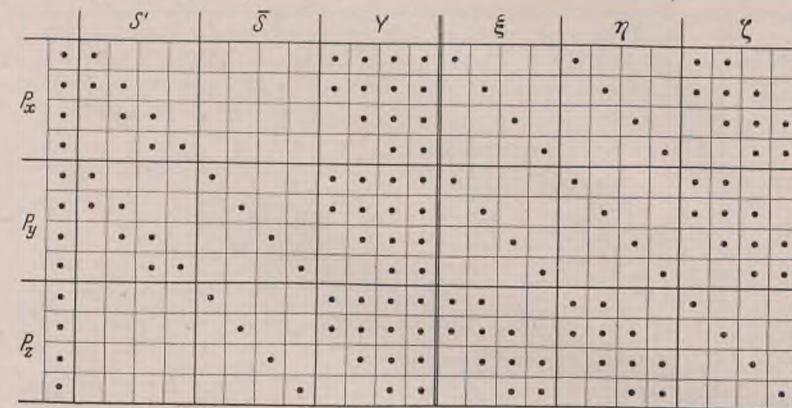


Bild 11.

Das Schema der Gl. (38) ist in Bild 11 dargestellt. Die Lösung geschieht zweckmäßig, indem wir aus der obersten Gruppe die Werte S' und aus der untersten die Werte $\bar{S}$ als Funktionen der übrigen Größen errechnen und sie dann in die mittlere Gleichungsgruppe einsetzen. Auf diese Art erhalten wir ein Gleichungssystem, aus welchem wir die Verschiebungsgrößen y als Funktionen von $P_x P_y P_z$, ξ, η und ζ ermitteln können.

Setzen wir jetzt die im vorigen Abschnitt bestimmten Kraftwerte in die zweite Gruppe der Gleichgewichtsbedingungen ein, dann erhalten wir die Gleichungen:

(39)

$$\begin{aligned} &\frac{M_{(k)x}}{2E} + 3 \cdot \frac{\varkappa_k}{\omega_k}\left[A_{J+1} y_{(k)J+1} - A_J y_{(k)J} - A_{J-1} y_{(k)J-1}\right. \\ &\qquad \left. - A_{J-2} y_{(k)J-2} - \ldots - A_1 y_{(k)1}\right] \\ &\qquad - \left[B_{J+1}\xi_{(k)J+1} + B_J \xi_{(k)J} + B_{J-1}\xi_{(k)J-1}\right] \\ &\qquad + \left[C_{J+1}\eta_{(k)J+1} + C_J \eta_{(k)J} + C_{J-1}\eta_{(k)J-1}\right] - D\,\zeta_{(k)J} = 0 \\ &\frac{M_{(k)y}}{2E} - 3 \cdot \frac{\varkappa_k}{\omega_k}\left[A'_{J+1} y_{(k)J+1} - A_J' y_{(k)J} - A'_{J-1} y_{(k)J-1}\right. \\ &\qquad \left. + A'_{J-2} y_{(k)J-2} + \ldots + A_{\mathrm{I}}' y_{(k)1}\right] \\ &\qquad + \left[B'_{J+1}\xi_{(k)J+1} + B_J' \xi_{(k)J} + B'_{J-1}\xi_{(k)J-1}\right] \\ &\qquad - \left[C'_{J+1}\eta_{(k)J+1} + C_J' \eta_{(k)J} + C'_{J-1}\eta_{(k)J-1}\right] - D'\,\zeta_{(k)J} = 0 \\ &\frac{M_{(k)z}}{2E} - 3\left[A''_{J+1} y_{(k)J+1} - A_J'' y_{(k)J} - A''_{J-1} y_{(k)J-1}\right. \\ &\qquad \left. + A''_{J-2} y_{(k)J-2} + \ldots + A_{\mathrm{I}}'' y_{(k)1}\right] - B''\,\xi_{(k)J} + C''\,\eta_{(k)J} \\ &\qquad - \left[D''_{J+1}\zeta_{(k)J+1} + D_J''\zeta_{(k)J} - D''_{J-1}\zeta_{(k)J-1}\right] = 0. \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen bedeuten:

(39a)

$$A_{J+1} = \frac{J''_{J+1} \cdot \sin\gamma_{J+1}}{l^2_{J+1}} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

$$A_J = \left[\left(\frac{J''_{J+1} \cdot \sin\gamma_{J+1}}{l^2_{J+1}} - \frac{J_J'' \cdot \sin\gamma_J}{l_J^2}\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \frac{\omega_k^2 - \omega_1^2}{s_J^2 \cdot \cos\frac{\alpha}{2}} \cdot J_v - \frac{\omega_k^2}{s_J^2} \cdot J_{vw} \cdot \operatorname{tg}\gamma_J\right]$$

$$A_{J-1} = \left[\frac{J_J'' \cdot \sin\gamma_J}{l_J^2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \frac{\omega_k^2}{s^2_{J-1}} \cdot J_{vw_{J-1}}(\operatorname{tg}\gamma_J - \operatorname{tg}\gamma_{J-1})\right]$$

$$A_{J-2} = \frac{\omega_k^2}{s^2_{J-2}} \cdot J_{vw_{J-2}}(\operatorname{tg}\gamma_{J-1} - \operatorname{tg}\gamma_{J-2})$$

$$A_{\mathrm{I}} = \frac{\omega_k^2}{s_{\mathrm{I}}^2} \cdot J_{vw_{\mathrm{I}}}(\operatorname{tg}\gamma_{\mathrm{II}} - \operatorname{tg}\gamma_{\mathrm{I}})$$

Noch (39a)

$$A'_{J+1}=\frac{J''_{J+1}\cdot\cos\gamma_{J+1}}{l^2_{J+1}}\cdot\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$$

$$\begin{aligned}A'_J=\Bigg[&\left(\frac{J''_{J+1}\cdot\cos\gamma_{J+1}}{l^2_{J+1}}-\frac{J''_J\cdot\cos\gamma_J}{l_J^2}\right)\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\\&+\frac{\omega_k^2-\omega_1^2}{s_J^2}\cdot J_{vw_J}+\frac{\omega_k^2}{s^2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot J_{w_J}\cdot\mathrm{tg}\,\gamma_J\Bigg]\end{aligned}$$

$$A'_{J-1}=\left[\frac{J''_J\cdot\cos\gamma_J}{l_J^2}\cdot\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}-\frac{\omega_k^2}{s^2_{J-1}}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot J_w\left(\mathrm{tg}\,\gamma_J-\mathrm{tg}\,\gamma_{J-1}\right)\right]$$

$$A'_{J-2}=\frac{\omega_k^2}{s^2_{J-2}}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot J_{w_{J-2}}\left(\mathrm{tg}\,\gamma_{J-1}-\mathrm{tg}\,\gamma_{J-2}\right)$$

$$A'_{\mathrm{I}}=\frac{\omega_k^2}{s_{\mathrm{I}}^2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot J_{w_{\mathrm{I}}}\left(\mathrm{tg}\,\gamma_{\mathrm{II}}-\mathrm{tg}\,\gamma_{\mathrm{I}}\right)$$

$$A''_{J+1}=\frac{J'_{J+1}}{l^2_{J+1}\cdot\cos\gamma_{J+1}}$$

$$\begin{aligned}A''_J=\Bigg[&\frac{J''_{J+1}}{l^2_{J+1}\cdot\cos\gamma_{J+1}}-\frac{J''_J}{l_J^2\cdot\cos\gamma_J}\\&+\frac{\omega_k^2-\omega_1^2}{s_J^2}\cdot\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\cdot J_{vw_J}+\frac{\omega_k^2}{s_J^2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot J_{w_J}\cdot\mathrm{tg}\,\gamma_J\Bigg]\end{aligned}$$

$$A''_{J-1}=\left[\frac{J'_J}{l_J^2\cdot\cos\gamma_J}-\frac{\omega_k^2}{s^2_{J-1}}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot J_{w_{J-1}}\left(\mathrm{tg}\,\gamma_J-\mathrm{tg}\,\gamma_{J-1}\right)\right]$$

$$A''_{J-2}=\left[\frac{\omega_k^2}{s^2_{J-2}}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot J_{w_{J-2}}\left(\mathrm{tg}\,\gamma_{J-1}-\mathrm{tg}\,\gamma_{J-2}\right)\right]$$

$$A''_{\mathrm{I}}=\frac{\omega_k^2}{s_{\mathrm{I}}^2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot J_{w_{\mathrm{I}}}\left(\mathrm{tg}\,\gamma_{\mathrm{II}}-\mathrm{tg}\,\gamma_{\mathrm{I}}\right)$$

$$B_{J+1}=\frac{2\,J''_{J+1}\cdot\sin^2\gamma_{J+1}-\lambda\,I'_{J+1}\cdot\cos^2\gamma_{J+1}}{2\,l_{J+1}}$$

$$B_{J-1}=\frac{2\,J''_J\cdot\sin^2\gamma_J-\lambda\,I'_J\cdot\cos^2\gamma_J}{2\,l_J}$$

$$\begin{aligned}B_J=\Bigg(&\frac{4\,J''_{J+1}\cdot\sin^2\gamma_{J+1}+\lambda\,I'_{J+1}\cdot\cos^2\gamma_{J+1}}{2\,l_{J+1}}\\&+\frac{4\,J''_J\cdot\sin^2\gamma_J+\lambda\,I'_J\cdot\cos^2\gamma_J}{2\,l_J}+\frac{6-\omega_k^2}{s}\cdot J_v\Bigg)\end{aligned}$$

$$B'_{J+1}=\left(\frac{2\,J''_{J+1}+\lambda\,I'_{J+1}}{2\,l_{J+1}}\right)\frac{\sin 2\gamma_{J+1}}{2}$$

$$B'_{J-1}=\left(\frac{2\,J''_J+\lambda\,I'_J}{2\,l_J}\right)\frac{\sin 2\gamma_J}{2}$$

$$\begin{aligned}B'_J=\Bigg[&\left(\frac{4\,J''_{J+1}-\lambda\,I'_{J+1}}{2\,l_{J+1}}\right)\frac{\sin 2\gamma_{J+1}}{2}\\&+\left(\frac{4\,J''_J-\lambda\,I'_J}{2\,l_J}\right)\frac{\sin 2\gamma_J}{2}-\frac{6-\omega_k^2}{s}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot J_{vw}\Bigg]\end{aligned}$$

$$B''=\frac{\omega_k\chi_k}{s}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot J_{vw}$$

$$C_{J+1}=\left(\frac{2\,J''_{J+1}+\lambda\,I'_{J+1}}{2\,l_{J+1}}\right)\frac{\sin 2\gamma_{J+1}}{2}$$

$$C_{J-1}=\left(\frac{2\,J''_J+\lambda\,I'_J}{2\,l_J}\right)\frac{\sin 2\gamma_J}{2}$$

$$\begin{aligned}C_J=\Bigg[&\left(\frac{4\,J''_{J+1}-\lambda\,I'_{J+1}}{2\,l_{J+1}}\right)\frac{\sin 2\gamma_{J+1}}{2}\\&+\left(\frac{4\,J''_J-\lambda\,I'_J}{2\,l_J}\right)\frac{\sin 2\gamma_J}{2}-\frac{6-\omega_k^2}{s}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot J_{vw}\Bigg]\end{aligned}$$

$$C'_{J+1}=\frac{2\,J''_{J+1}\cdot\cos^2\gamma_{J+1}-\lambda\,I'_{J+1}\cdot\sin^2\gamma_{J+1}}{2\,l_{J+1}}$$

$$C'_{J-1}=\frac{2\,J''_J\cdot\cos^2\gamma_J-\lambda\,I'_J\cdot\sin^2\gamma_J}{2\,l_J}$$

$$\begin{aligned}C'_J=\Bigg[&\frac{4\,J''_{J+1}\cdot\cos^2\gamma_{J+1}+\lambda\,I'_{J+1}\cdot\sin^2\gamma_{J+1}}{2\,l_{J+1}}\\&+\frac{4\,J''_J\cdot\cos^2\gamma_J+\lambda\,I'_J\cdot\sin^2\gamma_J}{2\,l_J}\\&+\frac{6-\omega_k^2}{s}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot J_w+\frac{\lambda\,\overline{I}\,\chi_k^2}{2\,s}\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}\Bigg]\end{aligned}$$

$$C''=\frac{\omega_k\chi_k}{s}\cdot\frac{\sin\alpha}{2}\left(J_w-\frac{\lambda\,\overline{I}}{2}\right)$$

$$D=\frac{\omega_k\chi_k}{s}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot J_{vw}\qquad D'=\frac{\omega_k\chi_k}{s}\cdot\frac{\sin\alpha}{2}\left(J_w-\frac{\lambda\,\overline{I}}{2}\right)$$

$$D''_{J+1}=\frac{J'_{J+1}}{l_{J+1}}\qquad D''_{J-1}=\frac{J'_J}{l_J}$$

$$\begin{aligned}D''_J=\Bigg[&2\left(\frac{J'_{J+1}}{l_{J+1}}+\frac{J'_J}{l_J}\right)+\frac{6-\chi_k^2}{s}\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot J_w\\&+\frac{\omega_k^2}{s}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\lambda\,\overline{I}}{2}\Bigg].\end{aligned}$$

Hier gilt bezüglich der Endgleichungen genau das gleiche wie bei den andern Gleichungsgruppen. Bei **gelenkig gelagerten Rippenfüßen** werden die Festwerte:

(39b)

$$A_{\mathrm{II}}=\frac{J_{\mathrm{II}}''\cdot\sin\gamma_{\mathrm{II}}}{l_{\mathrm{II}}^2}\cdot\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\qquad A_{\mathrm{II}}'=\frac{J_{\mathrm{II}}''\cdot\cos\gamma_{\mathrm{II}}}{l_{\mathrm{II}}^2}\cdot\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$$

$$A_{\mathrm{II}}''=\frac{J_{\mathrm{II}}'}{l_{\mathrm{II}}^2\cdot\cos\gamma_{\mathrm{II}}}$$

$$\begin{aligned}A_{\mathrm{I}}=\Bigg[&\left(\frac{J_{\mathrm{II}}''\cdot\sin\gamma_{\mathrm{II}}}{l_{\mathrm{II}}^2}-\frac{J_{\mathrm{I}}''\cdot\sin\gamma_{\mathrm{I}}}{2\,l_{\mathrm{I}}^2}\right)\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\\&-\frac{\omega_k^2-\omega_1^2}{s^2\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot J_v-\frac{\omega_k^2}{s^2}\cdot J_{vw}\cdot\mathrm{tg}\,\gamma_{\mathrm{I}}\Bigg]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_{\mathrm{I}}'=\Bigg[&\left(\frac{J_{\mathrm{II}}''\cdot\cos\gamma_{\mathrm{II}}}{l_{\mathrm{II}}^2}-\frac{J_{\mathrm{I}}''\cdot\cos\gamma_{\mathrm{I}}}{2\,l_{\mathrm{I}}^2}\right)\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\\&+\frac{\omega_k^2-\omega_1^2}{s^2}\cdot J_{vw}+\frac{\omega_k^2}{s^2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot J_w\cdot\mathrm{tg}\,\gamma_{\mathrm{I}}\Bigg]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_{\mathrm{I}}''=\Bigg[&\frac{J_{\mathrm{II}}'}{l_{\mathrm{II}}^2\cdot\cos\gamma_{\mathrm{II}}}-\frac{J_{\mathrm{I}}'}{l_{\mathrm{I}}^2\cdot\cos\gamma_{\mathrm{I}}}\\&+\frac{\omega_k^2-\omega_1^2}{s^2}\cdot\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\cdot J_{vw}+\frac{\omega_k^2}{s^2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot J_w\cdot\mathrm{tg}\,\gamma_{\mathrm{I}}\Bigg]\end{aligned}$$

$$B_{\mathrm{II}}=\frac{2\,J_{\mathrm{II}}''\cdot\sin^2\gamma_{\mathrm{II}}-\lambda\,I_{\mathrm{II}}'\cdot\cos^2\gamma_{\mathrm{II}}}{2\,l_{\mathrm{II}}}$$

$$B_{\mathrm{II}}'=\left(\frac{2\,J_{\mathrm{II}}''+\lambda\,I_{\mathrm{II}}'}{2\,l_{\mathrm{II}}}\right)\frac{\sin 2\gamma_{\mathrm{II}}}{2}\qquad B_{\mathrm{II}}''=\frac{\omega_k\chi_k}{s}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot J_{vw}$$

$$\begin{aligned}B_{\mathrm{I}}=\Bigg[&\frac{4\,J_{\mathrm{II}}''\cdot\sin^2\gamma_{\mathrm{II}}+\lambda\,I_{\mathrm{II}}'\cdot\cos^2\gamma_{\mathrm{II}}}{2\,l_{\mathrm{II}}}\\&+\frac{3\,J_{\mathrm{I}}''\cdot\sin^2\gamma_{\mathrm{I}}}{2\,l_{\mathrm{I}}}+\frac{6-\omega_k^2}{s}\cdot J_v\Bigg]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_{\mathrm{I}}'=\Bigg[&\left(\frac{4\,J_{\mathrm{II}}''+\lambda\,I_{\mathrm{II}}'}{2\,l_{\mathrm{II}}}\right)\frac{\sin 2\gamma_{\mathrm{II}}}{2}\\&+\frac{3\,J_{\mathrm{I}}''}{2\,l_{\mathrm{I}}}\cdot\frac{\sin 2\gamma_{\mathrm{I}}}{2}-\frac{6-\omega_k^2}{s}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot J_{vw}\Bigg]\end{aligned}$$

$$C_{\mathrm{II}}=\left(\frac{2\,J_{\mathrm{II}}''+\lambda\,I_{\mathrm{II}}'}{2\,l_{\mathrm{II}}}\right)\frac{\sin 2\gamma_{\mathrm{II}}}{2}$$

$$C_{\mathrm{II}}'=\frac{2\,J_{\mathrm{II}}''\cdot\cos^2\gamma_{\mathrm{II}}-\lambda\,I_{\mathrm{II}}'\cdot\sin^2\gamma_{\mathrm{II}}}{2\,l_{\mathrm{II}}}$$

$$C_{\mathrm{II}}''=\frac{\omega_k\chi_k}{s}\cdot\frac{\sin\alpha}{2}\left(J_w-\frac{\lambda\,\overline{I}}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}C_{\mathrm{I}}=\Bigg[&\left(\frac{4\,J_{\mathrm{II}}''+\lambda\,I_{\mathrm{II}}'}{2\,l_{\mathrm{II}}}\right)\frac{\sin 2\gamma_{\mathrm{II}}}{2}\\&+\frac{3\,J_{\mathrm{I}}''}{2\,l_{\mathrm{I}}}\cdot\frac{\sin 2\gamma_{\mathrm{I}}}{2}-\frac{6-\omega_k^2}{s}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot J_{vw}\Bigg]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_{\mathrm{I}}'=\Bigg[&\frac{4\,J_{\mathrm{II}}''\cdot\cos^2\gamma_{\mathrm{II}}+\lambda\,I_{\mathrm{II}}'\cdot\sin^2\gamma_{\mathrm{II}}}{2\,l_{\mathrm{II}}}+\frac{3\,J_{\mathrm{I}}''\cdot\cos^2\gamma_{\mathrm{I}}}{2\,l_{\mathrm{I}}}\\&+\frac{6-\omega_k^2}{s}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot J_w+\frac{\chi_k^2\,\lambda\,\overline{I}}{2\,s}\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}\Bigg]\end{aligned}$$

$$D=\frac{\omega_k\chi_k}{s}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot J_{vw}\qquad D'=\frac{\omega_k\chi_k}{s}\cdot\frac{\sin\alpha}{2}\left(J_w-\frac{\lambda\,\overline{I}}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}D_{\mathrm{I}}''=\Bigg[&\frac{2\,J_{\mathrm{II}}'}{l_{\mathrm{II}}}+\frac{3\,J_{\mathrm{I}}'}{2\,l_{\mathrm{I}}}\\&+\frac{6-\chi_k^2}{s}\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot J_w+\frac{\omega_k^2}{s}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\lambda\,\overline{I}}{2}\Bigg]\end{aligned}$$

$$D_{\mathrm{II}}''=\frac{J_{\mathrm{II}}'}{l_{\mathrm{II}}}.$$

Betrachten wir das in Bild 12 dargestellte Schema des vorstehenden Gleichungssystems, dann sehen wir, daß es zweckmäßig ist, aus der ersten Gleichungsgruppe ζ zu berechnen und das Ergebnis in die beiden anderen Gruppen einzusetzen. Durch diesen Vorgang bleibt die zweite Gleichung bezüglich η dreigliedrig. Wir werden also aus ihr diese Werte errechnen und in die letzte Gleichungsgruppe einsetzen. Sie enthält nur noch die Unbekannte ξ als Funktion von y, M_x, M_y und M_z, womit wir durch Rückwärtseinsetzen auch die anderen Knotendrehwinkel erhalten. Je nachdem, wie wir die Ergebnisse dieser Rechnung mit denen der vorher behandelten Gleichungsgruppen (38) zusammenfassen, können wir sämtliche Unbekannten durch die Lastgrößen ausdrücken.

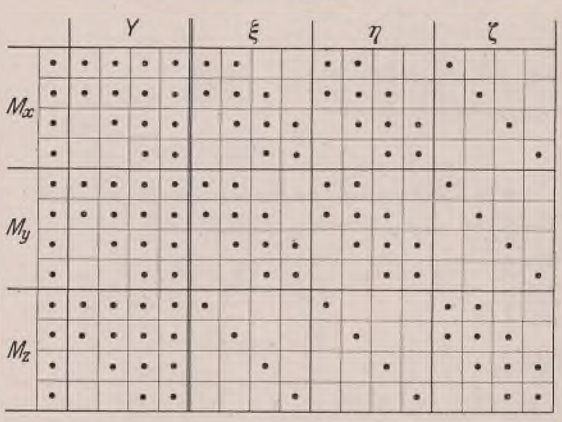


Bild 12.

Damit ist unsere Aufgabe grundsätzlich gelöst.

Um verschiedene Belastungsfälle schnell auswerten zu können, und weil die Lastgrößen in jeder Belastungsstufe paarweise auftreten, empfiehlt es sich, die ganze Rechnung zunächst mit allgemeinen Lastgrößen durchzuführen.

Die Knickfestigkeit der Rahmenkuppel.

Allgemeines.

Die Feststellung zulässiger Beanspruchungen in den Stäben einer Rahmenkuppel nach dem vorstehend entwickelten Verfahren bietet allein nicht die Gewähr für eine ausreichende Standsicherheit des Bauwerks. Die besondere Eigenart der Rahmentragwerke, sich unter der Wirkung solcher Belastungen, die in den Stäben Biegemomente erzeugen, leicht zu verformen, macht es notwendig, die Kuppel auch auf ihre Knicksicherheit zu prüfen. Wie wir sehen werden, ist dies nach den bisher geleisteten Vorarbeiten nicht mehr schwierig.

Wir können drei Arten der Knickverformung unterscheiden. Die erste Art ist eine Verdrehung des Tragwerks um seine Achse. Bei der zweiten Art der Knickung verschieben sich die Ringe unverzerrt in einer Richtung gegeneinander, so daß sich die Kuppelachse krümmt. Als dritte Art der Verformung kommt die Ovalverbiegung der Ringe bei gerade bleibender Kuppelachse in Betracht. Es muß durch Rechnung und Vergleich festgestellt werden, welcher dieser drei Knickfälle jeweils der ungünstigste ist. Eine Voraussage ist bei dem starken Einfluß der Steifigkeitsverhältnisse der Stäbe auf das Ergebnis nicht ohne umfangreiche Erfahrungen möglich.

Erteilen wir einem Tragwerk eine kleine Formänderung, dann verändern sich die Neigungswinkel der Stäbe und der in ihnen wirkenden Stabkräfte. Hierdurch ändern sich auch die Gleichgewichtsbedingungen an den Knotenpunkten gegenüber denen im ursprünglichen Formzustand des Tragwerks. Die sich aus der Gleichgewichtsstörung infolge der Verformung ergebenden zusätzlichen Kraftwirkungen wollen wir Verformungslasten nennen. Sie werden im Knickfalle so groß, daß durch ihre Wirkung die eingeleitete Verformung nicht wieder verschwindet, sondern sich vergrößert.

Die Verformungslasten.

Nachdem wir für die allseitig vollbelastete Kuppel an Hand der früher entwickelten Formeln die Stabkräfte $S'_{(o)}$ und $\overline{S}_{(o)}$ errechnet haben, stellen wir fest, wie sich das Gleichgewicht der Knotenpunkte nach der Systemverzerrung verhält. Wir finden ganz allgemein die Verformungslasten zu

$$(40)\quad \begin{cases} P'_{xi} = \overline{S}_{(o)}\, \varDelta x_i + \varDelta' \left(S'_{(o)}\, \varrho_i \cdot \sin \gamma\right) \\ P'_{yi} = \overline{S}_{(o)} \cdot \cos \dfrac{\alpha}{2} \cdot \varDelta \psi_i + \varDelta' \left(S'_{(o)}\, \varrho_i \cdot \cos \gamma\right) \\ P'_{zi} = \varDelta' \left(S'_{(o)}\, \varphi_i\right). \end{cases}$$

Im ersten Knickfall sind $x = y = 0$ und $z_i = z_0$. Es werden damit $P_x' = P_y' = 0$ und

$$(41)\quad P_z' = \frac{S'_{J+1}}{l_{J+1}} \cdot z_{J+1} - \left(\frac{S'_{J+1}}{l_{J+1}} + \frac{S_J'}{l_J}\right) z_J + \frac{S_J'}{l_J} \cdot z_{J-1}.$$

Bei dem zweiten und dritten Knickfall setzen wir wie früher:

$$x_i = x_{(k)} \cdot \sin k\,\alpha\, i \qquad y_i = y_{(k)} \cdot \sin k\,\alpha\, i$$

und

$$z_i = -\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\chi_k}{\omega_k} \cdot y_{(k)} \cdot \cos k\,\alpha\, i,$$

worin $k = 1$ bzw. 2 ist. Es ergeben sich dann:

$$(42)\quad \begin{cases} P'_{(k)x} = \dfrac{S'_{J+1}}{l_{J+1}} \cdot \operatorname{tg} \gamma_{J+1}\, y_{(k)J+1} \\ \quad - \left(\dfrac{S'_{J+1}}{l_{J+1}} \cdot \operatorname{tg} \gamma_{J+1} + \dfrac{S_J'}{l_J} \cdot \operatorname{tg} \gamma_J + \dfrac{\overline{S}_J\, \omega_k^2}{s_J} \cdot \operatorname{tg} \gamma_J\right) y_{(k)J} \\ \quad + \left[\dfrac{S_J'}{l_J} \cdot \operatorname{tg} \gamma_J + \dfrac{\overline{S}_{J-1}\, \omega_k^2}{s_{J-1}} (\operatorname{tg} \gamma_J - \operatorname{tg} \gamma_{J-1})\right] y_{(k)J-1} \\ \quad + \dfrac{\overline{S}_{J-2}\, \omega_k^2}{s_{J-2}} (\operatorname{tg} \gamma_{J-1} - \operatorname{tg} \gamma_{J-2})\, y_{(k)J-2} + \dots \\ \qquad + \dfrac{\overline{S}_{\mathrm{I}}\, \omega_k^2}{s_1} (\operatorname{tg} \gamma_{\mathrm{II}} - \operatorname{tg} \gamma_{\mathrm{I}})\, y_{(k)\mathrm{I}} \\ P'_{(k)y} = \dfrac{S'_{J+1}}{l_{J+1}} \cdot y_{(k)J+1} \\ \quad - \left(\dfrac{S'_{J+1}}{l_{J+1}} + \dfrac{S_J'}{l_J} + \overline{S}_J \cdot \dfrac{\omega_k^2 - \omega_1^2}{s_J}\right) y_{(k)J} + \dfrac{S_J'}{l_J} \cdot y_{(k)J-1} \\ P'_{(k)z} = -\operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2} \cdot \dfrac{\chi_k}{\omega_k} \left[\dfrac{S'_{J+1}}{l_{J+1}} \cdot y_{(k)J+1} \right. \\ \qquad \left. - \left(\dfrac{S'_{J+1}}{l_{J+1}} + \dfrac{S_J'}{l_J}\right) y_{(k)J} + \dfrac{S_J'}{l_J} \cdot y_{(k)J-1}\right]. \end{cases}$$

Die Verformungslasten sind, wie zu erwarten war, nur von den Verschiebungsgrößen y bzw. $z_{(o)}$ abhängig.

Die Knickbedingung.

Um zu erfahren, bei welchem Vielfachen der normalen Vollbelastung das Tragwerk einknickt, multiplizieren wir die Verformungslasten mit dem Sicherheitsfaktor ν und setzen sie als einzig vorhandene Lasten in die Endgleichungen für die Verschiebungsermittlung ein, wie sie im Abschnitt über die Ermittlung der Unbekannten entwickelt worden sind. Es ergibt sich auf diese Weise eine Gruppe von N Gleichungen, welche außer den N Knotenpunktverschiebungen noch den Sicherheitsfaktor ν als Unbekannte enthalten. Damit nun alle Gleichungen gleichzeitig erfüllt, d. h. zu Null werden können, ist es notwendig, daß die Determinante der Beiwerte aller Verschiebungsgrößen zu Null werden muß.

Aus dieser Knickbedingung finden wir die Sicherheitszahl in Form einer Gleichung N^{ten} Grades, deren kleinste reelle positive Wurzel der gesuchte Sicherheitsfaktor ist.

Hiermit ist auch die zweite Aufgabe gelöst.

Literaturverzeichnis.

W. L. Andrée, Das BU-Verfahren (R. Oldenbourg, 1920).

Fr. Bleich und Melan, Die gewöhnlichen und partiellen Differenzengleichungen der Baustatik (Jul. Springer, 1927).

P. Funk, Die linearen Differenzengleichungen und ihre Anwendung in der Theorie der Baustatik (Jul. Springer, 1920).

W. Kaufmann, Beitrag zur Berechnung räumlicher Fachwerke von zyklischer Symmetrie mit biegungssteifen Ringen und Meridianen (Z. a. M. M. 1921).

L. Mann, Über zyklische Symmetrie in der Statik mit Anwendung auf das räumliche Fachwerk (Der Eisenbau 1911).

H. Marcus, Beitrag zur Theorie der Rippenkuppel — Die Rippenkuppel mit gelenkartiger ebener Stützung (Armierter Beton 1912) — Die Rippenkuppel mit gelenkiger räumlicher Stützung (Der Eisenbau 1912) — Die Rippenkuppel mit ebener und räumlicher Einspannung (Z. f. Bauwesen 1912) — Studien über strebenlose Raumfachwerke und verwandte Gebilde (Jul. Springer, 1914).

K. Mautner, Beitrag zur Theorie der in Eisenbeton gebräuchlichen Form der Rippenkuppel (Wilh. Ernst & Sohn, 1911 und B. u. E. 1912).

H. Reißner, Anwendung endlicher trigonometrischer Reihen (Arch. f. Math. u. Phys. 1908).

A. Rudakow, Berechnung der räumlichen symmetrischen Vieleckrahmen für beliebige Belastung (Ing.-Archiv 1931).

Vorschlag und Kritik einer Bemessungsformel bei außermittig beanspruchten Knickstäben.

Von Professor Dr. Dr.-Ing. **Willy Gehler**, Dresden.

(Schluß aus Heft 14/15.)

c) Außer dem soeben erörterten Grenzfall $\lambda = 0$ (außermittiger Druck ohne Knickgefahr) bringt uns auch der andere Grenzfall $m = 0$ eine Veranschaulichung des Wesens dieser „Grundlösung". Falls das Fließen am Druckrand beginnt, lautet Gl. (31) [nach Gl. (32)]:

$$(34)\quad \lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{Kr}} \left\{1 - \frac{m\, \sigma_{Kr}}{\sigma_F - \sigma_{Kr}}\right\}$$

oder $\left(1 - \dfrac{\lambda^2 \sigma_{Kr}}{\pi^2 E}\right)(\sigma_F - \sigma_{Kr}) = m\, \sigma_{Kr}$ oder $\varphi_E\, \varphi_Q = m\, \sigma_{Kr}$.

Wird $m = 0$, so erhält man entweder $\varphi_Q \equiv \sigma_F - \sigma_{Kr} = 0$, also die Gleichung der Quetschgrenzen-Geraden AQ (Bild 3c) oder

$$\varphi_E \equiv 1 - \frac{\lambda^2 \sigma_{Kr}}{\pi^2 E} = 0,$$

also die bekannte Gleichung der Eulerhyperbel QC (Bild 3c).

d) Die vorliegende Aufgabe wird aber vor allem dadurch verwickelt, daß man (nach Bild 8a bis c) zwischen drei verschiedenen Verzerrungszuständen genau unterscheiden muß, was an einem sehr

einfachen Sonderfall erläutert werden möge. Die drei möglichen Verzerrungszustände sind:

Verzerrungszustand A (Bild 8a) = Fließen am Druckrand,
Verzerrungszustand B (Bild 8b) = Fließen am Zugrand,
Verzerrungszustand C (Bild 8c) = Fließen beiderseits.

Beginnt im besonderen Falle das Fließen sowohl am Druckrand als auch zufällig gleichzeitig am Zugrand, so ist nach Bild 9, da

$$\frac{h}{2} = \frac{e_1 + e_2}{2}, \quad \text{also} \quad \frac{h}{2} - e_1 = \frac{e_2 - e_1}{2} \quad \text{ist,}$$

$$\frac{\sigma_G}{\sigma_F} = \frac{MS}{MD} = \frac{\frac{h}{2} - e_1}{\frac{h}{2}} = \frac{e_2 - e_1}{h}$$

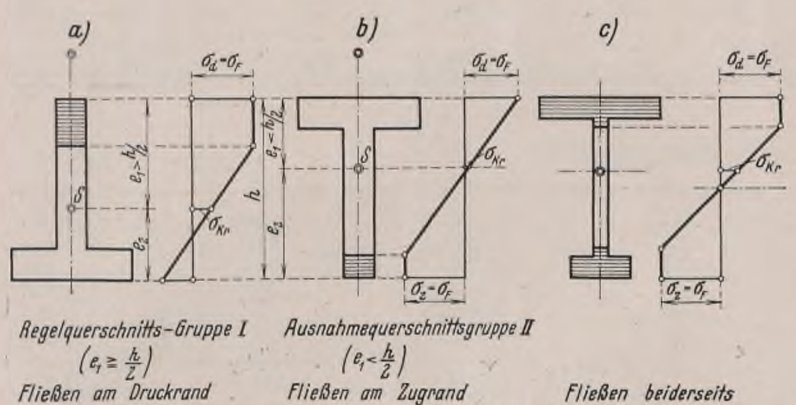


Bild 8a bis c.

und die Druckspannung im Schwerpunkt

(35) $$\sigma_G = \sigma_F \cdot \frac{e_2 - e_1}{h}.$$

Für den Verzerrungszustand A (Bild 8a) ist entweder bei einem symmetrischen Querschnitt (Profil 2 bis 6, Übersicht II) $e_1 = \frac{h}{2}$, so daß nach Gl. (35) $\sigma_G = 0$ wird oder $e_1 > \frac{h}{2}$. Dann würde aber σ_G negativ werden, scheidet also in unserer σ_K-λ-Darstellung (Bild 3) der Eulerhyperbel aus. Umgekehrt ist für den Verzerrungszustand B mit $e_1 < \frac{h}{2}$ nach Gl. (35) σ_G positiv, ergibt also einen reellen Punkt G (Bild 3c). Dies führt zu folgender Veranschaulichung:

Wandert Punkt G' (Bild 3a) mit steigender Laststufe auf der Hookeschen Geraden, so steigt der entsprechende, stets gleich hoch liegende Punkt G auf der Eulerhyperbel empor (s. Bild 3c). Da (nach Bild 9) in diesem Sonderfall das Fließen gerade am Druckrand und am Zugrand zugleich beginnt, gehört dieser besondere Punkt G, dessen Ordinate σ_G nach Gl. (35) leicht zu bestimmen ist, sowohl dem Verzerrungszustand A, als auch B an, endlich aber auch dem Zustand C, weil unser Bild 9 ja gerade der Ausgangsfall für Bild 8c ist. Die zugehörige Abszisse λ_G (Bild 3c) erhält man dann unmittelbar aus der bekannten Gleichung der Eulerhyperbel. Alle Punkte zwischen G und $P = Q$, die auf der Eulerhyperbel liegen, gehören somit zum Zustand A und entsprechend alle Punkte rechts von G zum Zustand B.

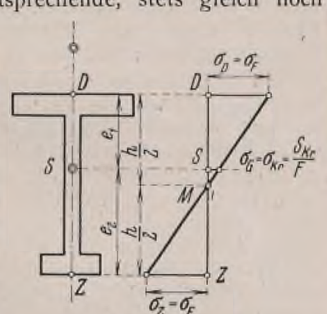


Bild 9.

Folgerungen: Das ganze σ_K-λ-Feld kann man nun, wie dieses besonders einfache Beispiel erkennen läßt, in die drei Verzerrungsbereiche A, B und C aufteilen. Jede σ_{Kr}-λ-Linie der Übersicht II hat in jedem dieser Bereiche einen bestimmten Verlauf (einen bestimmten Ast), also an der Grenze zweier Bereiche einen Knickpunkt. (Daraus folgt z. B., daß unsere berechneten m_x-λ-Linien ebenfalls Knickpunkte aufweisen müssen.)

Während für die Regel-Querschnittsgruppe I nur der Bereich A in Betracht kommt, weisen die σ_{Kr}-λ-Linien für die Ausnahme-Querschnittsgruppe II jeweils zwei solche verschiedene Äste auf mit einem Grenzpunkt G, dessen Werte λ_G (bzw. auch σ_G) nach Jäger (Jezek) in Übersicht II eingetragen sind.

So wertvoll diese Studien für die Erkenntnis der verwickelten Zusammenhänge sind, so führen sie doch unbedingt zu der Überzeugung, daß wir bei der Nutzanwendung nur nach der Regel-Querschnittsgruppe I und nach der Ausnahme-Querschnittsgruppe II, nicht aber nach den vielen Querschnittstypen unterscheiden können.

IV. Die Festlegung der Grenzlinie (der m_x-λ-Geraden) mit Hilfe der Grundgleichung.

Die Erkenntnis des Aufbaues der Grundgleichung (28) in der Form

(36) $$\lambda^2_{Kr} = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{Kr}} \left\{1 - X_a + c_1 X_a^2\right\},$$

wie sie bei den meisten Profiltypen der Regel-Querschnittsgruppe I nach Übersicht II zutrifft, kann uns nun dazu dienen, die Eigenart und den Verlauf unserer neuen m_x-λ-Grenzlinie genauer zu erkennen.

Verfahren:

1. Wir wählen (in Bild 10) für $\lambda = 100$ jeweils $m_x = m_a$, also für die betrachteten drei Fälle $m_{x\,100} = 0{,}5$ bzw. 1,0 bzw. 2,0 (s. die Punkte $V_{0,5}$, $V_{1,0}$ und $V_{2,0}$).

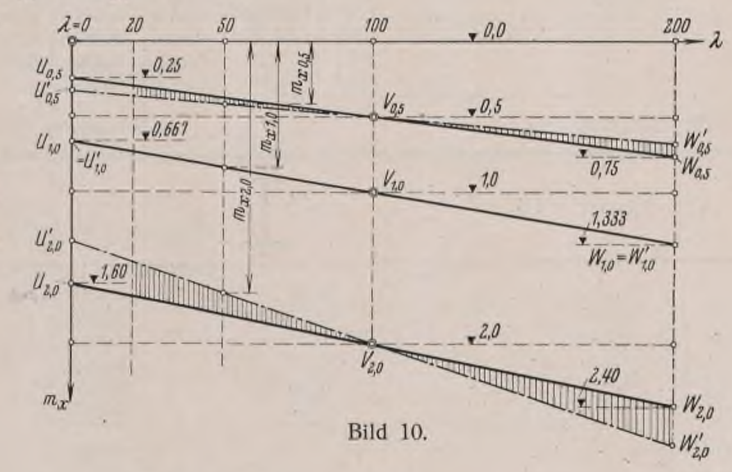


Bild 10.

2. Aus Gl. (36) folgt mit $\alpha\,\omega = \frac{\sigma_F}{\sigma_{Kr}}$:

(37) $$\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2 = \frac{\pi^2 E}{100^2 \sigma_F} \cdot \alpha\,\omega \left\{1 - X_a + c_1 X_a^2\right\} = \frac{\pi^2 E}{100^2 \sigma_F} \cdot \alpha\,\omega\,K,$$

wobei nach Gl. (29) das Elementarglied:

(38) $$X_a = \frac{m}{\alpha\,\omega - 1}$$

ist. Da der Hebelwert, der nach DIN E 4114 bereits in ω enthalten ist, (nach Gl. 19) $m_0 = 0{,}75\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2$ beträgt, ist hier (nach Gl. 20) wiederum:

$$m = m_0 + m_a = 0{,}75\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2 + m_a.$$

Ferner ist (nach Gl. 13) $\alpha\,\omega = \omega + m_x$ und für $\lambda = 100$ der Wert $m_x = m_a$ gewählt worden (s. die Punkte V in Bild 10). Daher kann aus Gl. (37) nunmehr die einzige Unbekannte c_1 berechnet werden.

3. Dann ist z. B. für $\lambda = 0$ der Wert $\alpha\,\omega_o = \omega + m_{xo} = 1 + m_{xo}$ (s. Bild 4) und nach Gl. (38) $X_a = m : m_{xo}$, ferner

$$m = 0{,}75\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2 + m_a = 0 + m_a,$$

also $X_a = m_a : m_{xo}$ und nach Gl. (37):

$$K = 0 = 1 - X_a + c_1 X_a^2,$$

woraus man X_a erhält und damit auch $m_{xo} = \frac{m_a}{X_a}$.

4. In gleicher Weise ergibt sich sinngemäß für $\lambda = 200$ der Wert m_{x200}, wenn

$$\alpha\,\omega = \omega_{200} + m_{x200} = 7{,}595 + m_{x200}$$

in Gl. (37) eingesetzt wird.

5. Hiernach wurden die Werte der Übersicht III gefunden und in Bild 10 die entsprechenden Linien UVW für $m_a = 0{,}5$ bzw. 1,0 bzw. 2,0 eingetragen.

Übersicht III.

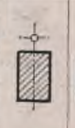
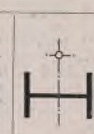
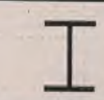
m_a	c_1	m_{x0}	m_{x100}	m_{x200}	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m_{x200} - m_{x0}}{200}$
0,5	0,25	0,25	0,5	0,75	0,50 : 200 = 0,25 : 100 = λ : 400
1,0	0,22	0,67	1,0	1,33	0,66 : 200 = **0,33 : 100** = λ : 300
2,0	0,162	1,60	2,0	2,40	0,80 : 200 = 0,40 : 100 = λ : 250

Folgerungen:

a) Die Werte $c_1 = 0{,}25$ bis 0,162 stimmen mit den Werten c_1 der Übersicht II nach der Größenordnung befriedigend überein.

b) Die Endpunkte der Ordinaten m_x (in Bild 10), nämlich m_{x0}, m_{x100} und m_{x200}, liegen jeweils mit völlig hinreichender Annäherung auf einer Geraden, so daß unsere m_x-λ-Linie mit Recht als Gerade gewählt wird. Diese Feststellung ist durch den Grad der Gleichungen zu veranschau-

Übersicht IV. Mittelwerte der m_x-Werte nach Übersicht I.

m_a	$\lambda = 0$					$\lambda = 100$					$\lambda = 200$				
Untergruppe IA				i. M.	$\frac{m_x}{m_a}$ i. M.				i. M.	$\frac{m_x}{m_a}$ i. M.				i. M.	$\frac{m_x}{m_a}$ i. M.
0,25	0,09	0,10	0,12	0,103	**0,412**	0,21	0,19	0,27	0,223	**0,892**	0,14	0,14	0,14	0,14	0,560
0,50	0,18	0,21	0,24	0,210	**0,420**	0,44	0,38	0,50	0,440	**0,870**	0,40	0,40	0,40	0,40	0,800
0,75	0,28	0,30	0,36	0,313	**0,417**	0,64	0,60	0,71	0,650	**0,867**	0,67	0,67	0,67	0,67	0,893
1,0	0,39	0,42	0,49	0,433	**0,433**	0,82	0,74	0,94	0,833	**0,833**	0,97	0,97	0,97	0,97	0,970
1,5	0,62	0,61	0,74	0,657	**0,438**	1,20	1,08	1,35	1,210	**0,808**	1,29	1,29	1,29	1,29	0,860
2,0	0,86	0,87	1,00	0,910	**0,455**	1,55	1,40	1,71	1,553	**0,776**	1,63	1,63	1,63	1,63	0,815
Mittelwert $m_x : m_a$					**0,429**					**0,842**	(ungenau)				0,818
Untergruppe IB															
0,25	0,22				0,881	0,41				1,640	0,40				1,600
0,50	0,44				0,880	0,67				1,340	0,67				1,340
0,75	0,68				0,907	0,95				1,268	0,97				1,293
1,0	0,90				0,900	1,17				1,170	1,29				1,290
1,5	1,35				0,900	1,64				1,093	1,63				1,088
2,0	1,79				0,895	2,07				1,035	2,00				1,000
Mittelwert $m_x : m_a$					**0,892**					**1,258**	(ungenau)				1,270
Gesamtmittel:	$m_x : m_a = \frac{1}{2}(0{,}429 + 0{,}892) =$				0,660	$m_x : m_a = \frac{1}{2}(0{,}842 + 1{,}258) =$				1,050	$m_x : m_a = \frac{1}{2}(0{,}818 + 1{,}270) =$				1,044
Vorschlag: $m_x = m_a\left\{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{\lambda - 100}{100}\right\}$	$m_x : m_a = 1 - \frac{1}{3} =$				0,667	$m_x : m_a = 1 + 0 =$				1,0	$m_x : m_a = 1 + \frac{1}{3} =$				1,33

lichen. Die Grundgleichungen (28) sind Funktionen dritten und vierten Grades von λ. Da nun nach Gl. (19) $m_0 = 0{,}75\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2$, also eine quadratische Beziehung bereits in den ω-Werten enthalten und damit abgetrennt ist, wird es verständlich, daß für m_x angenähert eine quadratische bzw. lineare Beziehung übrigbleiben kann.

c) Geht man in Bild 10 von dem mittleren Fall $m_a = 1{,}0$ aus, so erkennt man, daß bei kleinerem Werte ($m_a < 1{,}0$) die berechnete m_x-λ-Gerade flacher und bei größeren Werten ($m_a > 1{,}0$) steiler geneigt ist.

V. Die zahlenmäßige Festlegung der Neigung der m_x-λ-Geraden.

In Übersicht IV sind die Werte $m_x : m_a$ nochmals zusammengestellt, wie sie sich aus den genauen Werten von Jäger (Jezek) nach Übersicht I ergeben. Da aus Bild 5 zu erkennen ist, daß sich die m_x-Werte für die I-Träger von denen der drei übrigen Profile deutlich absondern, wurden hier die beiden Untergruppen IA und IB getrennt behandelt und bei der Mittelwertbildung die wichtige Gruppe IB mit der anderen gleich bewertet. Das Ergebnis dieser zahlenmäßigen Feststellung ist endlich unsere Gleichung (13a)

$$m_x = m_a\left\{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{\lambda - 100}{100}\right\}. \tag{39}$$

Gegen den etwaigen Einwand, daß die m_x-Werte für die Gruppe IB nicht auf „der sicheren Seite liegen", ist zu erwidern, daß sie m. E. durch diese Grundlösung nicht zuverlässig erfaßt werden können (s. oben unter III, 1), daß ferner die Werte von $\lambda = 0$ bis 40 praktisch ausscheiden, und daß endlich

für m_a =	0,25	0,50	0,75	1,0	1,5	2,0
der Fehler (in %) =	6,2	7,8	9,3	9,8	10,4	9,9

beträgt, also selbst bei ihrer vollen Bewertung nur gering sein würde.

VI. Aus Übersicht IC und Bild 5 ging ferner hervor, daß die m_x-λ-Linien für den Grundfall des Rechteckquerschnitts für St 37 und St 52 mit hinreichender Annäherung die gleichen sind, so daß Gl. (39) für beide Baustoffe gilt.

D. Schlußwort.

Nachdem die bekannten Knickversuche des Deutschen Stahlbau-Verbandes[16]) unter Mitwirkung von Herrmann Zimmermann die Eulergleichung voll bestätigt und zur Erkenntnis der Bedeutung der Fehlerhebel geführt hatten, blieb hauptsächlich noch das Knickproblem bei außermittigem Kraftangriff zu lösen. Professor Roš und seine Mitarbeiter[17]) haben das Verdienst, durch die Züricher Knickversuche den ersten bedeutsamen Beitrag hierzu geliefert zu haben.

Durch die grundlegenden Studien der Wiener Schule unter Führung von Hartmann, insbesondere auch durch die scharfsinnigen Forschungsarbeiten von Chwalla, wurde in den letzten zehn Jahren das verwickelte Problem der außermittig beanspruchten Knickstäbe so weit geklärt, daß 1937 K. Jäger (Jezek), Wien, mit Hilfe der vereinfachenden „Grundlösung" den gesamten Stoff elasto-statisch erschöpfend bearbeiten konnte. Aus allen diesen gründlichen Arbeiten konnte aber eine einfache Nutzanwendung für unsere Bestimmungen deshalb noch nicht gezogen werden, weil die bisher übliche Darstellung der Ergebnisse in dem σ_K-λ-System stets zu Gleichungen dritten und vierten Grades führt. Bei der Bearbeitung meiner Erläuterungen[18]) wurden nun zwei praktisch nützliche Gedanken gefunden, nämlich zunächst die wesentliche Vereinfachung sämtlicher Gleichungen durch die Transformation aus dem σ_K-λ-System in das ω-λ-System und sodann das anschauliche sogenannte Additionsgesetz für den erforderlichen Querschnitt, der sich durch Summieren des reinen Druckquerschnitts und des zusätzlichen Knick- und Biegequerschnitts ergibt. (Die Ordinaten der Teilflächen im ω-λ-System können dann als spezifische Teilflächen, bezogen auf den reinen Druckquerschnitt, aufgefaßt werden.) Die Feststellung, daß bei mittigem Druck durch diese Transformation die kubische σ_K-λ-Hyperbel in die einfache ω-λ-Parabel überging, ließ eine ähnliche vereinfachende Wirkung durch Anwendung dieses Mittels bei dem vorliegenden verwickelteren Problem erhoffen, was sich tatsächlich bestätigt hat. Auf Grund dieser einfachen und anschaulichen Darstellung der bisherigen Forschungsergebnisse wurde unser Vorschlag und seine genaue Begründung ermöglicht.

Oft bleiben die Ergebnisse tiefgründiger Studien deshalb auf einen kleinen Kreis von Wissenschaftlern beschränkt, weil es nicht gelingt, sie einfach und anschaulich darzustellen. Erst durch die Anschauung prägen sie sich in den Gesichtskreis und in das Gedächtnis ein und können zum Allgemeingut der Fachwelt werden.

[16]) W. Rein, Versuche zur Ermittlung der Knickspannungen für verschiedene Baustähle. Heft 4 der Berichte des Ausschusses für Versuche im Stahlbau. Berlin 1930, Jul. Springer.

[17]) M. Roš, Bericht auf der Internat. Tagung für Brücken- und Hochbau in Wien 1928, S. 293, und Vorbericht für den 1. Internat. Kongreß für Brücken- und Hochbau in Paris 1932, S. 84.

[18]) Fußnote 1 a. a. O., II. Teil, S. 18 ff.

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt.
Verlag: Wilhelm Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W 9.
Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

DER STAHLBAU

Schriftleitung:
Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule
Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599
Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61
Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage zur Zeitschrift **DIE BAUTECHNIK** Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

13. Jahrgang | BERLIN, 6. September 1940 | Heft 19/20

Hallenbauten für ein Walzwerk.

Von Regierungsbaumeister Studienrat **Walter Meinck.**

Der so überaus starke Eisenbedarf unseres Vaterlandes machte nicht allein die Neuerrichtung entsprechender Werke, sondern auch eine Leistungssteigerung bereits bestehender Anlagen notwendig. So wurde u. a. die Grob- und Mittelstraße eines älteren Walzwerkes nach neuzeitlichen Gesichtspunkten ausgebaut und somit leistungsfähiger gestaltet. Zu diesem Zweck wurden bereits bestehende Hallen versetzt und umgebaut, neue Hallen wurden dazu errichtet, so daß nunmehr die größte Länge der Hallen dieses Werkes 300 m beträgt und die größte Breite 75 m.

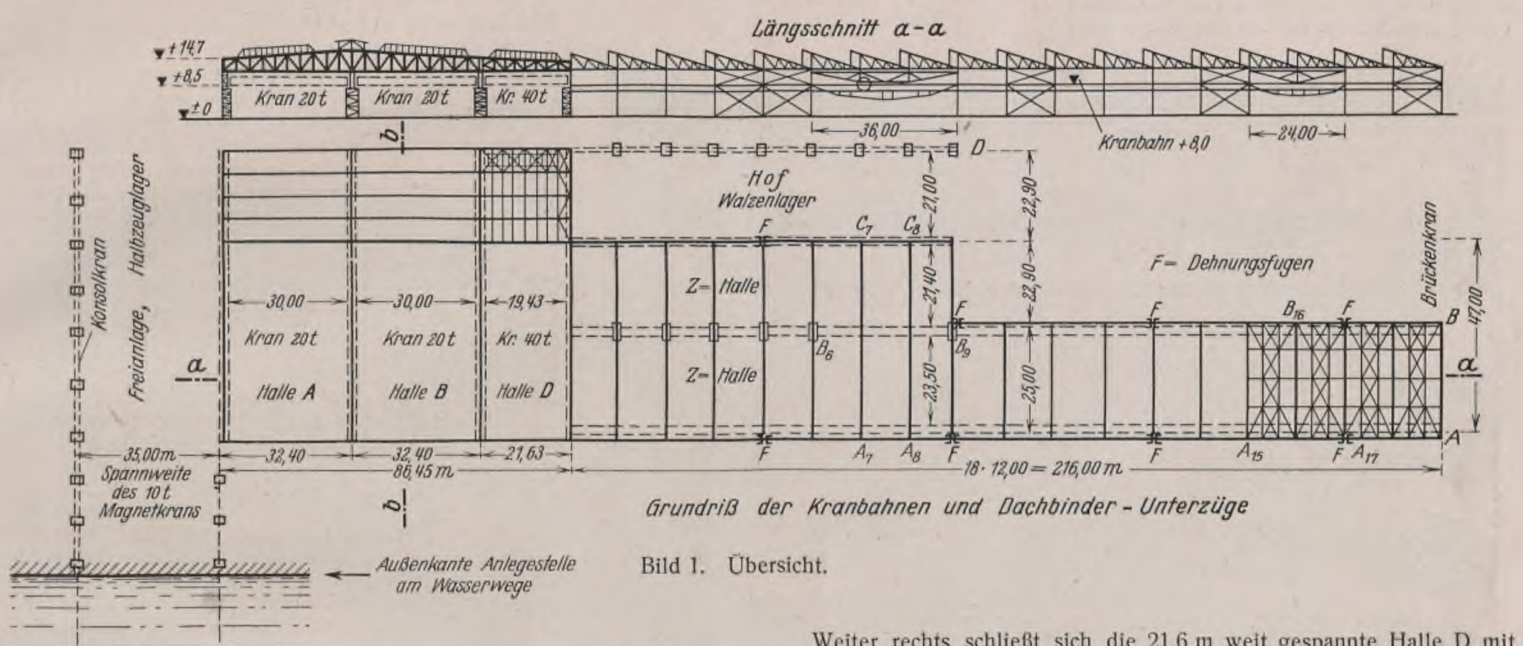


Bild 1. Übersicht.

Gleichzeitig wurde die Gelegenheit wahrgenommen, das Werk an das Binnenwasserstraßennetz anzuschließen, um ihm die Möglichkeit zu geben, seine Erzeugnisse auf dem billigen Wasserwege nicht nur bis in die entferntesten Teile des deutschen Vaterlandes, sondern möglichst noch über seine Grenzen hinaus zu verfrachten.

Bild 1 zeigt die Hallenanordnung nebst der Verladeeinrichtung an der Wasserstraße im Grundriß und Längsschnitt, Bild 2 die Ansicht von der Wasserseite her. Die Aufstellung der ausgedehnten Hallen hat nur $4^1/_4$ Monate gedauert. In den Bildern links befindet sich das Halbzeuglager. Es liegt im Freien und wird von einem Magnetlaufkran von 35 m Stützweite und 10 t Tragfähigkeit bestrichen. Der Laufkran fährt über zwei im Lageplan nicht mit eingezeichnete Stoßöfen hinweg. Die Kranbahn kragt, wie aus der Ansicht von Bild 2 deutlich zu ersehen ist, über die Schiffsanlegestelle am Wasserwege vor. Bild 3 zeigt die genauere Ausbildung der am Kanal stehenden Kragstütze dieser Kranbahn. An der linken Stützenreihe des Laufkranes ist zur Bedienung der Stoßöfen noch eine weitere Laufbahn für einen Konsolkran von 6 t Tragfähigkeit angeordnet.

Neben der vorerwähnten Magnetkranbahn liegen die beiden je 32,4 m weit gespannten Hallen A und B mit je einem Laufkran von je 20 t Tragfähigkeit und 30 m Stützweite.

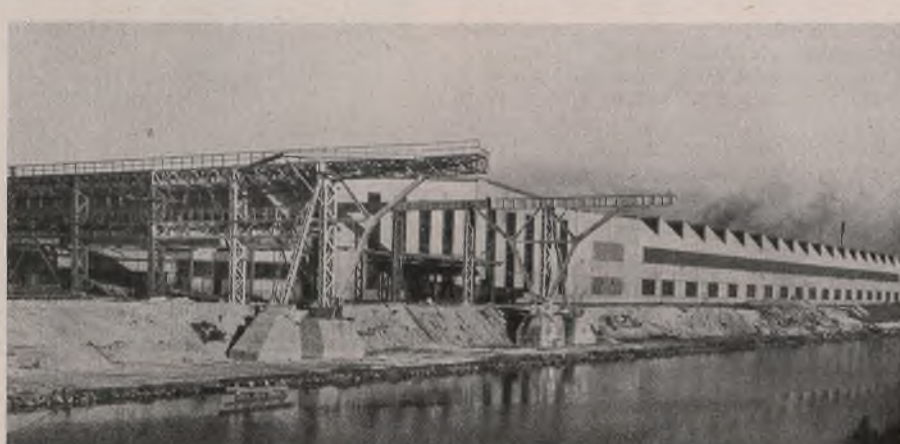


Bild 2. Ansicht der Freianlage und der Hallen, von der Wasserseite gesehen.

Weiter rechts schließt sich die 21,6 m weit gespannte Halle D mit einem 40 t-Laufkran von 19,43 m Stützweite an.

Die drei vorgenannten Hallen tragen, wie aus dem Längsschnitt von Bild 1 hervorgeht, ein gemeinsames Dach, dessen Binder über die Hallen A, B und D gespannt sind (Bild 4). Diese Binder liegen in dem am Wasser liegenden Teil der Hallen in 6,25 m, in dem dem Wasser abgelegenen Teil in 5,725 m Abstand. Sie sind auf Fachwerkträgern gelagert, welche ihrerseits, statisch bestimmt, auf 25,0 bzw. 22,9 m voneinander entfernten Zwischenstützen ruhen. Bild 5 zeigt diese Stützenreihe, welche außer dem vorerwähnten Parallelträger für das Dach noch einen darunterliegenden zweiten Parallelträger trägt.

Da letzterer die Kranbahn der Halle B aufnimmt, sind seine Endwiderlager portalartig ausgebildet, um die oben wirkenden Bremskräfte des Kranes auf die untenliegenden Stützenfüße übertragen zu können. Zwischen den beiden benachbarten Dach-

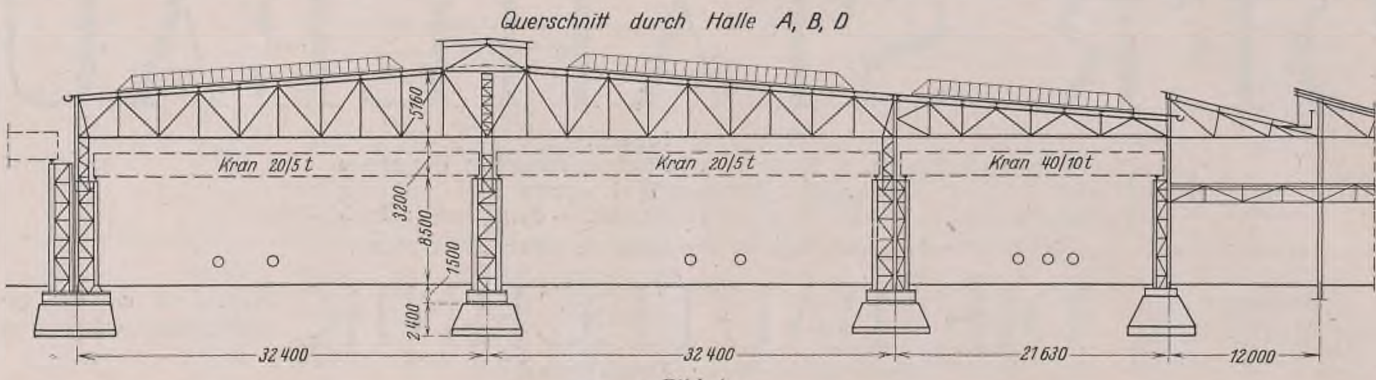


Bild 4.

bindern der Giebelseiten dieser Hallen liegt in Höhe der Binderuntergurte der waagerechte Windverband.

An die vorerwähnten Hallen A, B und D schließt sich, wie aus Bild 1 ersichtlich ist, die Gruppe der neu erbauten Z-Hallen parallel zum Wasserwege an, die also in der in Bild 2 gezeigten Gebäudefront liegen. Die längere der beiden Z-Hallen wird von einem 10 t-Laufkran von 23,5 m Spannweite bestrichen. Sie soll später einen zweiten solchen Laufkran auf derselben Fahrbahn bekommen. Bild 6 zeigt die Innenansicht dieser Halle gegen die Halle D gesehen. Bereits aus dem Bild ist die gute Belichtung der Halle durch Sägedächer zu erkennen, welche von Norden her erfolgt und infolge der senkrecht liegenden

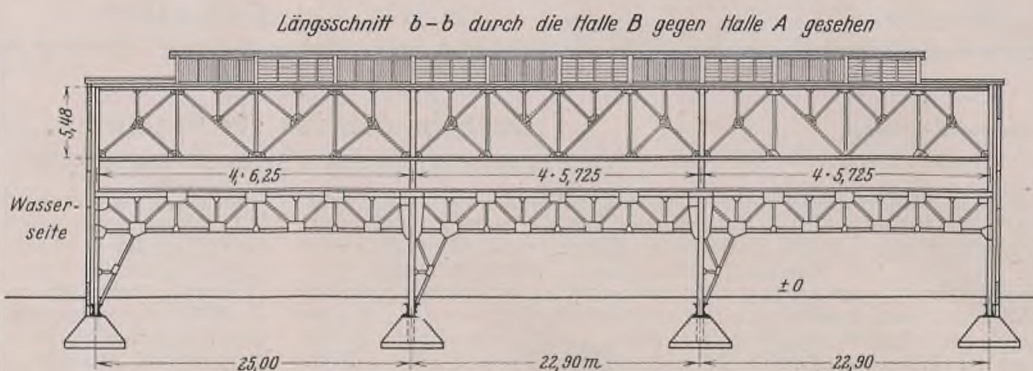


Bild 5.

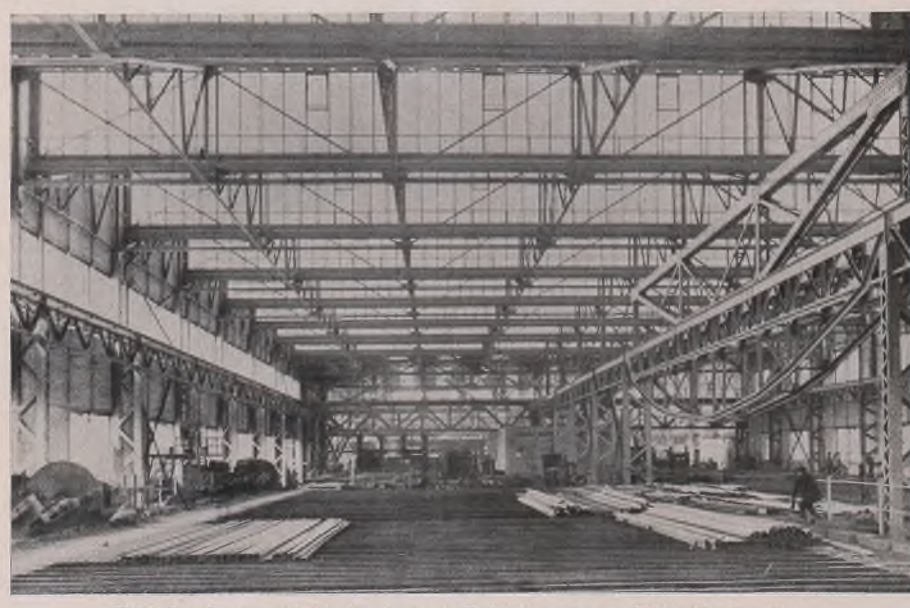


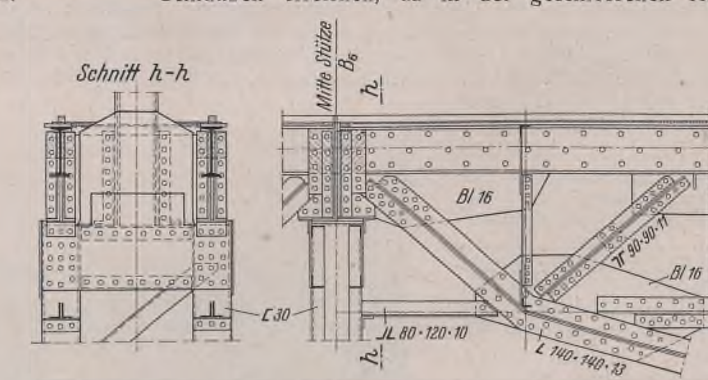
Bild 6. Innenansicht der langen Z-Halle, gegen Halle D gesehen.

Verglasung eine möglichst geringe Beeinträchtigung durch Schnee und Staubablagerung erwarten läßt. Im Hintergrunde sieht man dann noch den Kranbahnträger der Halle D. Neben der 216 m langen Z-Halle liegt noch eine kürzere von 96 m Länge, welche später ebenfalls zwei 10 t-Laufkrane von 21,4 m Spannweite erhalten soll. An diese kürzere Z-Halle schließt sich das nicht überdachte Walzenlager an mit einem 15 t-Laufkran von 21 m Stützweite, dessen im Freien stehende Laufbahn auf Stützen ruht, welche bei einer Erweiterung des Werkes gegebenenfalls als Hallenstützen dienen können.

Am Ende der langen Z-Halle läuft im Freien in Geländehöhe ein großer Brückenkran von 47 m Stützweite für Eisenbahnverladung.

Für die in sämtlichen Hallen angeordneten Laufkrane mußten sämtliche Binderstützen gleichzeitig als Kranbahnstützen ausgebildet werden. Bild 7 zeigt die Stütze der der Wasserstraße benachbarten Reihe, die im Lageplan (Bild 1) mit *A* bezeichnet ist, von drei Seiten. Die Stütze besteht im unteren Teile aus je zwei beiderseits verstrebten ⊏⊐ 30, welche die Gurtungen des Stützenfachwerks bilden. Sie hat in sechs Ebenen Dreieckverstrebungen, und zwar kommen in der Höhe auf ein Dreieck der Hauptfachwerke in der Längsrichtung immer drei Dreiecke der Querrichtung. Auch Bild 6 zeigt deutlich die großen Dreiecke der Hauptverstrebung und an der Stütze rechts die kleinere Verstrebung der Querrichtung.

Die in 6,25 m Abstand voneinander stehenden Sägedachbinder der Z-Hallen werden von 3,80 m hohen gegliederten Parallelträgern getragen, deren Abstand von 12 m in Bild 6 zwar stark verkürzt erscheint, deren dünne Schrägstäbe aber deutlich erkennbar sind. Diese Parallelträger ruhen auf Stützen, welche in den drei Reihen A, B und C angeordnet sind (vgl. Lageplan 1), und welche in der wasserseitig gelegenen Halle 25,0 und in der anderen 22,9 m Abstand haben. Die in Bild 6 deutlich sichtbaren, aus ⊐⊏ 14 gebildeten Untergurte dieser Parallelträger bilden eine feste Verbindung der Stützenköpfe. Es sind also keine beweglichen Auflager vorhanden, sondern der auf die Längswand treffende Winddruck wird durch die Trägeruntergurte auf die drei Stützenreihen verteilt, und das System wird zweifach statisch unbestimmt. Nur die im Grundriß (Bild 1) mit A_7 C_7 und A_8 C_8 bezeichneten Parallelträger sind in der Mitte nicht auf Stützen gelagert, sondern auf einem in der Stützenreihe B liegenden, die Stützen ersetzenden, trapezförmig gegliederten Unterzug von 36 m Spannweite, der in Bild 6 rechts erkennbar ist. Ein ähnlicher Unterzug von nur 24 m Stützweite und dreieckförmig liegt an Stelle der Stütze B_{16} in der Wand der langen Z-Halle. Aus Bild 6 ist ferner zu erkennen, daß der durch die ganze Halle laufende Parallelträger der Kranbahn in dem 36 m weit gespannten Felde durch eine parabelförmige Vieleckunterspannung verstärkt worden ist. Die Beweglichkeit des einen Auflagers ließ sich trotz der großen Stützweite mit Langlöchern und Schrauben erreichen, da in der geschlossenen Halle



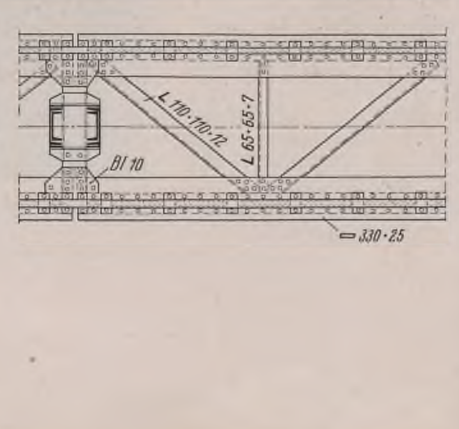


Bild 8.
Festes Auflager des 36 m weit gespannten Kranbahnträgers.

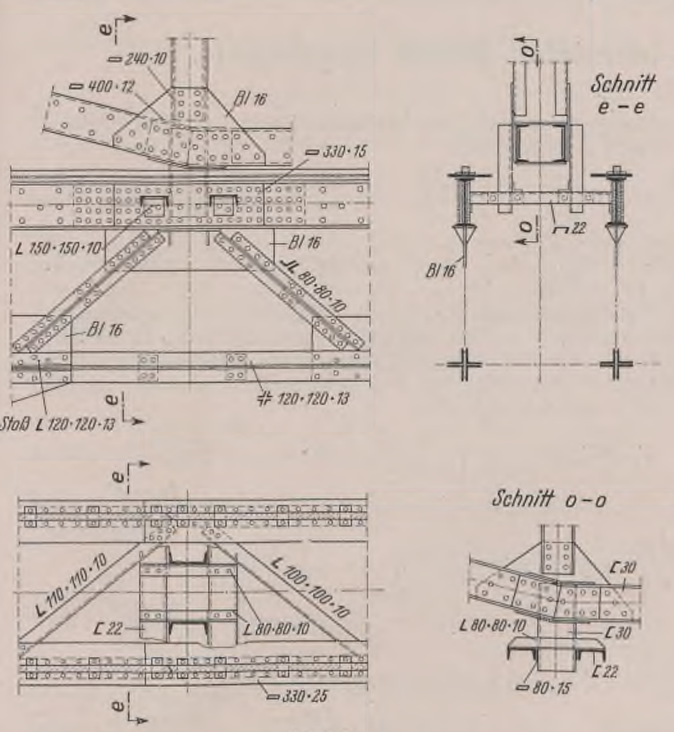


Bild 9.
Verschiebbare Verbindung des Kranträgerobergurtes mit dem Untergurt des darüberliegenden Trapezträgers.

nicht mit starken Wärmeschwankungen zu rechnen ist. Bild 8 zeigt das feste Auflager des 36,0 m weit gespannten Kranträgers auf Stütze B_6 mit der Höherführung derselben zur Aufnahme des obenliegenden Trapezträgers, Bild 9 die verschiebbare Verbindung des Kranträgerobergurtes mit dem Untergurt des darüberliegenden Trapezträgers.



Bild 3. Kragstütze.

Zur Aufnahme der Windkräfte und zugleich der Bremskräfte aus den Kranbahnen sind, wie Bild 1 zeigt, einzelne Felder zwischen den Stützen durch Kreuzverbände ausgesteift.

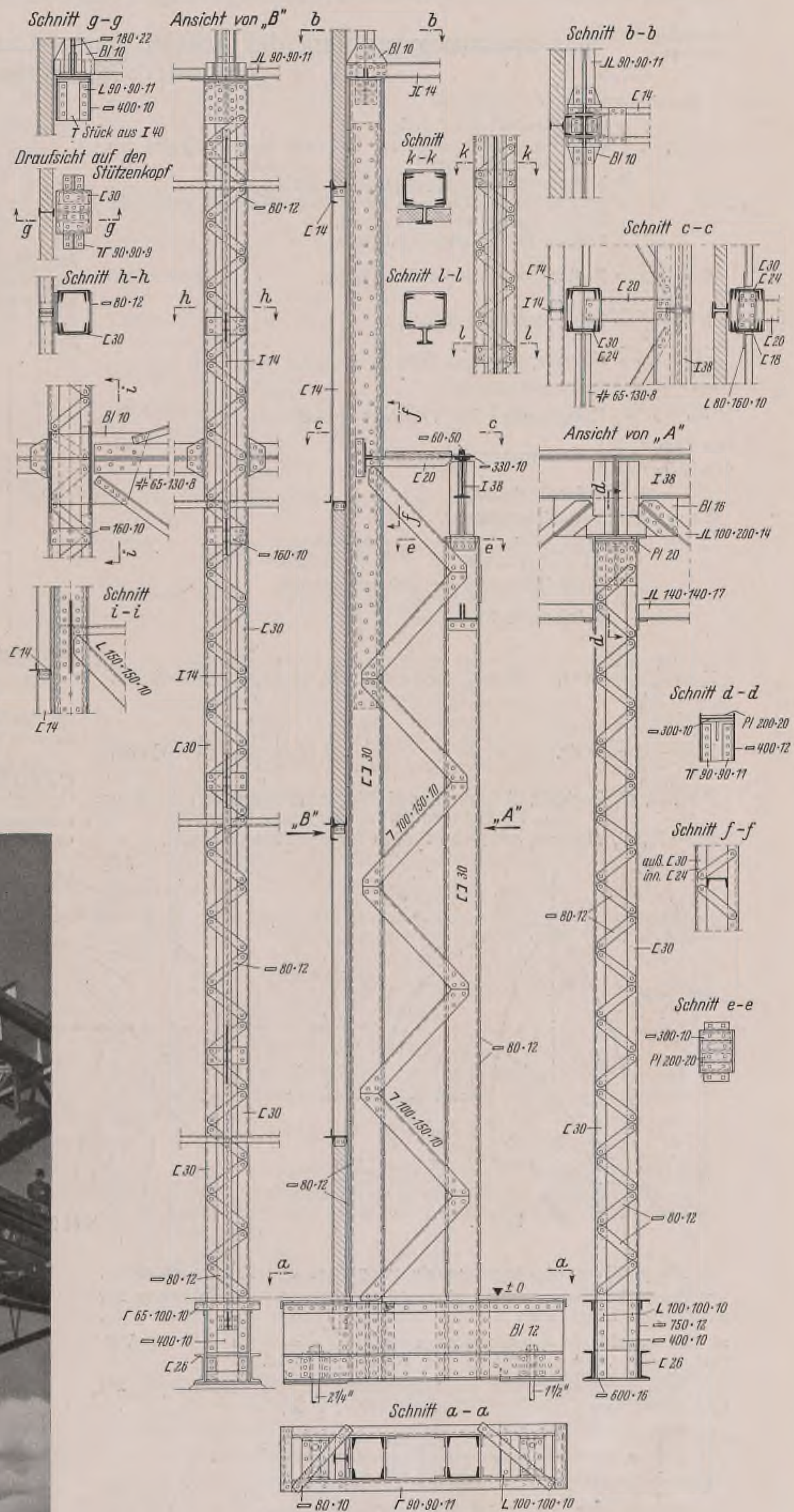


Bild 7. Stütze der Stützenreihe A.

Dehnungsfugen sind an jeder vierten Stütze, also in $4 \times 12{,}0 = 48{,}0$ m Abstand angeordnet. Sie sind in Bild 1 mit *F* bezeichnet.

Die Umstände bedingten es, daß die gesamte Konstruktion aus Profilen hergestellt werden mußte, die schnell greifbar waren. So ergaben sich z. T. Ausbildungen, die bei einer flüssigen Werkstoffbeschaffung nicht angewendet worden wären. — Trotz dieser Schwierigkeiten zeigt die Gesamtdurchbildung der Bauwerke ein ruhiges und zeitgemäßes Aussehen.

Entwurf, Ausführung und Montage erfolgte durch die Stahlbau-Anstalt der Donnersmarckhütte in Hindenburg O/S.

Das Spannungsproblem der achsensymmetrisch belasteten dicken Kugelschale.

Von Dozent Dr. **Miloslav Hampl**, Prag.

Bezeichnungen:

γ spez. Gewicht der Schale,
r, ϑ, φ Kugelkoordinaten mit dem Ursprung im Mittelpunkt der Kugelschale (Bild 1),
ϑ Komplement der geographischen Breite,
φ geographische Länge von einem festen Meridian gemessen,
a innerer Radius der Kugelschale,
b äußerer Radius der Kugelschale,

$R = \frac{a+b}{2}$ Radius der mittleren Kugelfläche,

$h = \frac{b-a}{2}$ halbe Dicke der Schale,

$\widehat{rr}$, $\widehat{\vartheta\vartheta}$, $\widehat{\varphi\varphi}$ Normalspannungen (Bild 2),

$\widehat{r\vartheta}$, $\widehat{r\varphi}$, $\widehat{\vartheta\varphi}$ Schubspannungen,

u_r, u_ϑ, u_φ Komponenten des Verschiebungsvektors u,

$\left.\begin{matrix} e_{rr}, e_{\vartheta\vartheta}, e_{\varphi\varphi} \\ e_{r\vartheta}, e_{r\varphi}, e_{\vartheta\varphi} \end{matrix}\right\}$ Verzerrungen,

$\Delta = \operatorname{div} \mathfrak{u}$ Volumdilatation,

$2\bar{\omega} = \operatorname{curl} \mathfrak{u}$ Verschiebungsrotor,

$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, wobei

E Elastizitätsmodul des Schalenmaterials,

$\frac{1}{\nu}$ Poissonsche Zahl,

$$T_1 = \frac{1}{R}\int_a^b \widehat{\vartheta\vartheta}\, r\, dr, \qquad N = \frac{1}{R}\int_a^b \widehat{r\vartheta}\, r\, dr, \qquad G_1 = \frac{1}{R}\int_a^b \widehat{\vartheta\vartheta}\,(R-r)\, r\, dr,$$

$$T_2 = \frac{1}{R}\int_a^b \widehat{\varphi\varphi}\, r\, dr, \qquad G_2 = \frac{1}{R}\int_a^b \widehat{\varphi\varphi}\,(R-r)\, r\, dr,$$

T_1, N, G_1 Zugkraft, Schubkraft und Biegungsmoment für ein Stück eines Parallelschnittes von der Länge 1 (Bild 3),
T_2, G_2 die entsprechenden Größen für den Meridianschnitt.

Die Spannungsgleichungen mit Berücksichtigung des Eigengewichtes der Schale lauten (Love, S. 91):

$$(4)\quad \begin{cases} \frac{\partial \widehat{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial \widehat{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r}\left(2\widehat{rr} - \widehat{\vartheta\vartheta} - \widehat{\varphi\varphi} + \widehat{r\vartheta}\cdot \operatorname{ctg}\vartheta\right) - \gamma\cdot\cos\vartheta = 0 \\ \frac{\partial \widehat{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial \widehat{\vartheta\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r}\left[\left(\widehat{\vartheta\vartheta} - \widehat{\varphi\varphi}\right)\operatorname{ctg}\vartheta + 3\,\widehat{r\vartheta}\right] + \gamma\cdot\sin\vartheta = 0. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen kann man leicht die Gleichgewichtsgleichungen für die Kräfte T_1, T_2, N und für die Biegungsmomente G_1, G_2 ableiten, indem man 1. die erste Gleichung mit $r^2\,dr$, 2. die zweite mit $r^2\,dr$ und 3. die zweite mit $r^3\,dr$ multipliziert und dann von $r = a$ bis $r = b$ integriert. Es ergibt sich nacheinander:

$$(5_1)\quad \begin{cases} T_1 + T_2 - \frac{1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{d}{d\vartheta}(N\cdot\sin\vartheta) = \frac{1}{R}\left[r^2\,\widehat{rr}\right]_a^b - \\ \qquad - \frac{1}{3}\cdot\gamma\cdot\frac{b^3-a^3}{R}\cdot\cos\vartheta \end{cases}$$

$$(5_2)\quad \begin{cases} \frac{dT_1}{d\vartheta} + (T_1 - T_2)\operatorname{ctg}\vartheta + N = -\frac{1}{R}\left[r^2\,\widehat{r\vartheta}\right]_a^b - \\ \qquad - \frac{1}{3}\cdot\gamma\cdot\frac{b^3-a^3}{R}\cdot\sin\vartheta \end{cases}$$

$$(5_3)\quad \begin{cases} \frac{dG_1}{d\vartheta} + (G_1 - G_2)\operatorname{ctg}\vartheta + RN = \frac{1}{R}\left[r^3\,\widehat{r\vartheta}\right]_a^b - \\ \qquad - \left[r^2\,\widehat{r\vartheta}\right]_a^b + \left[\frac{b^4-a^4}{4R} - \frac{b^3-a^3}{3}\right]\gamma\cdot\sin\vartheta. \end{cases}$$

(Die letzte Gleichung wurde mit Hilfe der vorübergehenden vereinfacht.)

Dabei bedeutet z. B. $\left[r^2\,\widehat{rr}\right]_a^b = b^2\,\widehat{rr}_b - a^2\,\widehat{rr}_a$, worin $\widehat{rr}_b$ bzw. $\widehat{rr}_a$ die Werte der Normalspannung $\widehat{rr}$ für $r = b$ bzw. $r = a$, also auf der äußeren bzw. inneren Kugelfläche darstellen.

In der Momentengleichung der technischen (eindimensionalen) Theorie, die der Gleichung (5_3) entspricht, steht auf der rechten Seite Null. Der Unterschied zwischen der zwei- und eindimensionalen Theorie entsteht insbesondere, wenn in der äußeren Belastung Schubkräfte auftreten, wie es z. B. bei einer Belastung durch Schnee der Fall ist.

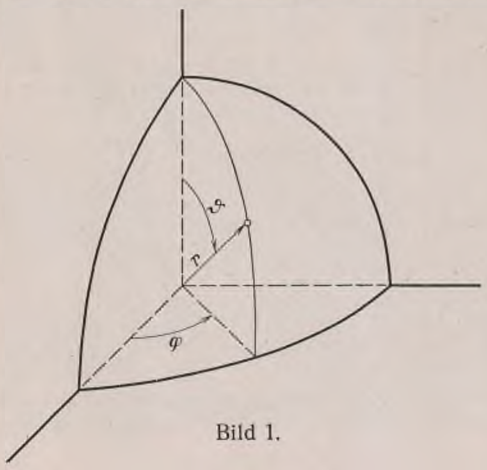


Bild 1.

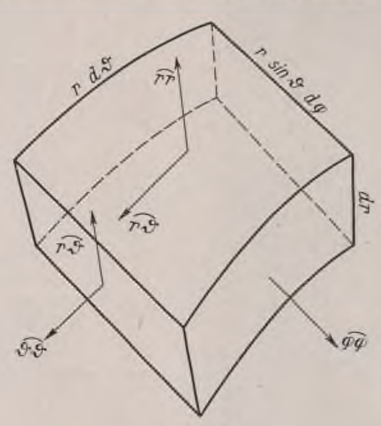


Bild 2.

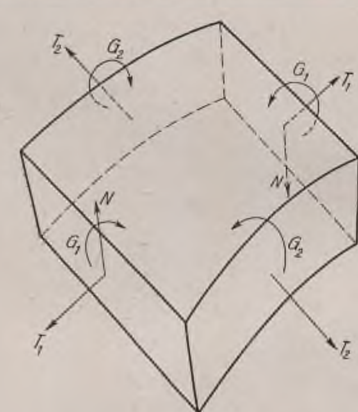


Bild 3.

Die positiven Biegungsmomente vergrößern den Krümmungsradius.

Unter der Voraussetzung einer achsensymmetrischen Belastung der Kugelschale hängt keine der veränderlichen Größen vom Azimut φ ab, so daß sowohl die Schubspannungen $\widehat{r\varphi} = \widehat{\vartheta\varphi} = 0$ als auch die Verzerrungen $e_{r\varphi} = e_{\vartheta\varphi} = 0$ sind und weiter $u_\varphi = 0$ ist.

Dann vereinfachen sich die Gleichungen für die Verzerrungen wie folgt (siehe Love, Theory of Elasticity, 1927, S. 56):

$$(1)\quad \begin{cases} e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\vartheta}{\partial\vartheta} + u_r\right), \\ e_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r}\left(u_\vartheta\cdot\operatorname{ctg}\vartheta + u_r\right), \quad e_{r\vartheta} = \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} - \frac{u_\vartheta}{r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_r}{\partial\vartheta}. \end{cases}$$

Die Volumsdilatation ist dann

$$(2)\quad \Delta = \frac{1}{r^2\cdot\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 u_r\cdot\sin\vartheta\right) + \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(r\,u_\vartheta\cdot\sin\vartheta\right)\right]$$

und die φ-Komponente des Verschiebungsrotors beträgt

$$(3)\quad 2\bar{\omega}_\varphi = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,u_\vartheta\right) - \frac{\partial u_r}{\partial\vartheta}\right]$$
$$(\bar{\omega}_r = \bar{\omega}_\vartheta = 0).$$

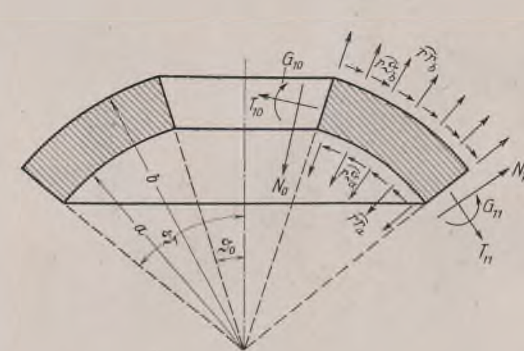


Bild 4.

Durch Elimination von T_2 aus den Gleichungen (5_1) und (5_2) bekommt man durch Integration und mit Einführung der Funktion

$$(6)\quad \begin{cases} F(\vartheta) = C + \frac{1}{3}\cdot\gamma\,(b^3 - a^3)\cos\vartheta \\ \qquad + \int\left[r^2\cdot\sin\vartheta\left(\widehat{rr}\cdot\cos\vartheta - \widehat{r\vartheta}\cdot\sin\vartheta\right)\right]_a^b d\vartheta \end{cases}$$

die folgende Gleichung für die Zugkraft im Breitenschnitt

$$(7_1)\qquad T_1 = N \cdot \operatorname{ctg} \vartheta + \frac{F(\vartheta)}{R \cdot \sin^2 \vartheta}$$

und aus Gleichung (5_1) die Zugkraft im Meridianschnitt

$$(7_2)\qquad T_2 = \frac{dN}{d\vartheta} - \frac{F(\vartheta)}{R \cdot \sin^2 \vartheta} + \frac{1}{R}\left[r^2 \widehat{rr}\right]_a^b - \frac{1}{3} \cdot \gamma \cdot \frac{b^3 - a^3}{R} \cdot \cos \vartheta .$$

Diese Gleichungen entsprechen den bekannten Gleichungen der Love-Meißnerschen (eindimensionalen) Theorie der dünnen Schalen (siehe z. B. Bolle, Festigkeitsberechnung von Kugelschalen; A. u. L. Föppl, Drang und Zwang, II. Bd.; Pöschl, Berechnung von Behältern; Ekström, Studien über dünne Schalen; Flügge, Statik und Dynamik der Schalen).

Die Beziehungen zwischen den Spannungen und Verzerrungen kann man auf folgende Weise schreiben (Love, S. 102):

$$(8)\quad \begin{cases} \widehat{rr} = \lambda \Delta + 2\mu e_{rr}, \quad \widehat{\vartheta\vartheta} = \lambda \Delta + 2\mu e_{\vartheta\vartheta}, \quad \widehat{\varphi\varphi} = \lambda \Delta + 2\mu e_{\varphi\varphi} \\ \widehat{r\vartheta} = \mu e_{r\vartheta} . \end{cases}$$

Setzt man dies in die Gleichungen (4) ein, so gehen die Spannungsgleichungen in die folgenden über:

$$(9)\quad \begin{cases} (\lambda + 2\mu)\dfrac{\partial \Delta}{\partial r} - 2\mu \cdot \dfrac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \cdot \dfrac{\partial(\bar{\omega}_\varphi \cdot \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} - \gamma \cdot \cos \vartheta = 0 \\ (\lambda + 2\mu)\dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial \Delta}{\partial \vartheta} + 2\mu \cdot \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial (r\,\bar{\omega}_\varphi)}{\partial r} + \gamma \cdot \sin \vartheta = 0 . \end{cases}$$

Die Gleichung (9_2) wird identisch erfüllt sein, wenn

$$(10)\quad \Delta = \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \cdot \frac{\partial r \Phi}{\partial r} \quad \text{und} \quad \bar{\omega}_\varphi = -\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} - \frac{\gamma(1+\nu)}{2E} \cdot r \cdot \sin \vartheta$$

ist, und die Gleichung (9_1), wenn die vorläufig beliebige Funktion $\Phi(r, \vartheta)$ der folgenden Laplaceschen Differentialgleichung genügt:

$$(11)\quad \nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin \vartheta \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}\right) = 0 .$$

Die Gleichung (3) kann nach Einführung von Gleichung (10) mit Hilfe einer neuen Funktion $\chi(r, \vartheta)$ identisch erfüllt werden, indem wir

$$(12)\quad u_r = \frac{\partial \chi}{\partial r} + 2r\Phi - \frac{\gamma(1+\nu)}{E} \cdot r^2 \cdot \cos \vartheta \quad \text{und} \quad u_\vartheta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \vartheta}$$

schreiben.

Nach Einsetzung von diesen Ausdrücken in Gleichung (2) ergibt sich mit Gleichung (10) für die Funktion χ folgende Beziehung:

$$(13)\quad \nabla^2 \chi = -\frac{1}{1-\nu} \cdot \frac{\partial r \Phi}{\partial r} - 4\Phi + \frac{4\gamma(1+\nu)}{E} \cdot r \cdot \cos \vartheta .$$

Man sieht, daß Φ nach Gleichung (11) eine harmonische und χ nach den Gleichungen (11) und (13) eine biharmonische Funktion ist, weil $\nabla^4 \chi = 0$ ist. Die Lösung des ganzen Problems ist somit auf die Lösung der Gleichungen (11) und (13) übergeführt, denn durch die Funktionen Φ und χ sind sowohl die Verschiebungen als auch die Spannungen bestimmt; die ersteren durch Gleichung (12) und die letzteren können in ähnlicher Weise durch Gleichung (8) ausgedrückt werden. Es ergibt sich:

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{1+\nu}{E} \cdot \widehat{rr} = \dfrac{\partial}{\partial r}\left[\dfrac{\partial \chi}{\partial r} + \dfrac{2-\nu}{1-\nu} \cdot r\Phi\right] - \dfrac{2\gamma(1+\nu)}{E} \cdot r \cdot \cos \vartheta , \\ \dfrac{1+\nu}{E} \cdot \widehat{\vartheta\vartheta} = \dfrac{1}{r^2} \cdot \dfrac{\partial^2 \chi}{\partial \vartheta^2} + \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial \chi}{\partial r} + \dfrac{\nu}{1-\nu} \cdot \dfrac{\partial r \Phi}{\partial r} \\ \qquad\qquad + 2\Phi - \dfrac{\gamma(1+\nu)}{E} \cdot r \cdot \cos \vartheta , \\ \dfrac{1+\nu}{E} \cdot \widehat{\varphi\varphi} = \dfrac{1}{r^2} \cdot \dfrac{\partial \chi}{\partial \vartheta} \cdot \operatorname{ctg} \vartheta + \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial \chi}{\partial r} + \dfrac{\nu}{1-\nu} \cdot \dfrac{\partial r \Phi}{\partial r} \\ \qquad\qquad + 2\Phi - \dfrac{\gamma(1+\nu)}{E} \cdot r \cdot \cos \vartheta , \\ \dfrac{1+\nu}{E} \cdot \widehat{r\vartheta} = \dfrac{\partial}{\partial \vartheta}\left[\dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial \chi}{\partial r} - \dfrac{\chi}{r^2} + \Phi\right] + \dfrac{\gamma(1+\nu)}{2E} \cdot r \cdot \sin \vartheta . \end{cases}$$

Es handelt sich jetzt also um die Bestimmung der Funktionen Φ und χ, das heißt um die Lösung der Gleichungen (11) und (13) und um Erfüllung der Randbedingungen.

Die harmonische Funktion Φ schreiben wir in bekannter Weise:

$$(15)\quad \Phi = \sum_\alpha \left(C_{1\alpha} r^\alpha + C_{2\alpha} r^{-\alpha-1}\right) P_\alpha(\vartheta),$$

wobei $C_{1\alpha}$, $C_{2\alpha}$ Integrationskonstante sind, α vorläufig eine unbestimmte reelle oder imaginäre Zahl bedeutet, und die Funktion $P_\alpha(\vartheta)$ einer Legendreschen Differentialgleichung genügt, und zwar

$$(16)\quad \frac{d}{d\vartheta}\left(P_\alpha' \cdot \sin \vartheta\right) + \alpha(\alpha+1) P_\alpha \cdot \sin \vartheta = 0 .$$

Von der Funktion χ setzen wir voraus, daß sie sich, ähnlich wie Φ, in Form einer Summe von Produkten $F_\alpha(r) P_\alpha(\vartheta)$ schreiben läßt.

Für $F_\alpha(r)$ bekommen wir aus der Gleichung (13) vorläufig ohne das Glied mit γ die Differentialgleichung:

$$F_\alpha'' + \frac{2}{r} \cdot F_\alpha' - \frac{\alpha(\alpha+1)}{r^2} \cdot F_\alpha = -C_{1\alpha} r^\alpha \left(4 + \frac{\alpha+1}{1-\nu}\right) - C_{2\alpha} r^{-\alpha-1}\left(4 - \frac{\alpha}{1-\nu}\right),$$

als deren allgemeines Integral sich $\left(\text{für alle Werte von } \alpha \neq \pm\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

$$(17)\quad F_\alpha(r) = C_{3\alpha} r^\alpha + C_{4\alpha} r^{-\alpha-1} + A_{1\alpha} C_{1\alpha} r^{\alpha+2} + A_{2\alpha} C_{2\alpha} r^{-\alpha+1}$$

ergibt, wobei

$$(18)\quad A_{1\alpha} = -\frac{4 + \dfrac{\alpha+1}{1-\nu}}{2(2\alpha+3)}, \quad A_{2\alpha} = \frac{4 - \dfrac{\alpha}{1-\nu}}{2(2\alpha-1)} \quad \text{ist}$$

und $C_{3\alpha}$, $C_{4\alpha}$ neue Integrationskonstanten sind.

Dem Gliede $\dfrac{4\gamma(1+\nu)}{E} \cdot r \cdot \cos \vartheta$ entspricht speziell die Funktion

$$(19)\quad \chi_{\text{Eigengew}} = \frac{2\gamma(1+\nu)}{5E} \cdot r^3 \cdot \cos \vartheta .$$

Da $\cos \vartheta = P_1(\vartheta)$ ist, können wir allgemein

$$(20)\quad \chi = \sum_\alpha F_\alpha(r) P_\alpha(\vartheta) + \bar{\chi} + \frac{2\gamma(1+\nu)}{5E} \cdot r^3 P_1(\vartheta)$$

schreiben, wobei $\bar{\chi}$ eine vorläufig unbestimmte Funktion bedeutet, die in der $\sum\limits_\alpha$ noch nicht enthalten ist und nicht von α abhängt.

An dieser Stelle wäre zu bemerken, daß mit der durch Gleichung (20) gegebenen Funktion χ bei Fortlassung des Gliedes $\bar{\chi}$ die Randbedingungen an der Kugelfläche, wie wir später sehen werden, nicht zu erfüllen sind. Etwas Ähnliches findet man beim Problem der Spannungsermittlung im Kreisringsektor, das Pöschl (ZAMM, 1929) ohne Einführung einer dem Gliede $\bar{\chi}$ entsprechenden Funktion zu lösen versuchte.

Die Randbedingungen, welche durch die Belastung und Auflagerung der Schale bestimmt sind, sind von zweierlei Art:

1. Die Belastung der Kugelwände: An der äußeren $(r = b)$ und inneren $(r = a)$ Oberfläche sind die Normalspannungen $\widehat{rr}_b$, $\widehat{rr}_a$ und die Schubspannungen $\widehat{r\vartheta}_b$, $\widehat{r\vartheta}_a$, also vier Bedingungen, gegeben.

2. Die Auflagerung der Schale in den Kegelrändern $\vartheta = \vartheta_0$, $\vartheta = \vartheta_1$ ergibt wieder vier unabhängige Bedingungen, da die sechs Randwerte, nämlich

zwei Normalkräfte T_{10}, T_{11}
(T_{10} ist der Wert von T_1 für $\vartheta = \vartheta_0$ usw.),
„ Schubkräfte N_0, N_1 und
„ Biegungsmomente G_{10}, G_{11}

durch zwei Gleichgewichtsbedingungen miteinander verbunden sind.

Dementsprechend kann man die Funktion Φ und χ in zwei Teile zerlegen, und zwar:

$$\Phi = \Phi_p + \Phi_h \quad \text{und} \quad \chi = \chi_p + \chi_h .$$

Die Funktionen mit Index p bezeichnen wir als die Partikularlösung des Problems (zu Unrecht auch Membranlösung genannt). Sie sollen der Belastung der Kugelwände, aber nicht den allgemeinen Auflagerbedingungen genügen.

Die Funktionen mit Index h — die wir als homogene Lösung bezeichnen — hängen dagegen nicht von der Belastung der Kugelwände ab, dagegen können sie die Auflagerbedingungen der Kugelschale erfüllen.

I. Die Partikularlösung.

Wir werden uns vorläufig nur mit der Partikularlösung befassen.

Wir setzen voraus, daß die äußere Belastung der Kugelwände sich in Reihen entwickeln läßt, und zwar die Normalspannungen $\widehat{rr}_a$ und $\widehat{rr}_b$ nach den zonalen Kugelfunktionen $P_\alpha(\vartheta)$ und die Schubspannungen $\widehat{r\vartheta}_a$ und $\widehat{r\vartheta}_b$ nach den zugeordneten Kugelfunktionen $P_\alpha'(\vartheta)$, wobei $\alpha = 0, 1, 2, 3 \ldots$ ist. Wir setzen also voraus, daß im allgemeinen:

$$(21)\quad \begin{cases} \widehat{rr}_a = \sum\limits_{\alpha = 0, 1, \ldots} \mathfrak{A}_{1\alpha} P_\alpha(\vartheta) & \widehat{rr}_b = \sum\limits_{\alpha = 0, 1, \ldots} \mathfrak{B}_{1\alpha} P_\alpha(\vartheta) \\ \widehat{r\vartheta}_a = \sum\limits_{\alpha = 1, 2, \ldots} \mathfrak{A}_{2\alpha} P_\alpha'(\vartheta) & \widehat{r\vartheta}_b = \sum\limits_{\alpha = 1, 2, \ldots} \mathfrak{B}_{2\alpha} P_\alpha'(\vartheta) \end{cases}$$

gilt.

Drücken wir jetzt die Gleichungen (14_1) und (14_4) mit Hilfe der Gleichungen (15) und (20) (bei vorläufiger Fortlassung von $\bar{\chi}$) aus, setzen ferner $r = a$ bzw. $r = b$ ein und vergleichen die so erhaltenen Reihen mit Gleichung (21), dann bekommen wir für jedes α ein System von vier linearen Gleichungen für die Konstanten C_α.

Für jeden ganzzahligen Wert α bekommen wir folgende Gleichungen:

$$(22)\quad \begin{cases} C_{1\alpha} f_{1\alpha} a^{\alpha} + C_{2\alpha} f_{2\alpha} \alpha^{-\alpha-1} + \alpha(\alpha-1) C_{3\alpha} a^{\alpha-2} \\ \qquad + (\alpha+1)(\alpha+2) C_{4\alpha} a^{-\alpha-3} = \dfrac{1+\nu}{E} \cdot \mathfrak{A}_{1\alpha} \\ C_{1\alpha} f_{1\alpha} b^{\alpha} + \ldots \qquad \ldots = \dfrac{1+\nu}{E} \cdot \mathfrak{B}_{1\alpha} \\ C_{1\alpha} g_{1\alpha} a^{\alpha} + C_{2\alpha} g_{2\alpha} a^{-\alpha-1} + (\alpha-1) C_{3\alpha} a^{\alpha-2} \\ \qquad - (\alpha+2) C_{4\alpha} a^{-\alpha-3} = \dfrac{1+\nu}{E} \cdot \mathfrak{A}_{2\alpha} \\ C_{1\alpha} g_{1\alpha} b^{\alpha} + \ldots \qquad \ldots = \dfrac{1+\nu}{E} \cdot \mathfrak{B}_{2\alpha}. \end{cases}$$

Darin bedeutet

$$(23)\quad \begin{cases} f_{1\alpha} = -\dfrac{\alpha+1}{2\alpha+3}\left[1 + \dfrac{1}{2(1-\nu)}(\alpha^2-\alpha-4)\right] \\ f_{2\alpha} = -\dfrac{\alpha}{2\alpha-1}\left[1 + \dfrac{1}{2(1-\nu)}(\alpha^2+3\alpha-2)\right] \\ g_{1\alpha} = \dfrac{1}{2\alpha+3}\left[1 - \dfrac{1}{2(1-\nu)}(\alpha+1)^2\right] \\ g = -\dfrac{1}{2\alpha-1}\left[1 - \dfrac{1}{2(1-\nu)} \cdot \alpha^2\right]. \end{cases}$$

Es läßt sich beweisen, daß für jeden ganzzahligen Wert $\alpha \neq 1$ die Determinante des obigen Gleichungssystems $\Delta_\alpha \neq 0$ ist, daß also alle Konstanten C_α eindeutig bestimmt sind. Wenn z. B. die rechten Seiten aller Gleichungen Null sind, sind ebenfalls alle Konstanten $C_{1\alpha} = C_{2\alpha} = C_{3\alpha} = C_{4\alpha} = 0$.

Der Fall $\alpha = 1$ muß gesondert behandelt werden. Wählen wir die Funktion χ nach Gleichung (20), vorläufig jedoch ohne das Glied $\bar{\chi}$, so erhalten wir für die Konstanten $C_{\alpha=1}$ lineare Gleichungen, die vollkommen den Gleichungen (22) für $\alpha = 1$ entsprechen, nur daß auf die rechte Seite noch Glieder hinzutreten, die vom Eigengewicht der Schale herrühren. Wie aber aus den Gleichungen (22) ersichtlich, ist die Konstante $C_{3\alpha}$ in allen vier Gleichungen mit dem Beiwert $\underline{(\alpha-1)}$ verbunden, so daß für $\alpha = 1$ $C_{3\alpha}$ herausfällt und die vier Gleichungen dann bloß drei Unbekannte enthalten. Im allgemeinen können diese vier Gleichungen im Widerspruch stehen, so daß sich daraus dann die Unbekannten nicht ermitteln lassen. Daraus kann gefolgert werden, daß der Ausdruck für χ ohne $\bar{\chi}$ nicht allgemein genug ist, um allen Belastungsbedingungen der Kugelwände zu genügen. Die Konstante $C_{3\alpha}$, die für $\alpha = 1$ aus den Gleichungen herausfällt, entspricht der Funktion $C_{3\alpha} r^{\alpha} P_\alpha(\vartheta)$ in Gleichung (20) für χ.

Diese Schwierigkeit kann durch Einführung einer neuen Funktion $\bar{\chi}$ überwunden werden. Diese Funktion lautet:

$$\bar{\chi} = \bar{C} \cdot \lim_{\alpha=1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[r^{\alpha} P_\alpha(\vartheta) \right].$$

Diese Partikularlösung habe ich in meiner in den „Wiener Monatsheften für Math. u. Phys." 1930, S. 215, erschienenen Arbeit als „hemisphärische" bezeichnet. Wie dort angegeben ist, lautet die Lösung

$$(24)\quad \begin{cases} \bar{\chi} = \bar{C}\left\{ r \cdot \log \dfrac{r}{a} \cdot \cos\vartheta - r\left[1 - \cos\vartheta - \cos\vartheta \cdot \log \dfrac{1+\cos\vartheta}{2}\right]\right\} \\ \quad + \bar{\bar{C}}\left\{ r \cdot \log \dfrac{r}{a} \cdot \cos\vartheta + r\left[1 + \cos\vartheta + \cos\vartheta \cdot \log \dfrac{1-\cos\vartheta}{2}\right]\right\}. \end{cases}$$

Wenn die Schale nicht den Nordpol ($\vartheta = 0$) enthält, ist $\bar{C} = 0$,

wenn die Schale nicht den Südpol ($\vartheta = \pi$) enthält, ist $\bar{\bar{C}} = 0$.

Wenn wir uns weiter auf den Fall einer schweren, oben geschlossenen Kuppel, auf deren kugelige Wände keine Belastung wirkt, beschränken, dann sind $\widehat{rr}_a = \widehat{rr}_b = \widehat{r\vartheta}_a = \widehat{r\vartheta}_b = 0$, also nach Gleichung (22) alle $C_{\alpha \neq 1} = 0$; weiter ist auch $\bar{\bar{C}} = 0$, und die Partikularlösung des Problems lautet dann

$$(25)\quad \begin{cases} \Phi_p = \left(C_{11} r + C_{21} r^{-2}\right)\cos\vartheta, \\ \chi_p = \left(A_{11} C_{11} r^3 + A_{21} C_{21} + C_{31} r + C_{41} r^{-2}\right)\cos\vartheta + \\ \quad + \bar{C}\left\{ r \cdot \log \dfrac{r}{a} \cdot \cos\vartheta - r\left[1 - \cos\vartheta - \cos\vartheta \cdot \log \dfrac{1+\cos\vartheta}{2}\right]\right\} \\ \quad + \dfrac{2\gamma(1+\nu)}{5E} \cdot r^3 \cdot \cos\vartheta, \end{cases}$$

wobei

$$A_{11} = -\frac{3-2\nu}{5(1-\nu)}, \quad A_{21} = \frac{3-4\nu}{2(1-\nu)} \text{ ist.}$$

Mit diesen Funktionen Φ_p und χ_p bekommt man nach Gleichung (14):

$$(26)\quad \begin{cases} \dfrac{1+\nu}{E} \cdot \widehat{rr} = \left\{ \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{1+\nu}{1-\nu} \cdot C_{11} r - \dfrac{2-\nu}{1-\nu} \cdot C_{21} r^{-2} + \bar{C} r^{-1} + \right. \\ \qquad \left. + 6 C_{41} r^{-4} \right\} \cos\vartheta + \dfrac{2(1+\nu)}{5E} \cdot \gamma r \cdot \cos\vartheta, \\ \dfrac{1+\nu}{E} \cdot \widehat{r\vartheta} = \left\{ \dfrac{1+\nu}{5(1-\nu)} \cdot C_{11} r + \dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \cdot C_{21} r^{-2} - \bar{C} r^{-1} + \right. \\ \qquad \left. + 3 C_{41} r^{-4} \right\} \sin\vartheta - \dfrac{3(1+\nu)}{10E} \cdot \gamma r \cdot \sin\vartheta. \end{cases}$$

Für $r = a$ bzw. $r = b$ sollen die rechten Seiten der Gleichungen verschwinden, wodurch wir vier Gleichungen erhalten, aus denen die Konstanten C_{11}, C_{21}, $\bar{C}$ und C_{41} zu bestimmen sind.

$$(27)\quad \begin{cases} C_{11} = -\dfrac{\gamma}{6E}\left\{ 1 - \nu + 5ab(b+a)^2 \cdot \dfrac{b-a}{b^5-a^5} \right\}, \\ C_{21} = -\dfrac{(1+\nu)\gamma}{3E} \cdot ab(b+a), \\ \bar{C} = -\dfrac{(1+\nu)\gamma}{3E}(b^2+ab+a^2), \\ C_{41} = -\dfrac{(1+\nu)\gamma}{18(1-\nu)E} \cdot a^3 b^3 (b^2+ab+a^2) \dfrac{b^2-a^2}{b^5-a^5}. \end{cases}$$

Die Konstante C_{31} bleibt vorläufig unbestimmt. Sie kommt in keinem der Ausdrücke für die Spannungen vor, dagegen ist sie in den Verschiebungen u_r, u_ϑ enthalten. Es läßt sich zeigen, daß C_{31} einer vertikalen Verschiebung der ganzen Kugelschale entspricht.

Nach Gleichung (14) können wir jetzt auch $\widehat{\vartheta\vartheta}$ und $\widehat{\varphi\varphi}$ ausdrücken. Wenn wir unsere zweidimensionale Methode mit der technischen (eindimensionalen) vergleichen wollen, genügt es, nur die Schubkraft N und das Biegungsmoment G_1 zu berechnen und dann nach Gleichung (7) die Normalkräfte T_1, T_2 und nach Gleichung (5_d) das Moment G_2 zu bestimmen. Dabei ist zu beachten, daß gemäß der Voraussetzung $\widehat{rr}_a = \widehat{rr}_b = \widehat{r\vartheta}_a = \widehat{r\vartheta}_b = 0$ ist und die Konstante C in Gleichung (6) aus der Bedingung zu bestimmen ist, daß bei oben geschlossener Schale die Kräfte T_1, T_2 für $\vartheta = 0$ einen endlichen Wert haben müssen; es muß also $\underline{F(0) = 0}$ sein. Nach Gleichung (6) ist dann

$$F(\vartheta) = -\frac{1}{3} \cdot \gamma (b^3 - a^3)(1 - \cos\vartheta).$$

Gemäß der Definition ist

$$\frac{1+\nu}{E} \cdot RN = \frac{1+\nu}{E} \int_a^b \widehat{r\vartheta}\, r\, dr,$$

und nach Gleichung (26_2) sowie nach Einführung der Konstanten aus den Gleichungen (27) ergibt sich:

$$(28)\qquad N = \frac{B}{R} \cdot \sin\vartheta,$$

wobei

$$(29)\quad \begin{cases} \dfrac{B}{\gamma} = -\dfrac{1-2\nu}{6(1-\nu)} \cdot ab(b+a) \log \dfrac{b}{a} + \dfrac{2}{9}(b^3-a^3) - \\ \qquad - \dfrac{5}{36(1-\nu)} \cdot ab(b+a) \dfrac{(b^2-a^2)(b^3-a^3)}{b^5-a^5} \end{cases}$$

ist.

Für dünne Schalen vereinfacht sich B auf:

$$B \cong \frac{4}{3} \cdot h^3 \gamma \left[1 + \frac{2}{15} \cdot \frac{h^2}{R^2} + \frac{1}{1-\nu} \cdot \frac{1 + \frac{7}{15} \cdot \frac{h^2}{R^3}}{1 + 2 \cdot \frac{h^2}{R^2}} \right],$$

wenn man $\dfrac{h^4}{R^4}$ neben $\underline{1}$ vernachlässigt.

Oder

$$B \cong \frac{4}{3} \cdot h^3 \gamma \cdot \frac{2-\nu}{1-\nu},$$

wenn man bereits $\dfrac{h^2}{R^2}$ neben $\underline{1}$ vernachlässigt.

Aus der eindimensionalen (technischen) Theorie (Bolle, S. 23; Ekström, S. 34) ergibt sich:

$$(29)\qquad B_{\text{techn}} = \frac{2}{3} \cdot h^3 \gamma \cdot \frac{2+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{h^2}{R^2}}.$$

Also

$$\frac{B}{B_{\text{techn}}} = \frac{2(2-\nu)}{2+\nu} \quad \left(\text{für } \nu = 0{,}3,\ \frac{B}{B_{\text{techn}}} \cong 1{,}48\right).$$

Die Kräfte T_1, T_2 bestimmt man aus den Gleichungen (7):

$$(30_1)\quad \begin{cases} T_1 = \frac{B}{R}\cdot\cos\vartheta - \frac{1}{3}\cdot\gamma\cdot\frac{b^3-a^3}{R}\cdot\frac{1}{1+\cos\vartheta} \cong -2\gamma R h\cdot\frac{1}{1+\cos\vartheta} - \\ \quad -\frac{2}{3}\cdot\gamma\cdot\frac{h^3}{R}\left(\frac{1}{1+\cos\vartheta} - 2\cdot\cos\vartheta - \frac{2}{1-\nu}\cdot\cos\vartheta\right)\end{cases}$$

$$(30_2)\quad \begin{cases} T_2 = \frac{B}{R}\cdot\cos\vartheta + \frac{1}{3}\cdot\gamma\cdot\frac{b^3-a^3}{R}\left(\frac{1}{1+\cos\vartheta} - \cos\vartheta\right) \cong \\ \cong 2\gamma R h\left(\frac{1}{1+\cos\vartheta} - \cos\vartheta\right) + \frac{2}{3}\cdot\gamma\cdot\frac{h^3}{R}\left(\frac{1}{1+\cos\vartheta} + \right. \\ \quad \left. + \cos\vartheta + \frac{2}{1-\nu}\cdot\cos\vartheta\right).\end{cases}$$

Diese Werte weichen bei der technischen Methode erst in den Gliedern mit $\frac{h^3}{R}$ ab.

Zur Bestimmung der Momente G_1, G_2 braucht man nur noch $\int_a^b \widehat{\vartheta\vartheta}\, r^2\, dr$ zu kennen; dann ist nach Gleichung (5_3)

$$G_1 = G_2 = \frac{4}{3}\cdot\gamma h^3\cdot\frac{1}{1-\nu}\cdot\cos\vartheta.$$

Nach der technischen Methode beträgt:

$$G_{1\,\mathrm{techn}} = G_{2\,\mathrm{techn}} = \frac{4}{3}\cdot\gamma h^3\cdot\frac{1+\frac{\nu}{2}}{1-\nu}\cdot\cos\vartheta.$$

Daraus kann man die Hauptspannungen σ_1, σ_2 an der Oberfläche $r=a$, $r=b$ nach der Gleichung:

$$(30')\quad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{T_1}{2h} \pm \frac{3G_1}{2h^2} \\ \sigma_2 = \frac{T_2}{2h} \pm \frac{3G_2}{2h^2}\end{cases}$$

bestimmen.

Das obere (untere) Vorzeichen bezieht sich auf die innere (äußere) Oberfläche der Kugel.

Mit Hilfe von Gleichung (27) können wir nach Gleichung (12) die Verschiebungen u_r, u_ϑ ausdrücken.

Wenn wir uns auf die Bestimmung des Deformationszustandes der Mittelkugel $r=R$ beschränken, genügt es, die Werte $U_r = (u_r)_{r=R}$ und $U_\vartheta = (u_\vartheta)_{r=R}$ nach Gleichung (12) zu berechnen. Neben diesen Verschiebungen führen wir noch den Verdrehungswinkel der Normalen infolge der Formänderung ein, und zwar:

$$(31)\quad \omega = \frac{1}{R}\left(U_\vartheta - \frac{dU_r}{d\vartheta}\right).$$

Führen wir statt der vorläufig unbestimmten Konstanten C_{31} eine neue Konstante K ein, damit die Ausdrücke für U_r und U_ϑ einfacher werden, so erhalten wir:

$$(32_1)\quad \begin{cases} U_r = -K\cdot\cos\vartheta + (1+\nu)\frac{\gamma R^2}{E}\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{h^2}{R^2}\right) \\ \quad\cdot[1-\cos\vartheta\cdot\log(1+\cos\vartheta)] - \\ \quad -\frac{\gamma R^2}{E}\cdot\cos\vartheta\left[2+\nu-\frac{2-9\nu+\nu^2}{3(1-\nu)\left(1+2\cdot\frac{h^2}{R^2}\right)}\cdot\frac{h^2}{R^2}\right]\end{cases}$$

$$(32_2)\quad \begin{cases} U_\vartheta = K\cdot\sin\vartheta + (1+\nu)\frac{\gamma R^2}{E}\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{h^2}{R^2}\right) \\ \quad\cdot\sin\vartheta\left[1-\frac{1}{1+\cos\vartheta}+\log(1+\cos\vartheta)\right]\end{cases}$$

$$(32_3)\quad \left\{ \omega = -\frac{\gamma R}{E}\cdot\sin\vartheta\left[2+\nu-\frac{2-9\nu+\nu^2}{3(1-\nu)\left(1+2\cdot\frac{h^2}{R^2}\right)}\cdot\frac{h^2}{R^2}\right].\right.$$

Die Ausdrücke für die Verschiebungen U_r und U_ϑ stimmen mit den entsprechenden Ausdrücken der technischen Methode in den Gliedern höchster Ordnung überein.

Für die Praxis ist allerdings das wichtigste, ob die größte Beanspruchung der Wirklichkeit entspricht. Und da zeigt es sich, daß für die Partikularlösung die Werte σ_1 bzw. σ_2 nach Gleichung (30') auf der inneren oder der äußeren Oberfläche der Kugel nur wenig verschieden von den wirklichen Werten $\widehat{\vartheta\vartheta}_a$, $\widehat{\vartheta\vartheta}_b$ bzw. $\widehat{\varphi\varphi}_a$, $\widehat{\varphi\varphi}_b$ sind. Zum Vergleich seien hier die Ausdrücke für die Spannungen $\widehat{\vartheta\vartheta}_b$, $\sigma_{1b}^{\mathrm{II}}$, σ_{1b}^{I}, σ_1^* angeführt.

Darin bedeutet:

$\widehat{\vartheta\vartheta}_b$ den Spannungswert für $r=b$,

$$\sigma_{1b}^{\mathrm{II}} = \frac{T_1^{\mathrm{II}}}{2h} - \frac{3G_1^{\mathrm{II}}}{2h^2},$$

wobei die Werte T_1^{II} und G_1^{II} nach der zweidimensionalen Theorie Gleichung (30) bestimmt sind,

$$\sigma_{1b}^{\mathrm{I}} = \frac{T_1^{\mathrm{I}}}{2h} - \frac{3G_1^{\mathrm{I}}}{2h^2},$$

wobei T_1^{I} und G_1^{I} nach der eindimensionalen (technischen) Theorie bestimmt sind, und schließlich bedeutet σ_1^* die sogenannte Membranspannung, errechnet aus den statischen Gleichungen des Gleichgewichts bei Vernachlässigung der Schubspannungen und der Biegemomente. Die Glieder von der Ordnung $\frac{h^2}{R^2}$ vernachlässigen wir ebenfalls der Einfachheit halber. Die Ausdrücke für die Spannungen lauten also

$$\widehat{\vartheta\vartheta}_b = -\frac{\gamma R}{1+\cos\vartheta} - \gamma h\left[\frac{9}{5(1-\nu)}\cdot\cos\vartheta - \frac{1}{1+\cos\vartheta}\right],$$

$$\sigma_{1b}^{\mathrm{II}} = -\frac{\gamma R}{1+\cos\vartheta} - \gamma h\cdot\frac{2}{1-\nu}\cdot\cos\vartheta,$$

$$\sigma_{1b}^{\mathrm{I}} = -\frac{\gamma R}{1+\cos\vartheta} - \gamma h\cdot\frac{2+\nu}{1-\nu}\cdot\cos\vartheta,$$

$$\sigma_1^* = -\frac{\gamma R}{1+\cos\vartheta}.$$

In ähnlicher Weise folgt

$$\widehat{\varphi\varphi}_b = \gamma R\left(\frac{1}{1+\cos\vartheta} - \cos\vartheta\right) - \gamma h\left[\frac{9}{5(1-\nu)}\cdot\cos\vartheta - \cos\vartheta + \frac{1}{1+\cos\vartheta}\right],$$

$$\sigma_{2b}^{\mathrm{II}} = \gamma R\left(\frac{1}{1+\cos\vartheta} - \cos\vartheta\right) - \gamma h\cdot\frac{2}{1-\nu}\cdot\cos\vartheta,$$

$$\sigma_{2b}^{\mathrm{I}} = \gamma R\left(\frac{1}{1+\cos\vartheta} - \cos\vartheta\right) - \gamma h\cdot\frac{2+\nu}{1-\nu}\cdot\cos\vartheta,$$

$$\sigma_2^* = \gamma R\left(\frac{1}{1+\cos\vartheta} - \cos\vartheta\right).$$

Bezeichnet man den relativen Fehler in Prozenten mit

$$\delta_1 = 100\cdot\frac{\widehat{\vartheta\vartheta}_b - \sigma_{1b}}{\widehat{\vartheta\vartheta}_b} \quad \text{bzw.} \quad \delta_2 = 100\cdot\frac{\widehat{\varphi\varphi}_b - \sigma_{2b}}{\widehat{\varphi\varphi}_b},$$

dann bekommt man z. B. für $\frac{h}{R} = 0{,}05$, $\nu = 0{,}3$ für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ die folgenden Werte:

ϑ	$\delta_1^{\mathrm{II}} = \delta_2^{\mathrm{II}}$	$\delta_1^{\mathrm{I}} = \delta_2^{\mathrm{I}}$	$\delta_1^* = \delta_2^*$
0	$-6{,}3\,\%$	$-10\,\%$	$17{,}3\,\%$
$\frac{\pi}{2}$	$5{,}3\,\%$	$5{,}3\,\%$	$5{,}3\,\%$.

Die Spannungen für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ sind größer als jene für $\vartheta = 0$, die entsprechenden Fehler dagegen umgekehrt. Wir können sagen, daß für $\frac{h}{R} \sim 0{,}05$ die Partikularspannungen der technischen Methode wie auch die Membranspannungen genügend genau den wirklichen gleich sind. Die Fehler δ sind annähernd proportional dem Verhältnis $\frac{h}{R}$.

II. Die homogene Lösung.

Wir suchen jetzt eine solche Funktion Φ_h bzw. χ_h, die von der Belastung der Kugelwände unabhängig ist, jedoch den Auflagerbedingungen genügen soll.

Wenn wir uns wieder auf die Produktform $F_\alpha(r)P_\alpha(\vartheta)$ beschränken, so muß der Index α so gewählt sein, daß die Spannungen $\widehat{rr}$, $\widehat{r\vartheta}$ auf der äußeren $(r=b)$ und inneren $(r=a)$ Kugelfläche verschwinden. Wollen wir eine nicht triviale Lösung bekommen, dann muß α die Gleichung $\Delta_\alpha = 0$ erfüllen, wobei Δ_α die Determinante der jetzt homogenen linearen Gleichungen (22) für die vier Konstanten C_α bedeutet. Wegen der Homogenität der Gleichungen können wir die vier Konstanten C_α durch eine einzige ausdrücken.

Wir bekommen für α die folgende transzendente Gleichung:

$$(33)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2\alpha+1}{2}} - \left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{2\alpha+1}{2}}}{\frac{b}{a} - \left(\frac{b}{a}\right)^{-1}}\right]^2 \\ &= \frac{(2\alpha+1)^2}{4}\cdot\frac{4(1-\nu^2)+(\alpha^2+\alpha)(\alpha^2+\alpha-2)}{(2\alpha+1)^2(1-\nu^2)+(\alpha^2+\alpha)(\alpha^2+\alpha-2)}.\end{aligned}\right.$$

Zur Lösung dieser Gleichung ist zunächst folgendes zu bemerken:

Die Gleichung (33) entspricht der Gleichung $\Delta_\alpha = 0$ nur in dem Falle, wenn $\alpha \neq \pm\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$ ist. Denn für diese drei Ausnahmewerte von α stellt die Gleichung (17) nicht das allgemeine Integral der Differentialgleichung für $F_\alpha(r)$ vor, weil einige partikuläre Integrale, aus denen $F_\alpha(r)$ zusammengestellt ist, voneinander linear abhängen $\left(\text{z. B. } r^\alpha \text{ und } r^{-\alpha+1} \text{ für } \alpha = \frac{1}{2}\right)$.

Man müßte also für diese drei Fälle die Integrale $F_\alpha(r)$ richtig angeben und dementsprechend auch die Gleichungen (22) verändern. Die Determinanten, die diesen korrigierten Gleichungen entsprechen, sind — wie man leicht beweisen könnte — aber sämtlich $\neq 0$, und darum sind die Werte $\alpha = \pm\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ nicht die Eigenwerte, die wir suchen und brauchen, um die homogene Lösung zu bekommen. Bei der Lösung der Gleichung (33) müssen wir also die Wurzeln $\alpha = \pm\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ ausschließen.

Dann kann man die Gleichung (33) mit Hilfe von Reihenentwicklungen lösen, wenn man

$$\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\beta}{z}$$

setzt, wobei

$$z = \sqrt{\log\frac{b}{a}} \quad \text{und für } \beta \text{ den folgenden Ansatz macht:}$$

$$(34) \qquad \beta = \beta_0 + \beta_1 z^2 + \beta_2 z^4 + \dots$$

Man entwickelt jetzt beide Seiten der Gleichung (33) nach wachsenden Potenzen von z. Es ist z. B.

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2\alpha+1}{2}} = e^{\frac{2\alpha+1}{2}\cdot\log\frac{b}{a}} = e^{\beta z} = 1 + \beta z + \frac{\beta^2 z^2}{2!} + \dots$$

Nach Einsetzen und Ordnen der Glieder bekommt man:

$$\left(\frac{\beta z + \frac{\beta^3 z^3}{3!} + \frac{\beta^5 z^5}{5!} + \dots}{z^2 + \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} + \dots}\right)^2 = \frac{\beta^2}{z^2}\left[1 - \frac{64(1-\nu^2)z^2(\beta^2 - z^2)}{16\beta^4 + (24 - 64\nu^2)\beta^2 z^2 + 9z^4}\right].$$

Nach Durchführung der Operationen und Einführung von $\beta = \beta_0 + \beta_1 z^2 + \beta_2 z^4 + \dots$ erhält man für die Beiwerte $\beta_\varkappa$:

$$\beta_0^4 = -4A^4, \quad \text{wobei} \quad A = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)},$$

also 1. $\beta_0 = \pm A(1 \pm i)$,

2. $\beta_1 = \frac{1}{\beta_0}\left(\frac{5}{8} - \frac{1}{5}\cdot A^4\right)$,

3. $\beta_2 = \frac{\beta_0}{32}\left(-\frac{668}{25\cdot 9\cdot 7}\cdot A^4 + \frac{13}{5} - \frac{7}{16A^4}\right)$ usw.

Wenn man $\frac{b-a}{b+a} = \frac{h}{R} = \varepsilon$ bezeichnet, dann ist für $\varepsilon < 1$

$$z^2 = \log\frac{b}{a} = \log\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = 2\varepsilon\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{3} + \frac{\varepsilon^4}{5} + \dots\right),$$

also

$$(35)\left\{\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{2} + \frac{\beta}{z} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{z}(\beta_0 + \beta_1 z^2 + \beta_2 z^4 + \dots) \\ &\cong -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\left[\beta_0 + 2\beta_1\varepsilon + \left(4\beta_2 - \frac{\beta_0}{6}\right)\varepsilon^2 + \frac{1}{3}\cdot\beta_1\varepsilon^3 + \dots\right] \\ &= -\frac{1}{2} \pm \frac{A}{\sqrt{2\varepsilon}}\left[1 + k_1\varepsilon + k_2\varepsilon^2 + \dots \pm 2(1 - k_1\varepsilon + k_2\varepsilon^2 + \dots)\right], \end{aligned}\right.$$

wobei

$$k_1 = \frac{5}{8A^2} - \frac{1}{5}\cdot A^2,$$

$$k_2 = \frac{1}{8}\left(-\frac{668}{25\cdot 9\cdot 7}\cdot A^4 + \frac{19}{15} - \frac{7}{16A^4}\right) \quad \text{ist.}$$

Für $\nu = 0{,}3$ ist $k_1 = 0{,}0477$

$k_2 = -0{,}006\,43$, also sehr klein.

Bei dementsprechender Vernachlässigung folgt

$$(35') \qquad \alpha \cong -\frac{1}{2} \pm \frac{A}{\sqrt{2\varepsilon}}(1 \pm i).$$

Nach der Love-Meißnerschen (technischen) Theorie der dünnen Kugelschale kommt man zur folgenden homogenen Differentialgleichung:

$$L(N) \pm i\mu N = 0,$$

wobei

$$L(N) = N'' + N'\cdot\operatorname{ctg}\vartheta - N\cdot\operatorname{ctg}^2\vartheta$$

und weiter nach unserer Bezeichnung $\mu = A^2\cdot\frac{1}{\varepsilon}$ bedeutet.

Dieser Gleichung genügt die Funktion $N = P_\alpha'(\vartheta)$ mit passend gewähltem α.

Für $P_\alpha(\vartheta)$ gilt

$$P_\alpha''\cdot\sin\vartheta + P'\cdot\cos\vartheta + \alpha(\alpha+1)P_\alpha\cdot\sin\vartheta = 0,$$

also nach Differentiation

$$P_\alpha'''\cdot\sin\vartheta + 2P''\cdot\cos\vartheta + (\alpha^2 + \alpha - 1)P_\alpha'\cdot\sin\vartheta + \alpha(\alpha+1)P_\alpha\cdot\cos\vartheta = 0.$$

Setzen wir

$$N' = P_\alpha''(\vartheta) = -P_\alpha'\cdot\operatorname{ctg}\vartheta - \alpha(\alpha+1)P_\alpha$$

und

$$N'' = P_\alpha'''(\vartheta) = P_\alpha'[2\cdot\operatorname{ctg}^2\vartheta - \alpha^2 - \alpha + 1] + \alpha(\alpha+1)P_\alpha\cdot\operatorname{ctg}\vartheta$$

in die Differentialgleichung ein, dann ergibt sich

$$L(N) \pm i\mu N = -P_\alpha'(\alpha^2 + \alpha - 1) \pm i\mu P_\alpha'.$$

Die Differentialgleichung wird also erfüllt, wenn α der folgenden charakteristischen Gleichung genügt:

$$\alpha^2 + \alpha - 1 \mp i\mu = 0,$$

also wenn

$$\alpha = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4} \pm i\mu} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4} \pm i\cdot\frac{A^2}{\varepsilon}}$$

oder weiter

$$\alpha = -\frac{1}{2} \pm \left\{\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{A^4}{\varepsilon^2} + \frac{25}{16}} + \frac{5}{4}\right)} \pm i\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{A^4}{\varepsilon^2} + \frac{25}{16}} - \frac{5}{4}\right)}\right\}.$$

Für kleines ε ist angenähert

$$(36) \qquad \alpha = -\frac{1}{2} \pm \frac{A}{\sqrt{2\varepsilon}}\left[1 + \frac{5}{8A^2}\cdot\varepsilon \pm i\left(1 - \frac{5}{8A^2}\cdot\varepsilon\right)\right].$$

Der Unterschied zwischen den Werten von α aus der zweidimensionalen (Gl. 35) und der technischen Methode (Gl. 36) kommt erst in den Beiwerten von ε, wie man leicht ersehen kann, zum Ausdruck.

Statt $k_1 = \frac{5}{8A^2} - \frac{1}{5}\cdot A^2 = 0{,}0477$ hat jetzt ε den Beiwert $k_1' = \frac{5}{8A^2} = 0{,}378$.

Bei kleinem ε ist auch dieser Unterschied vernachlässigbar.

Die Legendresche Differentialgleichung für $P_\alpha(\vartheta)$, wobei

$$\alpha = -\frac{1}{2} \pm \frac{A}{\sqrt{2\varepsilon}}(1 \pm i),$$

lautet jetzt:

$$\frac{d}{d\vartheta}(P_\alpha'\cdot\sin\vartheta) - \left(\frac{1}{4} \pm i\cdot\frac{A^2}{\varepsilon}\right)P_\alpha\cdot\sin\vartheta = 0.$$

Durch Einführung von $x = \sin^2\frac{\vartheta}{2}$ geht diese Gleichung in die hypergeometrische über:

$$x(1-x)\frac{d^2P_\alpha}{dx^2} - (1-2x)\frac{dP_\alpha}{dx} - \left(\frac{1}{4} \mp i\cdot\frac{A^2}{\varepsilon}\right)P_\alpha = 0,$$

welche in der Umgebung von $x = 0$ oder $\vartheta = 0$ zwei komplexe partikuläre Integrale hat (wobei $\underline{F}$ die hypergeometrische Reihe bezeichnet):

1. $F\left[\frac{1}{2} + \frac{A}{\sqrt{2\varepsilon}}(1 \pm i),\ \frac{1}{2} - \frac{A}{\sqrt{2\varepsilon}}(1 \pm i),\ 1 \quad \sin^2\cdot\frac{\vartheta}{2}\right] = X_1 \pm iY_1$,

2. $F[\dots]\log\sin^2\cdot\frac{\vartheta}{2} + 2\left(\frac{1}{4} \pm i\cdot\frac{A^2}{\varepsilon}\right)\sin^2\cdot\frac{\vartheta}{2}\cdot\mathfrak{P}\left(\sin^2\cdot\frac{\vartheta}{2}\right) = X_2 \pm iY_2$,

wobei $\mathfrak{P}\left(\sin^2\cdot\frac{\vartheta}{2}\right)$ eine unendliche Potenzreihe bedeutet. Diese Funktionen entsprechen den Kegelfunktionen eines Potentialproblems. Durch das Einsetzen der komplexen Wurzel α in die Gleichung (17) ergibt sich eine komplexe Funktion von r. Sie enthält vier Konstanten C_α. Diese sind durch vier homogene lineare Gleichungen[1]) verbunden, also nur eine multiplikative Konstante bleibt unbestimmt. Die komplexe Funktion von r, die mit dieser Konstante multipliziert ist, bezeichnen wir mit deutschen Buchstaben $\mathfrak{R}_1 \pm i\mathfrak{R}_2$. Dann ergibt sich die homogene Spannungsfunktion χ_h folgendermaßen:

$$\chi_h = D_1(\mathfrak{R}_1 X_1 - \mathfrak{R}_2 Y_1) + D_2(\mathfrak{R}_2 X_1 + \mathfrak{R}_1 Y_1) + D_3(\mathfrak{R}_1 X_2 - \mathfrak{R}_2 Y_2) + D_4(\mathfrak{R}_2 X_2 + \mathfrak{R}_1 Y_2).$$

Die vier Konstanten D kann man aus den Auflagerbedingungen eindeutig bestimmen.

Die Funktionen X_2, Y_2 wachsen für $\vartheta = 0$ ins Unendliche. Also bei einer oben geschlossenen Schale ist $D_3 = D_4 = 0$.

Zusammenfassung.

Durch Einführung der hemisphärischen Funktion $\overline{\chi}$ ist es möglich, allen Randbedingungen an der inneren und äußeren Oberfläche der dickwandigen Kugelschale vollkommen zu genügen. Die weiter eingeführte „homogene" Funktion χ_h erfüllt die Auflagerbedingungen allerdings nur summarisch, wie dies bei fast allen technischen Problemen der Elastizitätstheorie üblich ist.

Der Wert unserer Lösung besteht vor allem darin, zu ermöglichen, die Gültigkeitsgrenzen der Theorie der dünnen Kugelschale festzustellen.

Auch läßt sich durch Einführung entsprechender Funktionen $\overline{\chi}$ und χ_h die Lösung auf andere dickwandige rotationssymmetrische Schalen erweitern, so daß es auch in anderen Fällen möglich sein wird, die Zulässigkeit der technischen Theorie zu überprüfen.

[1]) Man bekommt sie aus den Gleichungen (22), wenn man die Glieder auf der rechten Seite wegläßt.

Untersuchungen über geschweißte Doppelbleche.

Von Dr.-Ing. **Ernst Klosse** VDI, Köthen.

Die zur Zeit herrschende Rohstoffknappheit, dann auch das Bestreben, das tote Gewicht der Maschinen — vor allem der Fahrzeuge — zu verringern, haben zu Versuchen geführt, Elemente der Leichtbauweise zu ermitteln. Eine sehr viel versprechende Erfindung in dieser Richtung scheint das angemeldete Patent „geschweißte Doppelbleche" zu sein[1]).

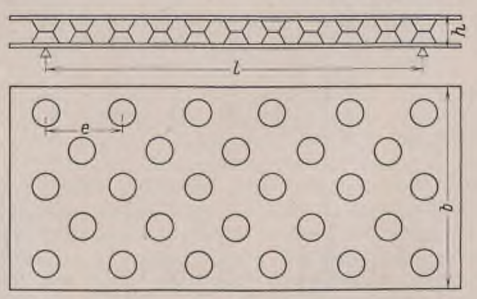


Bild 1. Schematische Darstellung eines Doppelbleches. Zickzackanordnung.

Das Wesentliche dieser Erfindung ist die praktische Folgerung aus der Tatsache, daß bei Biegung im wesentlichen nur die äußeren Fasern beansprucht werden, und daß man daher die mittleren Zonen entweder ganz fortlassen oder wenigstens stark verringern kann. Äußerlich gesehen stellen sich die Doppelbleche als Bleche dar, in die in regelmäßigen Abständen Warzen gezogen werden. Von zwei Blechen werden immer zwei Warzen gleichzeitig gegeneinander gezogen; diese herausstehenden Warzen werden dann auf einer Punktschweißmaschine verschweißt[2]).

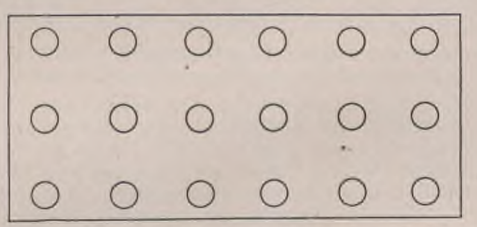


Bild 2. Schematische Darstellung eines Doppelbleches. Kettenanordnung.

Man erzielt also dadurch ein neues Blech, welches aus zwei dünnen Blechen gebildet wird, die durch Warzen in einem bestimmten Abstand gehalten werden. Die Warzen können versetzt sein (hier „Zickzackanordnung" genannt, s. Bild 1) oder nicht versetzt (hier „Kettenanordnung" genannt, s. Bild 2). Die Zickzackanordnung ist die übliche. Die größte Bauhöhe wird nur bestimmt durch die Ziehfähigkeit des Werkstoffes; weiter können frei gewählt werden die Blechdicke sowie der Abstand der Warzen voneinander. Auch der Werkstoff kann frei gewählt werden. Die vorliegende Untersuchung soll sich hauptsächlich auf kastengeglühtes Tiefziehblech erstrecken.

Verhalten der Bleche bei statischen Biegeversuchen: Da die Bleche ihre größten Vorteile bei Biegebeanspruchungen zeigen, soll zunächst über statische Durchbiegungsversuche berichtet werden.

Durch Vorversuche wurde festgestellt, daß die Breite der Probebleche einen gewissen Einfluß hat, und daß größere Breiten eine unverhältnismäßig größere Tragfähigkeit haben als schmale. Um diesen Einfluß zunächst auszuschalten, wurden bei den Hauptversuchen bei den verschiedenen Stücken die Breite und jeweils in je einer Gruppe die Stützweite unverändert gehalten. Die Bauhöhe und die Blechdicke wurden aber verändert.

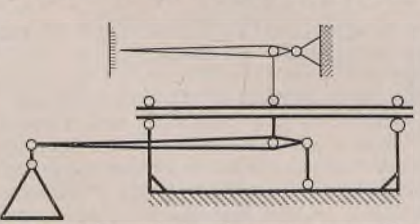


Bild 3. Schematische Darstellung der Vorrichtung für den statischen Biegeversuch.

Das Biegen geschah auf einer Vorrichtung, wie sie schematisch in Bild 3 dargestellt wird. Gemessen wurden die Durchbiegung in Abhängigkeit von der Belastung bei verschiedenen Belastungen der Bleche und jeweils die Bruchlast als größte Last, die das Blech noch tragen konnte. Die Durchbiegungen wurden festgelegt durch den Begriff „Steifigkeit" (kg/mm), worunter das Gewicht in kg, welches 1 mm Durchbiegung verursacht, verstanden werden soll. Öfters zeigte sich, daß sich die Steifigkeit bei größerer Belastung plötzlich auf einen niedrigeren Wert einstellte (Zahlentafel 1). Der Grund hierfür liegt wohl in dem Abplatzen eines oder mehrerer Punkte.

Zahlentafel 1. Versuchsreihe: Durchbiegung eines Doppelblechs mit scharf ausgeprägter Änderung der Steifigkeit infolge Abplatzen je eines Schweißpunktes.

[Vers. E; 7, a]

Nutzlast kg	Durchbiegung mm	Steifigkeit kg/mm
40	0,33	121
80	0,76	105
120	0,98	122
140	1,20	117
160	1,42	113
180	1,53	118
200	1,64	122
220	1,96	112
240	2,07	116
260	2,18	120
280	2,29	123
300	2,51	120
320	2,61	123
340	2,72	125
360	3,60	100
380	3,70	102
400	3,81	105
420	4,04	104
440	4,36	101
460	4,46	103
480	4,80	100
500	5,01	98
520	5,25	99
540	5,44	99
560	5,78	100
580	8,50	68
600	9,05	67
620	9,60	65
640	10,70	60
660	10,30	64
680	11,2	61
700	Bruch	—

Zahlentafel 2. Versuchsreihe: Durchbiegung eines Doppelblechs mit abnehmenden Werten der Steifigkeit (Verformungsbruch).

[Vers. E; 23, a]

Nutzlast kg	Durchbiegung mm	Steifigkeit kg/mm
50	0,22	227
100	0,44	227
150	0,87	172
200	1,09	184
250	1,20	208
300	1,53	196
350	1,64	214
400	1,96	204
450	2,18	206
500	2,40	207
550	2,72	202
600	2,94	204
650	3,37	194
700	3,81	184
750	4,13	182
800	4,68	171
850	5,45	156
900	Bruch	—

Zahlentafel 3. Versuchsreihe: Durchbiegung eines Doppelblechs, Steifigkeit bleibt bis kurz vor dem Bruch nahezu unverändert (Ausbeulungsbruch).

[Vers. E; 34, a]

Nutzlast kg	Durchbiegung mm	Steifigkeit kg/mm
150	1,42	106
200	1,85	108
250	2,18	115
300	2,50	120
350	2,84	123
400	3,27	123
450	3,59	125
500	4,04	124
550	4,57	120
600	5,22	115
650	Bruch	—

Bei Bestimmung der Bruchlast zeigten sich folgende typische Erscheinungen:

Fall 1. Verformungsbruch: Der Steifigkeitswert sinkt von einer bestimmten Belastung an stetig (Zahlentafel 2). In diesen Fällen ist überhaupt kaum von einer „Bruchlast" zu sprechen, da hier der „Bruch" ja nicht plötzlich, sondern mehr schleichend erfolgt. Der Grund dieser Erscheinung ist vermutlich darin zu sehen, daß die durch die Warzen verformten Blechteile den örtlich auftretenden Biegebeanspruchungen der Einzelbleche langsam nachgeben. Dies tritt in der Regel bei dicken Einzelblechen auf.

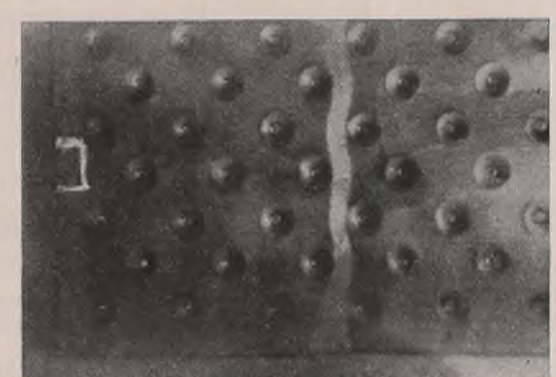


Bild 4. Ausbeulungsbruch.

Fall 2. Ausbeulungsbruch: Der Bruch erfolgt plötzlich durch Ausbeulen eines Einzelblechs nach Bild 4 (Zahlentafel 3).

Fall 3. Unregelmäßiger Bruch: Sobald mehrere Schweißpunkte gleichzeitig abplatzen, erfolgt der Bruch völlig unregelmäßig. Proben mit solcher Brucherscheinung sind als Proben mit unvermeidbaren Herstellungsfehlern von systematischen Untersuchungen auszuschließen.

Da Fall 3 durch Verbesserung der Herstellungsmethoden, Fall 2 durch besondere konstruktive Maßnahmen — wie später gezeigt — vermieden werden kann, so kann Fall 1 als die „natürliche Bruchform" der Doppelbleche bezeichnet werden.

[1]) Anmelder Dr.-Ing. M. v. Tannenberg VDI, Leipzig.

[2]) Zur Zeit der Drucklegung sollen Doppelblechplatten in Abmessungen 1000 · 2000 mm hergestellt werden mit einer Einzelblechdicke bis zu 6 mm; die Warzen dieser Bleche werden nicht durch Punktschweißung, sondern durch Lichtbogen-Loch-Schweißung verbunden.

Zahlentafel 4.
Zusammengefaßte Ergebnisse der statischen Durchbiegungsversuche der Doppelbleche Serie D und E.

Versuchsgruppe	Doppelbleche Serie „D" 200 × 700 mm; Stützweite l = 650 mm: Abmessungen: Bauhöhe h	Abmessungen: Blechdicke δ	Versuchswerte: Steifigkeit	Versuchswerte: Größte Nutzlast	Errechnete Werte: Steifigkeit	Errechnete Werte: Größte Nutzlast	Massives Blech d. gl. Steifigkeit: Blechdicke	Massives Blech d. gl. Steifigkeit: Gewicht	Gew. d. massiven Blechs / Gew. d. Doppelblechs	Serie „E" 200 × 350 mm; Stützweite l = 300 mm: Versuchswerte: Steifigkeit	Versuchswerte: Größte Nutzlast	Errechnete Werte: Steifigkeit	Errechnete Werte: Größte Nutzlast	Massives Blech d. gl. Steifigkeit: Blechdicke	Massives Blech d. gl. Steifigkeit: Gewicht	Gew. d. massiven Blechs / Gew. d. Doppelblechs
	mm	mm	kg/mm	kg	kg/mm	kg	mm	kg		kg/mm	kg	kg/mm	kg	mm	kg	
a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p	q	r
a	18	1,5	44,6	542	68,5	360	9,0	9,9	3,0	256	1150	705	781	7,4	4,1	2,5
b	17	1,5	27,7	390	65,0	343	7,7	8,5	2,6	160	775	675	795	6,4	3,5	2,1
c	16	1,0	17,9	283	40,6	243	6,6	7,3	3,3	110	675	422	530	5,6	3,1	2,8
d	15	1,5	33,6	445	54,8	340	8,2	9,0	2,7	172	762	557	740	6,5	3,6	2,2
e	15	0,5	4,2	75	18,7	118	4,1	4,5	4,1	22,1	200	184	258	3,3	1,8	3,3
f	13	1,5	32,4	418	41,1	298	8,1	8,9	2,7	141	650	420	642	6,1	3,4	2,0
g	13	1,0	15,5	208	29,0	208	6,3	7,0	3,2	65,4	356	293	450	4,7	2,6	2,4
h	13	0,5	5,1	95	14,1	103	4,4	4,8	4,4	25,4	200	146	225	3,5	1,9	3,5
i	12	1,0	15,8	202	24,2	190	6,4	7,0	3,2	51,0	350	246	411	4,3	2,4	2,1
k	11	0,5	5,65	59	11,3	93	4,5	5,0	4,6	19,0	134	111	201	3,1	1,7	3,1
l	10	1,0	12,8	182	17,9	168	5,9	6,5	3,0	43,1	290	182	365	4,1	2,3	2,0
m	8	1,0	9,5	122	10,9	127	5,3	6,0	2,7	30,5	273	111	277	3,7	2,0	1,9
n	8	0,5	3,0	34,5	6,1	70	3,7	4,1	3,7	11,3	77	61,5	154	2,7	1,5	2,7

Zahlentafel 5. Beurteilung der Doppelbleche Serie D und E: Leistungswert in Abhängigkeit vom Schlankheitsgrad der Bleche.

Versuchsgruppe s. Tafel 4	Abmessungen: Bauhöhe	Abmessungen: Blechdicke	Serie „D": Ganzes Blech λ	Serie „D": Teilblech λ_1	Serie „D": Leistungswert	Serie „E": Ganzes Blech λ	Serie „E": Teilblech λ_1	Serie „E": Leistungswert
	mm	mm						
a	b	c	d	e	f	g	h	i
a	18	1,5	116	115	177	53,5	115	818
b	17	1,5	119	115	128	55,0	115	550
c	16	1,0	122	173	138	56,4	173	719
d	15	1,5	130	115	145	60,1	115	540
e	15	0,5	128	345	74	59,2	345	425
f	13	1,5	150	115	136	69,5	115	460
g	13	1,0	146	173	102	67,8	173	380
h	13	0,5	147	345	93	68,0	345	426
i	12	1,0	160	173	99	74,0	173	371
k	11	0,5	168	345	58	77,8	345	285
l	10	1,0	186	173	90	86,0	173	308
m	8	1,0	238	173	60	110	173	291
n	8	0,5	226	345	34	105	345	164

Als überschlägige Berechnungsmethode empfehlen sich vorläufig die üblichen elementaren Methoden der Festigkeitslehre, wobei man das Trägheitsmoment des Querschnitts in üblicher Weise bestimmt und die Blechteile, welche durch die Warzen eingezogen sind, als Verschwächung (Löcher) berücksichtigt. Die so errechneten Steifigkeitswerte sind in der Regel zu groß, die Bruchlasten in der Regel etwas zu niedrig.

Es seien als Beispiele hier nur die zusammengefaßten Ergebnisse zweier Serien in Zahlentafel 4 wiedergegeben.

Bei Serie D betrugen die Blechbreite 200 mm, die Stützweite 650 mm, bei Serie E betrugen die Blechbreite 200 mm, die Stützweite 300 mm.

Verhalten der Doppelbleche bei gleichmäßig verteilter Last: Es ist naheliegend, die Doppelbleche für das Übertragen von gleichmäßig verteilten Lasten zu benützen; sie also z. B. für Behälterwände und ähnlichem zu gebrauchen. Zur Untersuchung des Verhaltens bei solcher Belastung wurden Probebehälter aus Blechen mit den äußeren Abmessungen 600 × 600 mm nach Bild 5 geschweißt. Bei einem Doppelblechpaar war der durch die Warzen entstehende Zwischenraum mit Zement ausgegossen. Alle diese Behälter sollten mit Wasser abgedrückt werden. Leider konnten diese Versuche nicht systematisch durchgeführt werden, weil sich an den bisher zur Verfügung stehenden Platten stets durch schlechte Punktschweißung der Warzen hervorgerufene Undichtigkeiten zeigten. Man wird solche Versuche mit besser geschweißten Platten wiederholen müssen.

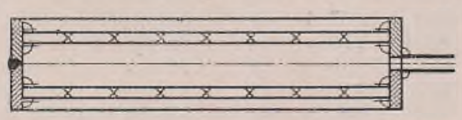


Bild 5. Schematische Darstellung des Probebehälters für den Druckversuch an Doppelblechplatten.

Folgerungen aus den Versuchen: Auf Grund der bisherigen Versuchsergebnisse lassen sich schon mit einiger Sicherheit einige Regeln über die beste Ausführung der Doppelbleche aufstellen.

1. Die Kettenanordnung ist der Zickzackanordnung unterlegen. Wie unter 2. noch näher ausgeführt, sollen die Abstände der Warzen voneinander möglichst klein sein. Das geht am einfachsten bei der Zickzackanordnung durchzuführen. Sieht man nämlich bei der Kettenanordnung sehr kleine Abstände vor, so werden in einer Querreihe, welche ja für das Übertragen der Biegungsspannung maßgebend ist, einerseits die Einzelbleche durch die Warzen stark geschwächt, andererseits wird der Kräftefluß auf die neben den Warzen liegenden Blechteile zusammengedrängt, wodurch sich Spannungsspitzen nicht vermeiden lassen.

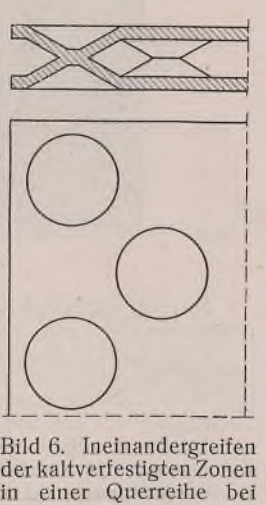


Bild 6. Ineinandergreifen der kaltverfestigten Zonen in einer Querreihe bei Zickzackanordnung.

2. Der Abstand der Warzen soll möglichst klein sein, und zwar aus zwei Gründen: Erstens wird die Knicklänge verringert; zweitens kann man es bei kleinen Abständen erreichen, daß in einer Querreihe stets durch das Kaltziehen der Warzen verfestigte Blechteile mit höherer Fließgrenze vorhanden sind (Bild 6). Man kann also die scheinbar zunächst unerwünschte Tatsache der Werkstoff-Verfestigung durch das Ziehen der Warzen in günstiger Weise ausnützen.

3. Die Bauhöhe soll möglichst hoch gewählt werden, so hoch wie ein vorliegendes Blech sich werkstattmäßig noch mit Sicherheit ziehen läßt.

Die Punkte 2 und 3 können in der Beurteilung zusammengefaßt werden. Man bestimmt den Schlankheitsgrad des gesamten Bleches (λ) und den des Teilbleches (λ_1). Bei dem Wert λ soll als „Knicklänge" die Stützweite genommen werden; der Trägheitsradius wird in üblicher Weise mit Hilfe des Trägheitsmomentes des ganzen Blechquerschnittes berechnet. Bei dem Wert λ_1 ist als „Knicklänge" die Warzenentfernung (Maß „e" Bild 1) eingesetzt; der Trägheitsradius wird durch das Trägheitsmoment des Teilblechs — bezogen auf die Schwerachse des Einzelblechs — berechnet. Bildet man nun den Begriff „Leistungswert", worunter das Verhältnis von höchster Bruchlast zu Eigengewicht verstanden werden soll, so zeigt sich, daß niedrigen λ- und λ_1-Werten hohe Leistungswerte entsprechen (Zahlentafel 5). Der λ-Wert des ganzen Bleches wird im wesentlichen durch große Bauhöhe erniedrigt, der λ_1-Wert des Einzelbleches durch kleine Warzenentfernung.

Bei bestimmtem Werkstoff (z. B. St 37) ist die größte Bauhöhe durch die Blechdicke gegeben, indem man die Bauhöhe gleich der Tiefung nach Erichsen setzt. Es wurde nämlich festgestellt, daß man hier die größte Warzenhöhe etwa gleich halber Tiefung setzen kann, da sich große Blechtafeln nicht so tief ziehen lassen wie die kleinen Stücke bei Erichsen. Da stets zwei Warzen aufeinanderliegen, ist also größte Bauhöhe gleich Tiefung, sofern es sich um etwa gleiche Warzendurchmesser handelt wie bei Erichsen. Für die verschiedenen Bauhöhen kann man also die Mindestentfernung zwischen den Warzen festlegen, d. h. alle vorgenannten Punkte in Abhängigkeit von der Blechdicke angeben, um günstige Verhältnisse zu verwirklichen.

4. Es ist wahrscheinlich, daß eine rhombenförmige Ausbildung der Warzen günstiger ist als die bisher nur angewendete runde Warzenform da bei der Rhombenform die kaltverfestigten Zonen viel weiter ineinandergreifen können als bei der runden.

5. Die Zuverlässigkeit der Punktschweißung muß gegenüber den zur Zeit vorliegenden Proben noch verbessert werden. Die bisher festgestellte Unsicherheit liegt m. E. daran, daß man bisher die etwa vorhandene Zunderschicht vor dem Schweißen nicht entfernt hat. Wenn die Herstellung dieser Bleche in größerem Stile aufgenommen wird, wird es notwendig sein, diesen Übelstand dadurch zu vermeiden, daß man die Punkte vor dem Schweißprozeß etwas abschleift. Zwischen der Maschine, welche in einer Querreihe die Warzen in die Bleche zieht, und der Punktschweißmaschine, welche die einzelnen Punkte schweißt, müßte ein Schleifband angeordnet werden, welches die Warzen abschleift.

Verhalten der Doppelbleche bei dynamischer Beanspruchung: Doppelbleche sollen auch in Bauteilen verwendet werden, welche dynamischen Beanspruchungen ausgesetzt sind (z. B. im Fahrzeugbau). Man kann solche Prüfungen grundsätzlich auf verschiedene Weise durchführen. Man biegt das Blech um ein gewisses Maß aus seiner Null-Lage (z. B. mit einem Exzenter) oder man bringt es durch Aufsetzen einer exzentrisch umlaufenden Masse in Schwingungen oder man führt die Schwingungen durch magnetische Erregungen herbei.

Das erste Verfahren hat den Nachteil, daß man das Lösen eines der vielen Schweißpunkte nicht sofort erkennen kann. Das Lösen eines Schweißpunktes bedeutet aber eine Änderung der Eigenschaften des ganzen Bleches. Man kann also auf diese Weise das Ende des Versuchs

an dem Blech in seinem ursprünglichen Zustande schlecht oder gar nicht erkennen. Bei dem zweiten Verfahren würden durch die Befestigung der aufgesetzten schwingenden Masse Unsicherheiten in den Versuch hineingetragen werden; man kann nicht erkennen, inwieweit die Ergebnisse dadurch beeinflußt werden.

Die magnetische Erregung, die im Rhythmus der Eigenschwingungszahl des Bleches erfolgen soll, hat den Vorteil, daß sie ohne jede örtliche Beeinflussung durch die Versuchseinrichtung arbeitet; jede Veränderung der Probe, also auch das Lösen eines Schweißpunktes, bedeutet eine Änderung der Eigenschwingungszahl des Bleches und damit ein Außertrittfallen gegenüber den magnetischen Impulsen, falls diese — was vorausgesetzt werden muß — konstant gehalten werden.

Die prinzipielle Ausführung der Versuche mit magnetischer Erregung ist verhältnismäßig einfach. Die Bleche wurden in einem Rahmen an den Enden drehbar gelagert. Darunter wurde in der Mitte ein Magnet angeordnet, welcher mit Wechselstrom der Frequenz gespeist wurde, welche der Eigenschwingungszahl der Probe entsprach. Durch besondere Maßnahmen mußte nun die Erregerfrequenz konstant gehalten werden. Es wurde folgende Anordnung gewählt: Ein Synchronmotor wurde an das Netz der öffentlichen Stromversorgung angeschlossen. Da die Drehzahl dieses Motors nur von der Frequenz des Netzes abhängt, diese aber heutzutage praktisch konstant ist, wurde so gleiche Drehzahl erreicht. Der Synchronmotor war mit einem Gleichstrom-Nebenschluß-Generator gekuppelt, welcher einen Gleichstrom-Nebenschluß-Motor mit Strom versorgte. Durch Änderung der Erregung des Generators konnte man verschiedene, jetzt aber unveränderliche Drehzahlen des Gleichstrom-Motors einstellen. Der Gleichstrommotor war mit einem Einphasen-Wechselstrom-Generator gekuppelt, welcher nunmehr eine Frequenz erzeugte, die nur von der Drehzahl des Motors abhängig ist. Diese Frequenz konnte so stufenlos von 0 bis etwa 70 Hertz verändert werden. Durch Änderung der Magnet-Stromstärke kann leicht die Größe des Schwingungsausschlages verändert werden. Zur weiteren Sicherung der Konstanthaltung der Frequenz wurden verhältnismäßig starke Aggregate verwendet. Sobald also nun das Blech mit seinen Schwingungen außer Tritt fiel, hatte man den Beweis dafür, daß irgendein Bruch eingetreten war. Das Außertrittfallen konnte man deutlich hören; wenn das Blech in der Eigenfrequenz schwang, war ein ganz bestimmter, ziemlich lauter Summerton hörbar, welcher sofort aufhörte, wenn das Blech nicht mehr schwang. Anfangs wurde befürchtet, daß sich das Blech unter Einwirkung der Wirbelströme zu stark erhitzte. Dies war auch der Fall, als zuerst die Bleche ohne Rücksicht auf ihre Eigenfrequenz geprüft wurden; die Erwärmung der Bleche war da durch die viel größere elektromagnetische Energie so stark, daß sie nur ganz kurze Zeiten (etwa 10 min.) hintereinander geprüft werden konnten. Beim Schwingen in der Eigenfrequenz fallen diese Schwierigkeiten völlig fort; zunächst wegen der geringen Energiezufuhr, weiter durch die intensive Kühlwirkung des sich stärker bewegenden Bleches. Die Bleche nahmen die Temperaturen an, welche fühlbar über der Raumtemperatur lagen.

Die Zahl der Wechsel wurde durch eine Synchronuhr gezählt, welche unter Zwischenschaltung eines Transformators zur Erzeugung höherer Spannung dem Magnetkreis parallel lag, und welche für die verschiedenen Frequenzen geeicht war. Bild 7 zeigt schematisch das Verhältnis der Frequenz des Wechselstromes zu der Lastwechselzahl. Man erkennt hieraus, daß einer Periode des Wechselstromes zwei Lastwechselperioden zugehören. Man hat also dabei den großen Vorteil, daß in einer Zeiteinheit sehr viele Lastwechsel stattfinden, daß also die Versuchsdauer verhältnismäßig kurz ist. Ein Beispiel soll dies zeigen: Die übliche Frequenz des Wechselstromes war etwa 40 Hertz, das bedeutet 80 Lastwechsel je Sekunde. In einer Stunde wurden also schon 144 000 Lastwechsel verwirklicht. Da das Aggregat etwa acht Stunden am Tage in

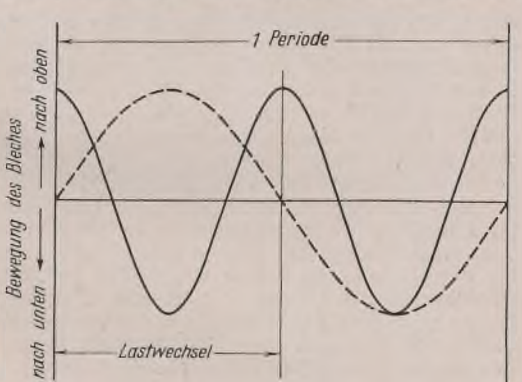


Bild 7. Verhältnis der Schwingbewegung des Doppelblechs zu dem Stromverlauf des Magnetwechselstroms.

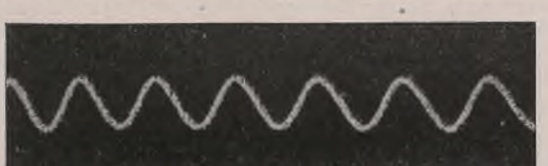


Bild 8. Oszillogramm der Blechschwingungen.

Betrieb war, wurde schon nach drei Tagen etwa die $3^1/_2$-Millionen-Grenze erreicht. Bild 8 zeigt das Oszillogramm der Blechschwingungen; es ist hieraus die Belastungskurve zu erkennen. Stroboskopische Beobachtungen

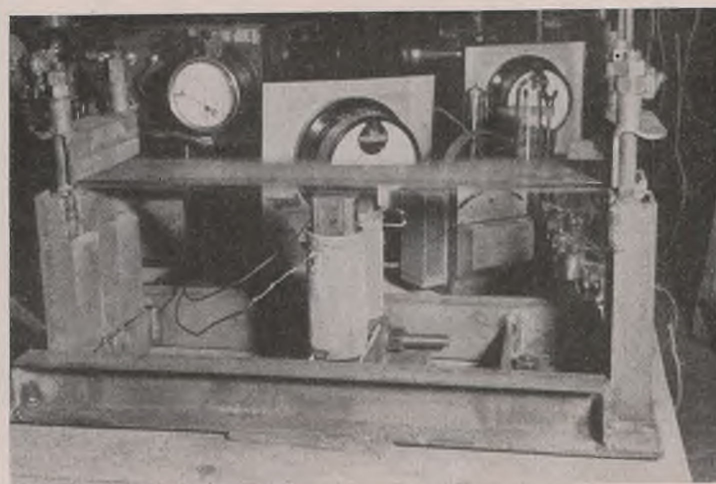


Bild 9. Versuchsstand für die dynamischen Prüfungen.

vervollständigen das Bild. Man konnte deutlich die Blechbewegungen erkennen und sehen, daß die Durchbiegungen tatsächlich so erfolgen, wie sie geplant waren. Auf dem gleichen Prinzip fußend, wurde auch ein Film von dem schwingenden Blech aufgenommen, der Ähnliches zeigt. Bild 9 zeigt den Versuchsstand. Die Ergebnisse sind aus Zahlentafel 6 und 7 zu ersehen.

Bei den hohen Beanspruchungen ist man schon an der Dauerfestigkeitsgrenze des Bleches. Bei den Blechbrüchen traten typische Dauerbrucherscheinungen auf, welche durch Versprödung des Werkstoffes infolge der Dauerbeanspruchung hervorgerufen werden. Interessant sind die Bilder 10 und 11, welche den Riß in verschiedenen Vergrößerungen zeigen. Bei Bild 11 fallen die zerfaserten Kanten auf; aus der Ausbildung des Risses kann man schließen, daß man sich der Dauerfestigkeitsgrenze des Werkstoffes genähert hat. (Die leichte Unschärfe in den Aufnahmen kommt daher, daß die Blechränder nicht in einer Bildebene liegen.)

Versucht man aus den gefundenen Werten eine Wöhlerkurve aufzustellen, so erhält man Bild 12. Man muß sich jedoch im klaren sein, daß diese Kurve noch keine endgültigen Werte enthält. Viel wichtiger ist es, zu versuchen, aus den bisher vorliegenden Versuchsergebnissen die praktischen Folgerungen zu ziehen. Diese dürften etwa folgende sein:

Zunächst hängen die Lastwechselzahlen sehr von der Zuverlässigkeit der Schweißungen ab; typisch erscheinen hierfür die Ergebnisse der Versuche 3 und 5; die Belastungen waren etwa gleich; da aber bei Versuch 5 gebeiztes Blech verwendet war, war die Schweißung besser und die Lastwechselzahlen waren beinahe doppelt so groß.

Zahlentafel 6.

Ergebnisse der Dauerfestigkeitsprüfungen der Doppelbleche.
Breite 150 mm, Blechdicke 1 mm, Bauhöhe 8 mm, Stützweite 650 mm.

Blech-Nr. Serie B	einseitiger Ausschlag	entsprechende Belastung	Lastwechselzahlen	Bemerkungen
	mm	kg	× 10⁶	
1	5,5	50	2,66	Bruch im unteren Blech
2	5,5	50	1,38	Bruch im oberen Blech (Blechfehler!)
3	5,5	50	2,38	Lösung einer Schweißstelle
4	4,2	38	6,42	Lösung einer Schweißstelle
5	5,3	48	4,60	gebeiztes Blech; Lösung einer Schweißstelle
6	4,8	43	7,06	ungebeiztes Blech; Bruch im unteren Blech
7	3,5	32	2,16	gebeiztes Blech; Bruch im oberen Blech
8	3,5	32	11,59	ungebeiztes Blech; Bruch im unteren Blech

Zahlentafel 7.

Ergebnisse der Dauerfestigkeitsprüfung der Doppelbleche.
Breite 150 mm, Blechdicke 1 mm, Bauhöhe 12 mm, Stützweite 650 mm.

Blech-Nr. Serie B	einseitiger Ausschlag	entsprechende Belastung	Lastwechselzahlen	Bemerkungen
	mm	kg	$\times 10^6$	
9	3,5	67	1,53	16 Schweißp. hatten sich gelöst
10	3,5	67	2,76	Bruch im unteren Blech
11	3,5	67	über 10	kein Bruch



Bild 10. Bild eines Blechrisses infolge Dauerbeanspruchung.



Bild 11. Zerfranste Ränder eines Blechrisses infolge Dauerbeanspruchung.

Die zweite Folgerung ist die, daß für hohe Lastwechselzahlen die Bleche sorgfältig vorbereitet werden müssen. Bei Versuch 1 und 2 waren die Belastungen gleich; da aber bei 2 das Blech schon vor Beginn des Versuchs eine kleine Einknickung zeigte, so war die Lastwechselzahl bei 1 beinahe wieder doppelt so hoch. Ähnlich bei Blech 7 und 8.

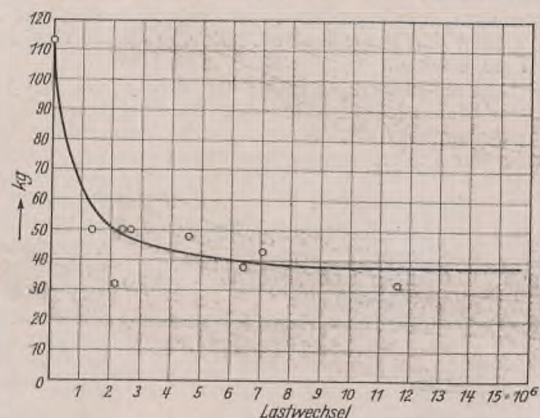


Bild 12. Wöhlerkurve eines Doppelblechs.

Trotzdem Blech 7 gebeizt, die Schweißung also zuverlässig war, trat der Bruch verhältnismäßig früh ein, da das obere Blech von der Herstellung her eine kleine Einknickung hatte, d. h. bei Verarbeitung dieser Bleche für dynamische Beanspruchungen wird man sehr sorgfältig vorzugehen und die Bleche vor unnötigen Verformungen zu schützen haben. Dies ist aber nicht als ein besonderer Nachteil der Bleche aufzufassen, denn es ist bekannt, daß alle irgendwie in Form oder Stoff hochwertigen Maschinenteile für dynamische Beanspruchungen besonders sorgfältig zu verarbeiten sind.

Die Wöhlerkurve wurde hier in der in der Regel ungewöhnlichen Form gezeichnet, daß die Belastungen (nicht wie üblich die Spannungen) als abhängige Größen von den Lastwechselzahlen aufgetragen wurden. Der Grund liegt darin, daß es zur Zeit noch nicht möglich ist, die Spannungen bei auftretenden Durchbiegungen der Doppelbleche exakt zu erfassen.

Interessant ist bei dynamischer Beanspruchung das Verhältnis voller Bleche zu den Doppelblechen. Unterstellt man auf Grund der bisher vorliegenden Ergebnisse eine Tragfähigkeit von etwa 38 kg für diese Bleche mit 8 mm Bauhöhe, so ergibt sich:

Die Dauerbiegefestigkeit (Wechselfestigkeit) von St 37 beträgt 17 kg/mm². Unter Berücksichtigung eines Abzuges von 15 % wegen der Größe des Teiles gegenüber der Größe von Prüfstäben und von 25 % wegen der Walzhaut-Oberfläche erhält man als zulässige Dauerfestigkeit

$$17 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}75 = 10{,}8 \text{ kg/mm}^2.$$

Unter Annahme des obigen Belastungsfalles und der obigen Belastungsgröße sowie der Formziffer $\alpha_k = 1{,}3$ für glatte Bleche mit roher Schnittkante und der Empfindlichkeitsziffer $\eta_k = 0{,}6$ für St 37 erhält man die Kerbwirkungszahl $\beta_k = 1 + \eta_k (\alpha_k - 1)$

$$\beta_k = 1{,}18.$$

Rechnet man sich aus diesen Angaben und der zulässigen Dauerbiegefestigkeit die Blechdicke aus, so erhält man

$$s = 5{,}17 \text{ mm},$$

d. h. unter Zugrundelegen der obigen Annahmen ist bei dynamischer Beanspruchung ein 5,17 mm dickes volles Blech dem Doppelblech von 8 mm Bauhöhe und 2 × 1 mm Dicke gleichwertig! Da für die statische Belastung das hier vorliegende Doppelblech einem vollen Blech der Dicke 5 bis 6 mm gleichwertig ist, so würde, wenn dieses gleiche Verhältnis noch durch weitere dynamische Versuche an anderen Abmessungen der Doppelbleche bestätigt würde, das Doppelblech von 8 mm Bauhöhe (Werkstoffaufwand also 2 mm Blech) dem vollen Blech von 5 bis 6 mm Dicke in statischer und dynamischer Hinsicht gleichwertig sein!

Wirtschaftliche Bedeutung und Anwendung der Doppelbleche: Die Bedeutung der Doppelbleche liegt in der Werkstoffersparnis, außerdem wird das tote Gewicht der Bauten geringer. Wie weit die Ersparnis gehen kann, zeigt Bild 13, dem folgendes Beispiel zugrunde liegt: Es handelt sich um ein Doppelblech mit 650 mm Stützweite, 150 mm Breite, 2 × 1 mm Blechdicke und 8 mm Bauhöhe. Das Blech trug 110 kg. Bei niedrigeren Bauhöhen ist die Nutzlast geringer, bei größeren höher, das Gewicht aber stets unverändert, d. h. es entsteht in der Darstellung: Gewicht in Abhängigkeit von der Nutzlast eine gerade Linie parallel zur Abszisse. (Über die hier angegebene Bauhöhe von 8 mm hinaus ist diese Gerade gestrichelt gezeichnet, da sie einen theoretischen Wert darstellt). Wählt man statt des Doppelblechs ein volles Blech der gleichen Breite, aber stets solcher Dicke, wie sie zur Übertragung der verlangten Nutzlasten notwendig ist, so erhält man infolge des steigenden Gewichts die gestrichelte Kurve. Man erkennt, daß bei den gewählten Abmessungen das Doppelblech schon von einer Nutzlast von etwa 12 kg an eine Werkstoffersparnis ergibt. Den Mehraufwand an Werkstoff bei Verwendung von vollem Blech gegenüber den Doppelblechen zeigt die strichpunktierte Linie.

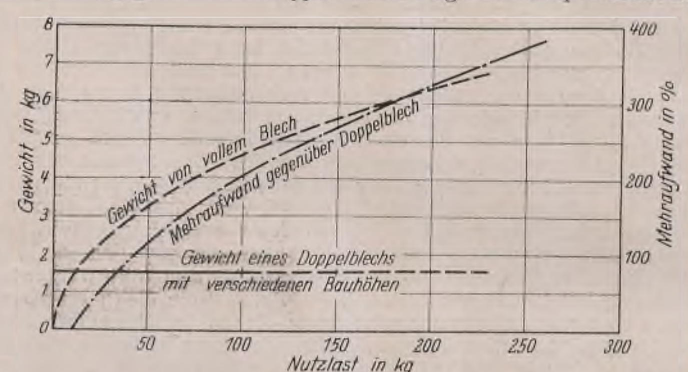


Bild 13. Eigengewicht von Doppelblechen gleicher Blechdicke, aber verschiedener Bauhöhe und von vollen Blechen in Abhängigkeit von der Tragfähigkeit.

Mehraufwand an Werkstoff bei vollen Blechen gegenüber Doppelblechen bei verschiedenen Nutzlasten (strichpunktierte Kurve).

Etwas ähnliches zeigt die Zahlentafel 4 in der Spalte h für die Serie D und in der Spalte p für die Serie E. Hier wird angegeben, welche Blechdicke eines vollen Blechs bei gleicher Breite und Stützweite wie das Doppelblech notwendig ist, um jeweils die gleiche Steifigkeit zu erreichen. In den Spalten k und r sind dann die Verhältnisse des Gewichts des vollen Blechs zu dem Gewicht des Doppelblechs angegeben. Man erkennt hieraus, daß die Gewichtsunterschiede zugunsten des Doppelblechs sehr erheblich sind. Ferner erkennt man durch Vergleich der Serien D und E, daß bei größerer Stützweite dieses Verhältnis für die Doppelbleche günstiger wird.

Bei dem gegenwärtigen Stand der Dinge könnten die Doppelbleche für Abdeckplatten im Brückenbau, im Fahrzeugbau schon ohne weiteres verwendet werden. Die an und für sich sehr aussichtsreiche Verwendung für den Behälterbau würde wegen der zur Zeit noch nicht genügend zuverlässigen Schweißpunkte jetzt noch Schwierigkeiten machen. Weiter hönnte man an die Verwendung von Doppelblechplatten als Stegblech in Blechträgern mit und ohne Zementfüllung denken, schließlich auch als Bauelement für den Bau doppelwandiger Gefäße. Dann sei noch erwähnt, daß schon balkenartige Bleche mit den Abmessungen von 2000 × 400 mm, Bauhöhe etwa 50 mm, Blechdicken 3 bis 5 mm, Kraterdurchmesser 100 mm hergestellt wurden. Die Bleche waren an den Seiten herumgezogen und verschweißt, so daß geschlossene Hohlkörper entstanden; zwei solcher Balken wurden aus Hydronaliumblech hergestellt, und zwar mit Blechdicken 3 und 5 mm; dabei ergab sich, daß die Bleche leichter als Wasser waren, so hatte das 3 mm dicke Blech einen Auftrieb von 15 kg, das 5 mm dicke einen solchen von 11 kg.

Zusammenfassung: Die Doppelbleche (DRPa) stellen ein beachtenswertes Mittel dar, bei vorliegender Biegungsbeanspruchung Werkstoff zu sparen, was bei den heutigen Bestrebungen des Leichtbaues erwünscht und im Zeichen der heutigen Werkstoffknappheit hochwillkommen ist. Es wurden wesentliche Eigenschaften der Doppelbleche mitgeteilt und Konstruktionsregeln über die günstigsten Abmessungen der Doppelbleche aufgestellt.

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt.
Verlag: Wilhelm Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W 9.
Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

DER STAHLBAU

Schriftleitung:
Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule
Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599
Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61
Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage zur Zeitschrift DIE BAUTECHNIK Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

13. Jahrgang BERLIN, 4. Oktober 1940 Heft 21/22



Professor W. Rein 60 Jahre alt.

Am 19. September 1940 vollendete unser langjähriger Schriftleiter, Herr Professor W. Rein, sein 60. Lebensjahr. In der vorliegenden Ausgabe der „Bautechnik" hat Herr Dr. Fischmann sein Wirken zum Nutzen des deutschen Stahlbaues eingehend gewürdigt.

Wir gedenken voll Dankbarkeit seiner Verdienste um unsere Zeitschrift und verbinden mit unseren besten Glückwünschen die Hoffnung, daß seine Tätigkeit für uns noch lang und erfolgreich sein möge.

Der Verlag.

Beitrag zum Hängebrückenproblem.[1)]

Von **A. Hertwig**, Berlin.

Vorbemerkung.

Die versteifte Hängebrücke gehört bekanntlich zu den Gebilden, bei deren statischer Untersuchung die Gleichgewichtsbedingungen am verformten System angeschrieben werden müssen. Das Biegungsmoment am Versteifungsbalken ist (Bild 1)

$$M_x = M_{0x} - H_{g+p}(z + \eta_k)$$
$$M_x'' = -g(x) - p(x) - H_g z'' - H_p z'' - H_{g+p}\eta_k''.$$

Im allgemeinen greift das Eigengewicht bei der Aufstellung zunächst am statisch bestimmten System an, daher ist

$$g(x) + H_g z'' = 0.$$

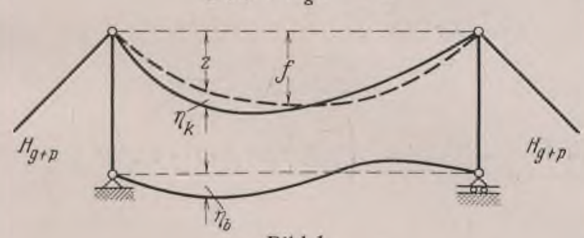


Bild 1.

Die vereinfachte Differentialgleichung für die elastische Linie des Versteifungsbalkens lautet mit $\eta_k = \eta_b = \eta$, d. h. mit der Annahme starrer Hängeseile,

$$(E_b J_x \eta'')'' = -M_x''$$

und mit der vorstehenden Gleichung für

$$(E_b J_x \eta'')'' - H_{g+p}\eta'' = p(x) + H_p z''$$

oder mit $E_b J_x \eta'' = y$ und $\frac{x}{l}$ als Unabhängige x

$$y'' - \frac{H_{g+p} l^2}{E_b J_x} \cdot y = l^2 p(x) + H_p z'' = f(x).$$

In dieser Gleichung ist H_p eine Funktion von η, außerdem H_{g+p} und H_p abhängig von $p(x)$ und J_x und z abhängig von x. Der allgemeine Fall mit $\eta_k \neq \eta_b$ wird unten behandelt.

Die Differentialgleichung ist eine nicht lineare mit veränderlichen Koeffizienten, es gilt also das Gesetz der Superposition nicht, kann also auch streng genommen keine Einflußlinien für die statischen Größen geben. Um zunächst Lösungen der Differentialgleichung zu gewinnen, wird sie vereinfacht. Dann wird geprüft, ob diese Vereinfachungen mit den für die Rechnungen geforderten Genauigkeiten vereinbar sind.

Die wichtigste Vereinfachung folgt aus der Tatsache, daß bei den Hängebrücken der Wirklichkeit der Seilzug durch das Eigengewicht H_g groß ist gegen den Seilzug H_p infolge der Verkehrslasten, daß man also für H_{g+p} einen festen Mittelwert für alle Werte von $f(x)$ einführen kann, den man dann als von η unabhängig annehmen darf. So wird die Differentialgleichung linearisiert. Nun ist bloß noch eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit dem veränderlichen Koeffizienten $\frac{H_{g+p} l^2}{E J_x}$ zu lösen. Trotz der Linearisierung gibt es aber immer noch keine Einflußlinien. Wohl gibt es eine sehr genaue Momentenfläche y für eine über den Balken wandernde Last „Eins", da die Änderungen von H_{g+p} für die verschiedenen Stellungen der Last „Eins" sehr klein gegenüber H_{g+p} sind. Jedoch bleibt die Frage, ob und mit welcher Genauigkeit der Rechnung man diese Fläche als Einflußfläche benutzen darf. Denn für eine Voll- oder Teilbelastung der Brücke ändert sich natürlich H_{g+p} erheblich. Praktische Rechnungen zeigen schließlich, daß mit Rücksicht auf die überhaupt erzielbare Genauigkeit die Momentenflächen der wandernden Last „Eins" als Einflußlinien benutzt werden können. Beispiele enthält das in Fußnote 1 erwähnte Forschungsheft.

Die Aufgabe ist nun, die Differentialgleichung mit veränderlichem Beiwert $\psi(x) = \frac{H_{g+p} l^2}{E_b J_x}$

$$y'' - \psi(x) y = l^2 p(x) + H_p z'' = f(x)$$

zu lösen. Für mannigfaltige Formen $\psi(x)$ gibt es bekannte Lösungen durch Besselsche Funktionen usw. Diese Formen von $\psi(x)$ passen aber nicht immer zu den in der Hängebrückenuntersuchung gegebenen. Wir wollen einen anderen Weg gehen und zu gewählten Lösungen y die zugehörigen Beiwerte $\psi(x)$ mit den in der Praxis gegebenen $\psi(x)$ vergleichen. Man kann in den gewählten Lösungen, die außerdem aus elementaren Funktionen bestehen sollen, genügend Festwerte einführen, so daß eine Anpassung der $\psi(x)$ an gegebene $\psi(x)$ möglich wird.

1) Dieser Beitrag ist ein Auszug aus der unter dem gleichen Titel in der Reihe „Forschungshefte aus dem Gebiete des Stahlbaues" demnächst erscheinenden Arbeit. Die Literatur ist dort angegeben.

§ 1. Partikuläre und vollständige Lösung.

Als allgemeinsten Ansatz für die partikuläre Lösung wählen wir

$$y_1 = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\Sigma\, \alpha_i\, x^i}{\Sigma\, \beta_i\, x^i},$$

in der φ_1 und φ_2 ganze rationale Funktionen sind und ihr Grad nach der Anzahl der für die Anpassung notwendigen Festwerte und α und β bestimmt wird. Die vollständige Lösung findet man in der bekannten Weise mit dem Ansatz $y = y_1 v$ nach Einsetzen in die homogene Gleichung $y'' - \psi y = 0$ aus der Gleichung $v'' y_1 + 2 y_1' v' = 0$ oder mit $v' = u$

$$u_1' y_1 + 2 u y_1' = 0 \qquad u = \frac{1}{y_1^2}$$

$$v = C_1 + C_2 \int \frac{dx}{y_1^2}$$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \varphi_3 \qquad \varphi_3 = \int \frac{dx}{y_1^2} \qquad y_1 y_2' - y_2 y_1' = 1.$$

Die inhomogene Gleichung löst man durch Variation der Konstanten:

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$$
$$C_1(x) = -\int f(x) y_2\, dx + K_1 = D_1(x) + K_1$$
$$C_2(x) = \int f(x) y_1\, dx + K_2 = D_2(x) + K_2$$
$$y = D_1(x) y_1 + D_2(x) y_2 + K_1 y_1 + K_2 y_2$$
$$y = R(x) + K_1 y_1 + K_2 y_2.$$

Das Integral $\varphi_3 = \int \frac{dx}{y_1^2} = \int \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)^2 dx$ führt nach der Partialbruchzerlegung von $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$ auf bekannte Integrale und enthält elementare Funktionen, rationale, den natürlichen Logarithmus und den arc tg oder Ar Tg. Die Konvergenz der Integrale φ_3 und $D(x)$ ist bei praktischen Aufgaben vorhanden. Es sei hier nur soviel erwähnt, daß bei den vorliegenden Rechnungen nur solche Funktionen φ_1 und φ_2 in Frage kommen, deren Nullpunkte außerhalb des Intervalls liegen, über das integriert wird. Dann ist φ_3 in diesem Intervall konvergent. Um auch die Integrale $D_1(x)$ und $D_2(x)$ durch elementare Funktionen lösen zu können, müssen noch einige Annahmen über $f(x) = l^2 p(x) + H_p z''$ gemacht werden. Das Integral

$$D_1(x) = -\int f(x) \frac{\varphi_1}{\varphi_2} \cdot \varphi_3\, dx$$

enthält Einzelintegrale:

$$\int \chi(x) \ln \varphi(x)\, dx \qquad \int \chi(x) \operatorname{arc\,tg} \varepsilon(x)\, dx \qquad \int \chi(x) \operatorname{Ar\,Tg} \varepsilon(x)\, dx.$$

Ist $\chi(x)$ die Ableitung einer ganzen rationalen Funktion, dann sind diese Integrale durch partielle Integration elementar lösbar. Diese Forderung wird erfüllt, wenn in

$$\frac{f(x)}{\varphi_2(x)} = \frac{l^2 p(x) + H_p z''}{\varphi_2(x)} = \varphi_p$$

$p(x)$ und z'' durch $\varphi_2(x)$ teilbar ist. Man muß also statt einer gleichmäßig angenommenen Verkehrslast p eine veränderliche $p(x)$ wählen. Ebenso darf z'' keine Konstante sein, d. h. z darf nicht, wie üblich, näherungsweise als Parabel 2. Ordnung dargestellt werden: $z = 4f(x - x^2)$, sondern als Parabel höherer Ordnung, z. B. 4. Ordnung,

$$z = 4\bar{f}[x - x^2 + \gamma (x - x^2)^2].$$

Dann ist bei $\varphi_2 = \beta + x - x^2$

$$(5) \qquad \frac{H_p z''}{\varphi_2} = -48 \bar{f} \gamma H_p, \text{ wenn } 1 - \gamma - 6 \beta \gamma = 0 \text{ ist.}$$

Aus dieser Bedingung bestimmt man γ und $\bar{f}$ mit der Nebenbedingung, daß der Durchhang der Parabel 4. Ordnung gleich f ist oder der Flächeninhalt beider Seillinien gleich; dann ist

$$\bar{f} = \frac{f}{1 + \frac{\gamma}{4}} \quad \text{oder} \quad \bar{f} = \frac{f}{1 + \frac{\gamma}{5}}.$$

Diese Seilkurve ist eine ebenso brauchbare Näherung wie

$$z = 4f(x - x^2).$$

Ähnlich wählt man z. B. $p(x) = p_0 (1 + \xi_1 x + \xi_2 x^2)$, wenn $\varphi_2 = \beta + x - x^2$ ist. Dann ist

$$\frac{l^2 p(x)}{\varphi_2} = \frac{p_0 l^2}{\beta}, \quad \text{wenn } \xi_1 = -\xi_2 = \frac{1}{\beta} \text{ ist.}$$

Nun sind alle Integrale elementar lösbar.

Der Ansatz

$$y_1 = \frac{\varphi_1}{\varphi_2},$$

in Gl. (1) eingesetzt, ergibt mit $\varDelta \varphi_{12} = \varphi_1 \varphi_2' - \varphi_2 \varphi_1'$

$$y_1'' - \frac{2 \varphi_2 \varDelta \varphi_{12} - \varphi_2 \varDelta \varphi_{12}'}{\varphi_1 \varphi_2^2} \cdot y_1 = f(x)$$

$$(6) \qquad \psi(x) = \frac{2 \varphi_2 \varDelta \varphi_{12} - \varphi_2 \varDelta \varphi_{12}'}{\varphi_1 \varphi_2^2} = \frac{\varphi_4}{\varphi_1 \varphi_2^2}.$$

§ 2. Die Funktion $\psi(x)$.

Die allgemeinste Form von $\psi(x)$, die eine ausreichende Zahl von Festwerten besitzt, und bei der die Bestimmung der Festwerte aus der durch eine praktische Aufgabe gegebenen Form einen noch erträglichen Rechenaufwand erfordert, entsteht aus

$$\varphi_1 = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4$$

und dem entsprechenden φ_2 mit der Bezeichnung $\alpha_{ik} = \alpha_i \beta_k - \beta_i \alpha_k$.

Es wird

$$\begin{aligned}\psi(x) = \frac{2}{\varphi_1 \varphi_2^2} \Big[& \beta_1 \alpha_{01} - \beta \alpha_{02} \\ & x\, [\beta_1 \alpha_{02} + 2 \beta_2 \alpha_{01} - \beta (3 \alpha_{03} + \alpha_{12})] \\ & x^2 [3 \beta_2 \alpha_{02} + 3 \beta_3 \alpha_{01} - 3 \beta (2 \alpha_{04} + \alpha_{13})] \\ & x^3 [\beta_2 (3 \alpha_{03} + \alpha_{12}) + 5 \beta_3 \alpha_{02} + 4 \beta_4 \alpha_{01} - 2 \beta (3 \alpha_{14} + \alpha_{23}) \\ & \qquad - \beta_1 (2 \alpha_{04} + \alpha_{13})] \\ & x^4 [\beta_2 (2 \alpha_{04} + \alpha_{13}) + 3 \beta_3 (3 \alpha_{03} + \alpha_{12}) + 7 \beta_4 \alpha_{02} - 5 \beta \alpha_{24} \\ & \qquad - \beta_1 (3 \alpha_{14} + \alpha_{23})] \\ & x^5 [3 \beta_3 (2 \alpha_{04} + \alpha_{13}) + 3 \beta_4 (3 \alpha_{03} + \alpha_{12}) - 3 \beta \alpha_{34} - 3 \beta_1 \alpha_{24}] \\ & x^6 [\beta_3 (3 \alpha_{14} + \alpha_{23}) + 5 \beta_4 (2 \alpha_{04} + \alpha_{13}) - 2 \beta_1 \alpha_{34} - \beta_2 \alpha_{24}] \\ & x^7 [\beta_3 \alpha_{24} + 2 \beta_4 (3 \alpha_{14} + \alpha_{23}) - \beta_2 \alpha_{34}] \\ & x^8 (3 \beta_4 \alpha_{24}) + x^9 (\beta_4 \alpha_{34}) \Big].\end{aligned}$$

Aus dieser allgemeinsten Form lassen sich leicht Sonderformen entwickeln, von denen einige wichtige Fälle angeschrieben werden sollen.

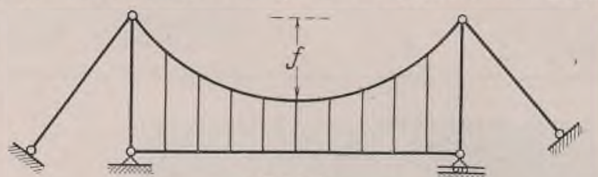


Bild 2.

Der einfache symmetrische Versteifungsbalken der in Bild 2 dargestellten Brücke hat ungefähr im Viertelpunkt ein größtes Trägheitsmoment. Dieses und das in der Balkenmitte sind für die Rechnung besonders wichtig, weniger einflußreich das Trägheitsmoment am Balkenende. Soll am Viertelpunkt ein Größtwert von J_x, also ein Kleinstwert von $\psi(x)$ liegen, und sind die Trägheitsmomente $J_{1/4}$ und $J_{1/2}$ gegeben, dann liegen für $\psi(x)$ drei Gleichungen vor. Zu ihrer Erfüllung sind die drei Festwerte in $\psi(x)$ notwendig. Mit Rücksicht auf die Symmetrie kann man ansetzen:

$$\varphi_1 = \alpha + \alpha_1 (x - x^2) + (x - x^2)^2$$
$$\varphi_2 = \beta + x - x^2.$$

Mit dem Ansatz $\varphi_1 = \alpha + x - x^2$ und $\varphi_2 = \beta + x - x^2$ kann man zwar einen Extremwert von ψ im Viertelpunkt erreichen, aber nicht außerdem einen bestimmten Wert von $\psi(1/4)$ und $\psi(1/2)$ (Bild 6).

Im folgenden sollen kurz einige Formen von $\psi(x)$ für verschiedene $\varphi(x)$ gezeichnet werden. Die näheren Untersuchungen müssen in der vollständigen Arbeit nachgelesen werden.

a) $\qquad \varphi_1 = \alpha + x - x^2 \qquad \varphi_2 = \beta + x - x^2$

$$\psi(x) = \frac{2(\alpha - \beta)[1 + \beta - 3(x - x^2)]}{\varphi_1 \varphi_2^2}.$$

Damit die Unendlichkeitsstellen von ψ außerhalb des Intervalls 0—1 liegen oder nicht reell sind, müssen entweder α und β beliebige positive Werte annehmen oder bei negativen Vorzeichen $|\alpha|$ und $|\beta| > 1/4$ sein.

Aus der Bedingung eines Extremwertes an der Stelle $x - x^2 = \mu$ folgt die Beziehung zwischen α und β:

$$5 \alpha \beta + 2 \alpha + \beta^2 + \beta + 3(1 - \alpha + \beta) \mu - 6 \mu^2 = 0$$

$$\alpha = -\frac{\beta^2 + \beta(1 + 3\mu) + 3\mu(1 - 2\mu)}{5\beta + 2 - 3\mu}, \quad \psi \cdot \frac{1}{2} = \frac{2(\alpha - \beta)}{\left(\alpha + \frac{1}{4}\right)\left(\beta + \frac{1}{4}\right)}.$$

Ist β positiv, ist α negativ.

Stimmt zu diesen gegebenen Werten $\psi(1/2)$ der dann bestimmte Kleinstwert $\psi(\mu)$ zufällig ungefähr mit dem gegebenen $\psi(\mu)$ überein, dann ist der obige Ansatz φ_1 und φ_2 für die Rechnung zu gebrauchen.

Folgende Formen von ψ sind mit dem obigen Ansatz gegeben:

α und β haben entgegengesetztes Vorzeichen (Bild 3a),
α und β positiv (Bild 3b),
α und β negativ (Bild 3c).

b) $\qquad \varphi_1 = \alpha + x^2 \qquad \varphi_2 = \beta + x^2$

$$\psi(x) = \frac{2(\beta - \alpha)(\beta - 3x^2)}{\varphi_1 \varphi_2^2}$$

$$\psi'(x) = \frac{4(\alpha - \beta)x}{\varphi_1^2 \varphi_2^3} [3(\alpha + x^2)(\beta + x^2) + (\beta - 3x^2)(\beta + 2\alpha + 3x^2).$$

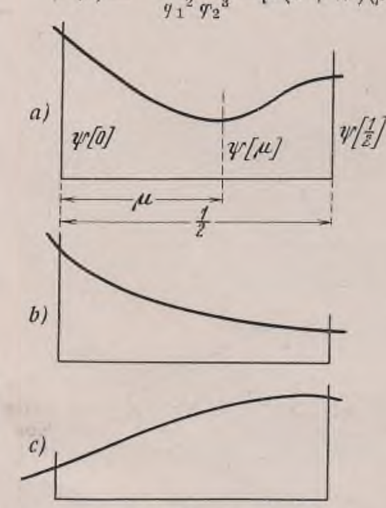


Bild 3a bis c.

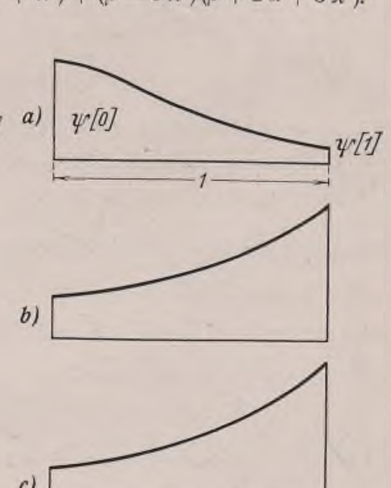


Bild 4a bis c.

Hier gibt es drei Formen von

α und β positiv (Bild 4a)

$$\beta > 3 \qquad \beta > \alpha;$$

α und β negativ (Bild 4b)

$$|\alpha| > 1 \qquad |\beta| > 1 \qquad |\alpha| > |\beta|;$$

α positiv, β negativ (Bild 4c)

$$|\beta| > 1.$$

Einen Extremwert hat Bild 4a bis c in den drei Formen bei $x = 0$, aber keinen im Intervall 0—1.

c) Als symmetrischer Ansatz mit drei Festwerten kommt in Frage:

$$\varphi_1 = \alpha + \alpha_1 (x - x^2) + (x - x^2)^2 \qquad \varphi_2 = \beta + x - x^2$$

$$\psi(x) = \frac{2}{\varphi_1 \varphi_2^2} \Big[(\alpha - \beta\,\alpha_1)(1 + \beta) + \beta^2 - 3(\alpha - \beta\,\alpha_1 + 2\,\beta^2)(x - x^2) - 3\,\beta\,(x - x^2)^2 - (x - x^2)^3 \Big].$$

In Bild 5 sind $\psi(o)$ und $\psi(1/2)$ gegebene Größen, aus denen α und α_1 berechnet werden. Für β als Parameter gibt es eine Kurvenschar der $\psi(x)$ von mannigfaltigen Formen. Einige sind in Bild 5 dargestellt. Mit diesem Ansatz kann man nun auch den ψ-Verlauf des einfachen Versteifungsbalkens mit größerer Genauigkeit als in Fall a) wiedergeben. Jetzt kann man den Wert von ψ bei $x = 1/4$ und $x = 1/2$ festlegen und zugleich die Bedingungen erfüllen, daß $\psi(1/4)$ ein Extremwert ist.

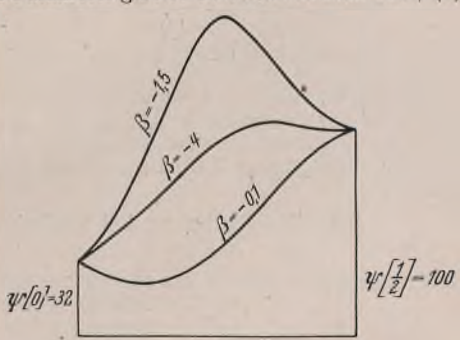


Bild 5.

Mit den Ansätzen a) bis c) wird man bei vielen Aufgaben der Praxis auskommen. Handelt es sich nicht um Hängebrückenrechnungen, sondern z. B. um die Knickung von Stäben mit veränderlichem Querschnitt, dann muß man die Festwerte in ψ so wählen, daß ψ durchweg negativ ist. Also die Differentialgleichung lautet:

$$y'' + |\psi|\,y = 0.$$

§ 3. Berechnung der Integrale.

Für die Ansätze:

$$\varphi_1 = \sum_1^4 \alpha_i\,x^i \qquad \varphi_2 = \sum_1^4 \beta_i\,x^i$$

wird

$$\varphi_3 = \int \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)^2 dx = \int \left(\frac{\beta_2}{\alpha_2} + \frac{f_3(x)}{\varphi_1(x)}\right)^2 dx$$

mit den Integralen

$$\left(\frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)^2 x \qquad \frac{2\,\beta_2}{\alpha_2} \int \frac{f_3(x)}{\varphi_1(x)} \cdot dx \quad \text{und} \quad \int \left(\frac{f_3(x)}{\varphi_1(x)}\right)^2 dx.$$

Bei der Partialbruchzerlegung sind die bekannten drei Fälle zu unterscheiden:

a) die Wurzeln in φ_1 alle reell,
b) die Wurzeln nur komplex,
c) die Wurzeln reell und komplex.

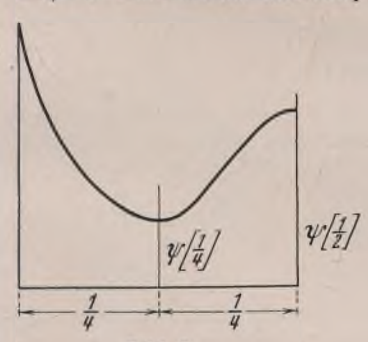


Bild 6.

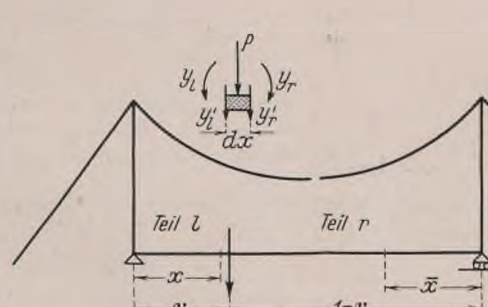


Bild 7.

Die Integrale haben die Form von rationalen Funktionen, natürlichen Logarithmen und arc tg $\varepsilon(x)$ oder $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\varepsilon(x)$.

Für den Fall a) mit $\varphi_1 = \alpha + x - x^2$, $\varphi_2 = \beta + x - x^2$ ist

$$\varphi_3 = x + B_1 \cdot \frac{1 - 2x}{\varphi_1} + B_2 \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{1 - 2x}{2\sqrt{m}} \qquad m = -\left(\alpha + \frac{1}{4}\right);$$

wenn m positiv ist,

$$B_1 = \frac{(\alpha - \beta)^2}{4\,m} \qquad B_2 = -\frac{(\alpha - \beta)^2 + 4\,m\,(\alpha - \beta)}{2\,m\sqrt{m}}.$$

Für die weiteren Fälle sei auf die ausführliche Arbeit verwiesen. Der allgemeinste Fall von φ_3 enthält eine rationale Funktion $G(x)$ und Teile von der Form $c_i \cdot \ln(x - x_i)$ und einen Teil $B \cdot \operatorname{arc\,tg} \varepsilon(x)$ mit den Konstanten c_i und B.

Die Integrale

$$D_1(x) = -\int \varphi_p\,\varphi_1\,\varphi_3\,dx \quad \text{und} \quad D_2(x) = \int \varphi_p\,\varphi_1\,dx$$

sind durch elementare Funktionen lösbar.

$D_2(x)$ ist eine ganze rationale Funktion von x,

$D_1(x)$ hat im allgemeinsten Fall die Form:

$$D_1(x) = J_1(x) + \sum_i J_2(x) \ln(x - x_i) + J_3(x) \operatorname{arc\,tg} \varepsilon(x)$$

oder

$$J_3(x)\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\varepsilon(x).$$

Der Rechnungsgang ist nun der folgende:

1. Aus dem gegebenen $\dfrac{H_{g+p}\,l^2}{EJ_x}$, in dem ein Mittelwert des Seilzuges H_{g+p} steckt, der nach der einfachen Theorie gerechnet wird, wird ein zugehöriges ψ ermittelt mit einer Mindestzahl von Festwerten α und β. Ist das gegebene System z. B. symmetrisch und genügen zwei Festwerte α und β, dann genügt der Ansatz

$$\varphi_1 = \alpha + x - x^2 \qquad \varphi_2 = \beta + x - x^2$$

$$\psi = \frac{2(\alpha - \beta)\,[1 + \beta - 3(x - x^2)]}{\varphi_1\,\varphi_2^2}.$$

Sind drei Festwerte nötig, dann kann man den Ansatz

$$\varphi_1 = \alpha + \alpha_1 (x - x^2) + (x - x^2)^2 \qquad \varphi_2 = \beta + x - x^2$$

benutzen. Ist das Gebilde unsymmetrisch, dann ist der oben schon erwähnte Ansatz $\varphi_1 = \alpha + x^2$, $\varphi_2 = \beta + x^2$ brauchbar oder der mit drei Festwerten $\varphi_1 = \alpha + \alpha_1 x + x^2$, $\varphi_2 = b + x$. Die Festwerte sind für die dimensionslose Koordinate $\dfrac{x}{l} = x$ Zahlen.

2. Nachdem der Ansatz $y = \dfrac{\varphi_1}{\varphi_2}$ festgelegt ist, werden die

$$\varphi_p = \frac{l^2\,p(x) + H_p\,z''}{\varphi_2}$$

für die Integration passend gewählt.

3. Nun können die Integrale

$$\varphi_3 = \int \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)^2 dx \qquad D_1(x) = -\int \varphi_p\,\varphi_1\,\varphi_3\,dx \qquad D_2(x) = \int \varphi_p\,\varphi_1\,dx$$

gelöst und zahlenmäßig als Funktionen von x tabellarisch berechnet werden. Danach ist die Hauptarbeit geleistet. Nun geht man an die Bestimmung der Integrationskonstanten K_1 und K_2 aus den Randbedingungen des gegebenen Systems.

§ 4. Die Randbedingungen.

Wir wollen hier auch nur den einfachsten Fall besprechen, den einfachen Versteifungsbalken mit einer Einzellast P. Für den Teil l und r hat die Differentialgleichung die Lösungen (Bild 7 bis 9)

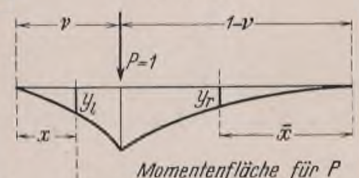
$$y_l = R(x) + K_{1l}\,y_1(x) + K_{2l}\,y_2(x)$$

$$y_r = R(\bar{x}) + K_{1r}\,y_1(\bar{x}) + K_{2r}\,y_2(\bar{x}).$$

Die Bedingungsgleichungen für die Festwerte K sind:

1. $x = 0 \quad y_l = 0$ 2. $\bar{x} = 0 \quad y_r = 0$
3. $x = \nu$ und $\bar{x} = 1 - \nu \quad y_l(\nu) = y_r(1 - \nu)$
4. $x = \nu$ und $\bar{x} = 1 - \nu \quad y_l'(\nu) + y_r'(1 - \nu) = -P\,l.$

Bild 8.



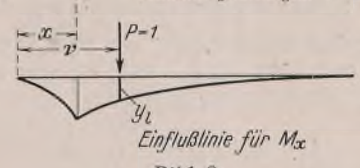


Bild 9.

Die Funktion $f(x)$ besteht nur aus $H_p\,z''$, da $p(x)$ links und rechts von P null ist. Nach Gl. (5) ist $\varphi_p = -48 f \gamma H_p$; dieser, für eine gegebene Belastung P an der Stelle $x = \nu$ ein von x unabhängiger Wert, tritt in $D_1(x)$ und $D_2(x)$ aus den Integralen heraus, so daß:

$$y_l = \varphi_p\,[R(x) + K_{1l}\,y_1(x) + K_{2l}\,y_2(x)]$$

$$y_l' = \varphi_p\,[R'(x) + K_{1l}\,\varphi_1(x)' + K_{2l}\,y_2(x)']$$

und entsprechend y_r und y_r' geschrieben werden können. Aus den Bedingungen 1 und 2 folgt:

$$K_{2l} = -\frac{R(o) + y_1(o)\,K_{1l}}{y_2(0)} \qquad K_{2r} = -\frac{R(o) + y_1(o)\,K_{2r}}{y_2(0)}.$$

Aus der 3. und 4. Bedingung entstehen zwei Gleichungen für K_{1l} und K_{1r} mit Berücksichtigung der Beziehungen an symmetrischen Systemen:

$$\varphi_1 = \alpha + x - x^2 \qquad \varphi_2 = \beta + x - x^2$$
$$y_1(\nu) = y_1(1-\nu) \qquad y_2(\nu) + y_2(1-\nu) = y_1(\nu)$$
$$y_1'(\nu) = -y_1'(1-\nu) \qquad y_2'(\nu) - y_2'(1-\nu) = y_1'(\nu)$$
$$y_1(\nu)\,y_2'(\nu) - y_1'(\nu)\,y_2(\nu) = 1 = y_2(\nu)\,y_2'(1-\nu) + y_2'(\nu)\,y_2(1-\nu)$$
$$R(1-\nu) - R(\nu) = \frac{6\alpha+1}{12}\,[y_1(\nu) - 2\,y_2(\nu)]$$
$$R'(1-\nu) - R'(\nu) = -\frac{6\alpha+1}{12}\,[y_1'(\nu) - 2\,y_2'(\nu)].$$

Die vier Festwerte sind mit der Abkürzung

$$r(o) = \frac{6\alpha+1}{12}\cdot y_2(o) - R(o)$$

$$K_{1l} = \frac{r(o)}{y_1(o)} - \frac{Pl}{\varphi_p}\cdot\frac{y_2(o)}{y_1(o)}\cdot\frac{y_1(\nu)\,[y_2(o)-y_1(o)] + y_2(\nu)\,y_1(o)}{y_1(o) - 2\,y_2(o)}$$
$$K_{2l} = -\frac{6\alpha+1}{12} + \frac{Pl}{\varphi_p}\cdot\frac{y_1(\nu)\,[y_2(o)-y_1(o)] + y_2(\nu)\,y_1(o)}{y_1(o) - 2\,y_2(o)}$$
$$K_{1r} = \frac{r(o)}{y_1(o)} - \frac{Pl}{\varphi_p}\cdot\frac{y_2(o)}{y_1(o)}\cdot\frac{y_1(\nu)\,y_2(o) - y_1(o)\,y_2(\nu)}{y_1(o) - 2\,y_2(o)}$$
$$K_{2r} = -\frac{6\alpha+1}{12} + \frac{Pl}{\varphi_p}\cdot\frac{y_1(\nu)\,y_2(o) - y_1(o)\,y_2(\nu)}{y_1(o) - 2\,y_2(o)}.$$

Ferner wird geschrieben:

$$R(x) + \frac{r(o)}{y_1(o)}\cdot y_1(x) - \frac{6\alpha+1}{12}\cdot y_2(x) = S(x)$$
$$\frac{y_1(\nu)\,[y_2(o)-y_1(o)] + y_2(\nu)\,y_1(o)}{y_1(o)\,[y_1(o) - 2\,y_2(o)]} = Y_l(\nu)$$
$$\frac{y_1(\nu)\,y_2(o) - y_1(o)\,y_2(\nu)}{y_1(o)\,[y_1(o) - 2\,y_2(o)]} = Y_r(\nu).$$

Dann sind die Zweige der Momentenfläche links und rechts von P

$$y_l = \varphi_p\,S(x) - Pl\,Y_l(\nu)\,[y_1(x)\,y_2(o) - y_2(x)\,y_1(o)]$$
$$y_r = \varphi_p\,S(\bar{x}) - Pl\,Y_r(\nu)\,[y_1(\bar{x})\,y_2(o) - y_2(\bar{x})\,y_1(o)].$$

Diese Formeln kann man zur Darstellung der Einflußlinie des Biegungsmoments an der Stelle x benutzen, wenn man x als festen Wert und ν als Veränderliche betrachtet. Die obige Formel für y_l liefert die Ordinaten für den rechten Zweig der Einflußlinie und die Formel y_r für den linken Zweig.

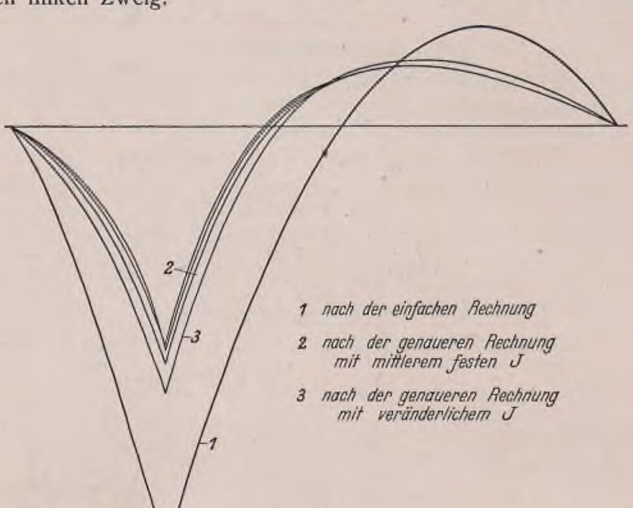


Bild 10.

Nach der einfachen Theorie gerechnet, ist $H_p = \frac{3}{4}\cdot\frac{Pl}{f}\cdot\varkappa\,\nu\,(1-\nu)$ mit dem Faktor $\varkappa$, der von den Abmessungen des Balkens und Seiles abhängt. Mit $\varphi_p = -48\,\bar{f}\,\gamma\,H_p$ sind dann die linken und rechten Zweige der Einflußlinie für M_x

$$(10)\quad \begin{cases} y_r = Pl\Big[-36\cdot\frac{\bar{f}}{f}\cdot\gamma\,\varkappa\,\nu\,(1-\nu)\,S(\bar{x}) \\ \qquad\qquad - Y_l(\nu)\,[y_1(x)\,y_2(o) - y_2(x)\,y_1(o)]\Big] \\ y_l = Pl\Big[-36\cdot\frac{\bar{f}}{f}\cdot\gamma\,\varkappa\,\nu\,(1-\nu)\,S(1-x) \\ \qquad\qquad - Y_r(\nu)\,[y_1(1-x)\,y_2(o) - y_2(1-x)\,y_2(o)]\Big]\cdot \end{cases}$$

Diese Formeln entsprechen den gleichartig aufgebauten bei festem J, statt der dort stehenden hyperbolischen Funktionen stehen hier $S(x)$, $Y(\nu)$ und $y(x)$.

In Bild 10 ist die Einflußlinie für das Biegungsmoment bei $x = 1/4$ aufgetragen, einmal für ein festes J mit den zwei Annahmen für $H = H_g$ und $H = H_{g+p}$ im Glied Hy der Differentialgleichung, und ferner die Einflußlinie bei veränderlichem J mit einem Maximum bei $x = 1/4$.

Natürlich lassen sich auch die Integrationskonstanten für eine Streckenlast angeben oder für einen durchlaufenden Versteifungsbalken über drei Öffnungen. Diese Rechnung enthält das Forschungsheft.

§ 5. Die Berechnung der Durchbiegungen.

Nach Gl. (1) ist

$$(EJ_x\,\eta'') = y$$

und

$$\psi(x)\,y = y'' - f(x).$$

Mit $\frac{x}{l}$ als Unabhängige x wird

$$\eta'' = \frac{1}{H_{g+p}}\left(\frac{H_{g+p}\,l^2}{EJ_x}\right)y = \frac{1}{H_{g+p}}\cdot\psi(x)\,y = \frac{1}{H_{g+p}}\,[y'' - f(x)];$$

mit

$$\int f(x)\,dx = \chi(x) \quad\text{und}\quad \int \chi(x)\,dx = \vartheta(x),$$

die elementar lösbare Integrale sind, ist:

$$(11)\qquad \eta = \frac{1}{H_{g+p}}\cdot y - \vartheta(x) + C_1(x) + C_2.$$

Hierin werden die Festwerte C_1 und C_2 aus den Randbedingungen für η bestimmt. Setzt man y in die Gleichung für η ein, so ist

$$(12)\quad \eta = \frac{1}{H_{g+p}}\,[R(x) - \vartheta(x)] + \frac{K_1}{H_{g+p}}\cdot y_1 + \frac{K_2}{H_{g+p}}\cdot y_2 + C_1\,x + C_2.$$

Nun ist die Differentialgleichung 4. Ordnung mit veränderlichen Beiwerten gegebener Form durch elementare Funktionen gelöst. Die Hauptrechenarbeit steckt, wie oben schon angedeutet wurde, in der Ermittlung der $R(x)$ für Festwerte α und β, die aus der gegebenen Form der Funktion ψ gewonnen werden müssen. Der Seilzug wird aus den bekannten Bedingungen gefunden. Diese Rechnung sei hier auch übergangen.

§ 6. Die Rechnung bei nachgiebigen Hängeseilen.

In Wirklichkeit sind die senkrechten Verschiebungen η_k und η_b des Kabels und des Balkens um die Längenänderungen der Hängeseile verschieden, die für den Ansatz der Differentialgleichung als Hängewand angenommen werden, deren Dicke verschieden sein kann. An der Stelle x hat der Hängestreifen den Querschnitt $\delta_x\,dx$ und die Belastung (Bild 11)

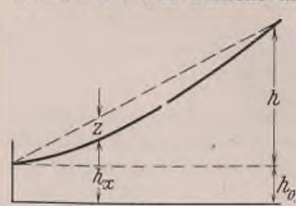


Bild 11.

$$\Delta Z = \frac{H\,d^2(z+\eta_k)}{dx}.$$

Läßt man das Eigengewicht am statisch bestimmten System wirken, ist $H = H_p$ infolge der Verkehrslast. Die Längenänderung ist

$$\Delta h_x = \frac{H_p\,h_x}{E_a\,\delta_x}\cdot\frac{d^2(z+\eta_k)}{dx^2} = H_p\,h_x\,\varkappa_x\,(z'' + \eta_k'') = \eta_b - \eta_k.$$

Die Differentialgleichung lautet:

$$EJ_b\,\eta_b'' = M_{x\Delta} + H_{g+p}\,(z + \eta_k).$$

Aus diesen beiden Gleichungen entsteht eine Differentialgleichung 6. Ordnung für η_k. Die Rechnung wird aber wesentlich einfacher, wenn

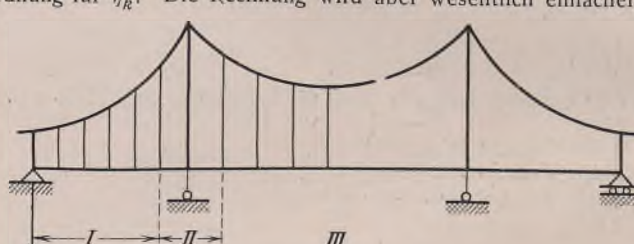


Bild 12.

man die durchaus zulässige Annahme macht, daß in der Formel für Δh_x das η_k durch η_b ersetzt werden darf. Wirkt g am unversteiften Gebilde, dann entsteht mit $(EJ_x + H_{g+p}\,H_p\,h_x\,\varkappa_x)\,\eta_b'' = y$,

$$\frac{H_{g+p}\,l^2}{EJ_x + H_{g+p}\,H_p\,h_x\,\varkappa_x} = \psi_z(x)$$
$$f_z(x) = l^2\,p(x) + H_p\,z - H_{g+p}\,H_p\,(h_x\,\varkappa_x\,z'')'',$$

dieselbe Differentialgleichung wie in Formel (1) $y'' - \psi_z(x)\,y = f_z(x)$, in der ψ_z und f_z eine andere Bedeutung haben.

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist die gleiche wie die oben behandelte. Die Rechenarbeit kann etwas größer werden, wenn für die Darstellung der jetzt gegebenen Funktion ψ_z mehr Festwerte α und β notwendig werden als bei dem einfachen ψ.

Zum Schluß noch eine Bemerkung über das System mit drei Öffnungen und einem Versteifungsträger, der nur an den Endwiderlagern gestützt ist (Bild 12). In der einfachen Theorie ist das System einfach statisch unbestimmt. Das Biegungsmoment des Versteifungsbalkens über den Mittelpfeilern ist gleich dem des einfachen, nicht aufgehängten Balkens auf zwei Stützen an den den Mittelpfeilern entsprechenden Stellen. Bei der genauen Rechnung müssen die Längenänderungen der Hängeseile wie oben berücksichtigt werden. Bei der Rechnung muß die Differentialgleichung für die Teile I, II und III angesetzt werden, für den Teil I und III gilt Gl. (13), für den Teil II Gl. (1), in der z eine Gerade ist. Die Integrationsfestwerte werden aus den Momenten, Querkräften und Durchbiegungen an den Übergangsstellen zwischen den Teilen I, II und III ermittelt.

Hängebrücken mit besonderen Stützbedingungen des Versteifungsträgers.

Von K. Klöppel und K. Lie, Darmstadt.

I. Einleitung.

Über mehrere Öffnungen gespannte Hängebrücken, deren durchlaufende Versteifungsträger unter den Pylonen nicht starr gelagert sind, wurden u. W. bisher noch nicht berechnet. Dieses Tragsystem ist von G. E. Beggs, R. E. Davis und H. E. Davis beim Bau der San Francisco-Oakland-Hängebrücke[1]) als ein Vergleichsentwurf am Modell untersucht worden. Dabei beschränken sich allerdings die genannten Verfasser nur auf die experimentelle Bestimmung der Kabelkraft und bemerken über Berechnungsmöglichkeiten dieses Systems nichts. Nachstehend wird hierfür ein Berechnungsverfahren entwickelt. Es ist auf den in der Darmstädter Dissertation*) des zweitgenannten Verfassers dargelegten Grundlagen für die praktische Berechnung von Hängebrücken mit Versteifungsträgern üblicher Stützart aufgebaut. Auch von der Formelzusammenstellung dieser Arbeit wird Gebrauch gemacht und zwecks Umfangseinschränkung auf deren Ableitungen verwiesen.

Grundlegend für die Berechnung nach der Theorie II. Ordnung ist folgender Gedanke: Man ersetze die Hängebrücke durch einen ihrem Versteifungsträger entsprechenden „stellvertretenden" Träger, der durch die gedachte Axialzugkraft H belastet ist, die mit Hilfe der Biegefläche F_η der am Kabel aufgehängten Teile des Versteifungsträgers bestimmt wird. Zur Berechnung des stellvertretenden Trägers mit konstantem und veränderlichem Trägheitsmoment wurden in der Dissertation ein genaues und ein Annäherungsverfahren entwickelt, so daß das folgende Berechnungsverfahren grundsätzlich sowohl für Versteifungsträger mit öffnungsweise konstantem J als auch für Träger mit beliebig veränderlichem J anwendbar ist.

II. Entwicklung des Verfahrens für den Versteifungsträger mit öffnungsweise konstantem J.

A. Allgemeines.

Die grundlegenden Gleichungen*) zur Berechnung der Hängebrücken nach der Theorie II. Ordnung lauten:

(1) $$[EJ\eta'']'' = p + y'' H_p + H\eta''$$

oder

(1a) $$[EJ\eta'']'' = p$$

und

(2) $$H_p \cdot \frac{L}{E_K F_K^\circ} \pm \alpha_t t L_t + \overset{*}{y}'' F_\eta = 0.$$

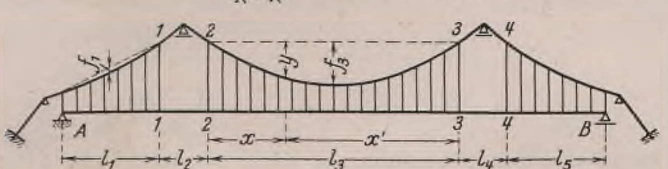
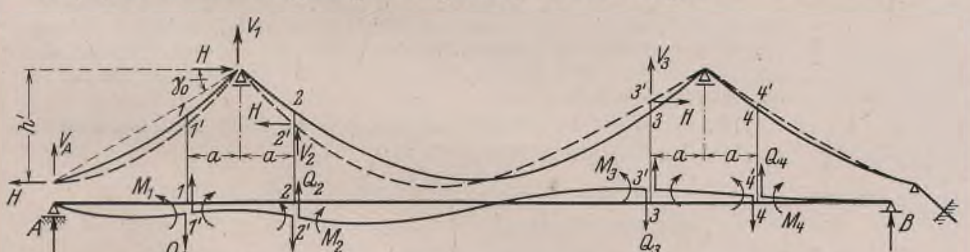


Bild 1.

Gl. (1) oder (1a) dient zur Berechnung der Schnittgrößen im Versteifungsträger und Gl. (2) zur Bestimmung der horizontalen Komponente des Kabelzuges $H_p = H - H_g$ infolge der Verkehrslast und der Temperaturänderung. Die Gültigkeit der Gl. (1) erstreckt sich über alle am Hängegurt aufgehängten Trägerteile, $\overline{A1}$, $\overline{23}$ und $\overline{4B}$ im Bild 1, während Gl. (1a) für die nicht aufgehängten Trägerteile, $\overline{12}$ und $\overline{34}$, gilt.



$l_1 + a = l_1'$ $\quad l_1 + 2a = l_1''$ $\quad l_3 + a = l_3'$ $\quad l_3 + 2a = l_3''$ $\quad l_3 + 4a = l_3'''$

Bild 2.

In Gl. (2) bedeutet $F_\eta = \int \eta \, dx$ streng genommen die Verschiebungsfläche des Hängegurts, die aber unter der üblichen Annahme der starren Hängestangen gleich der Biegefläche der am Hängegurt aufgehängten Trägerteile gesetzt werden kann. Allein von dieser veränderlichen Größe hängt das H_p ab.

Aus Gl. (1) u. (1a) folgt, daß die im Bild 1 skizzierte Hängebrücke statisch durch einen Träger AB ersetzt werden kann, der in den Strecken $\overline{12}$ und $\overline{34}$ durch die Querlast p allein und in den Strecken $\overline{A1}$, $\overline{23}$ und $\overline{4B}$ durch die Querlasten p und $y'' H_p$ sowie durch einen gedachten Axialzug H belastet ist[2]). Der Umstand, daß der Träger streckenweise unterschiedlich belastet ist, erschwert die Lösung der Aufgabe gar nicht. Die Schwierigkeiten der Berechnung liegen vielmehr darin, daß unter der Pylone der Versteifungsträger weder starr gestützt ist, noch die Durchbiegungsfreiheit des Versteifungsträgers einer gewöhnlichen Hängebrücke innerhalb eines Feldes hat.

Bei den gewöhnlichen Hängebrücken sind die Randbedingungen $\eta_{x=0} = 0$ und $\eta_{x=l} = 0$ sowohl beim Versteifungsträger als auch beim Hängegurt erfüllt, und mit diesen gemeinsamen Randbedingungen wird die für den Versteifungsträger und den Hängegurt gemeinsam gültige Differentialgleichung (1) gelöst. Im vorstehenden Fall gilt Gl. (1) nur für die Strecken $\overline{A1}$, $\overline{23}$ und $\overline{4B}$. In den Punkten 1, 2, 3 und 4 fehlt aber die Bedingung $\eta = 0$. Um Gl. (1) zu lösen, muß man also die Randwerte, die Durchbiegungen $\eta_1, \dots \eta_4$, zunächst berechnen.

B. Ermittlung der Durchbiegungen η_1, η_2, η_3 und η_4.

Um die Berechnung zu vereinfachen, möge im folgenden ein symmetrisches System über drei Öffnungen behandelt werden. Wie aus Bild 3 (das Maß a genauer nach Bild 3a) ersichtlich ist, berechnen sich die vertikalen Verschiebungen der Punkte 1, 2, 3 und 4 am Kabel (Bild 2), wo die ersten Hängestangen neben den Pylonen angeschlossen sind, zu

(3) $$\begin{cases} \eta_1 = a\left(\dfrac{V_1}{H} - \dfrac{V_{1g}}{H_g}\right) \\ \eta_2 = a\left(\dfrac{V_2}{H} - \dfrac{V_{2g}}{H_g}\right) \\ \eta_3 = \dots . \\ \eta_4 = \dots . \end{cases}$$

wobei die belanglose Voraussetzung gemacht wird, daß die Punkte während der Verschiebung keine Kurve, sondern eine vertikale Gerade

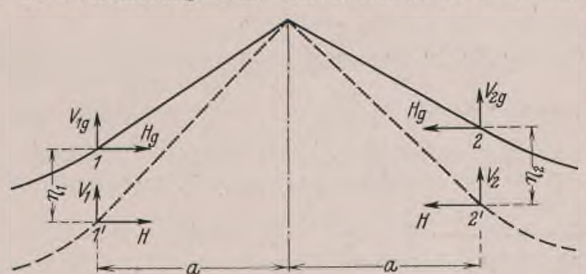


Bild 3.

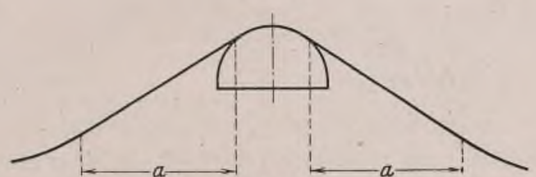


Bild 3a.

beschreiben. Vernachlässigt man in der üblichen Weise die Längenänderung und die Schrägstellung der Hängestangen, so stellen obige Gleichungen unmittelbar die Durchbiegungen des Versteifungsträgers in den Punkten 1, 2, 3 und 4 dar.

Um die Größen $V_1, \dots V_4$ in obigen Gleichungen zu berechnen, denkt man sich den Versteifungsträger in den Punkten 1, ... 4 durchschnitten und dort die Schnittgrößen $M_1, \dots M_4$ und $Q_1, \dots Q_4$[3]) eingeführt (Bild 2).

1. Ermittlung von η_1 und η_4. Aus $\Sigma M = 0$ um Punkt A für die am Kabel und Träger $\overline{A1}$ angreifenden Kräfte und Momente (Bild 2)

$$V_1 l_1' - H h' - Q_1 (g+p) l_1 - M_A^\circ (g+p) + M_1 (g+p) = 0$$

folgt für $M_1(g) = 0$, was praktisch meistens der Fall ist,

$$V_1 = H \cdot \frac{h'}{l'} + Q_1(g+p) \cdot \frac{l_1}{l_1'} + \frac{M_A^\circ (g+p)}{l_1'} - \frac{M_1}{l_1'}$$

und

$$V_{1g} = H_g \cdot \frac{h'}{l_1'} + Q_1(g) \cdot \frac{l_1}{l_1'} + \frac{M_A^\circ(g)}{l_1'},$$

worin $M_A^\circ(g)$ und $M_A^\circ(p)$ die Drehmomente der Lasten g und p um den Punkt A bedeuten.

---

[1]) Tests on structural models of proposed San Francisco-Oakland suspension bridge. Univ. of California Press Berkeley, California 1933.

*) Praktische Berechnung von Hängebrücken nach der Theorie II. Ordnung. Einfeldrige und durchlaufende Versteifungsträger mit konstantem und veränderlichem Trägheitsmoment. 1940. Von der TH. Darmstadt genehmigte Dissertation.

[2]) Danach braucht ein Modell für eine Hängebrücke überhaupt nur aus einem dem Versteifungsträger entsprechenden Stab zu bestehen. Auf diese zum Patent angemeldete Weise werden Messungen im Ingenieurlaboratorium der Technischen Hochschule Darmstadt durchgeführt.

[3]) Die Größen $Q_1, \dots Q_4$ in der im Bild 2 gezeichneten Richtung werden als positiv bezeichnet, weil sie sich nicht auf den Träger AB, sondern auf die durch die Schnitte entstandenen Trägerteile $\overline{A1}$, $\overline{12}$, $\overline{23}$ usw. beziehen sollen.

Die Einführung der folgenden Ausdrücke

$$(4)\quad \begin{cases} H_g = \dfrac{g_1\, l_1^2}{8 f_1} \\ Q_1(g) + \dfrac{M_A^0(g)}{l_1} = C_1^0(g) = \dfrac{g_1\, l_1''}{2} \\ Q_1(p) = C_{1r}^0(p) + \dfrac{M_2 - M_1}{l_2} \\ \dfrac{M_A^0(p)}{l_1} = C_{1l}^0(p) \\ C_{1l}^0(p) + C_{1r}^0(p) = C_{1p}^0 \end{cases}$$

in die obigen Gleichungen liefert

$$\frac{V_1}{H} = \operatorname{tg}\gamma_0 + \frac{1}{H}\cdot\frac{l_1}{l_1'}\left(C_{1g}^0 + C_{1p}^0 + \frac{M_2 - M_1}{l_2} - \frac{M_1}{l_1}\right)$$

$$\frac{V_{1g}}{H_g} = \operatorname{tg}\gamma_0 + \frac{4 f_1}{l_1}\cdot\frac{l_1''}{l_1'}.$$

Setzt man obige Werte in Gl. (3) ein, so ergibt sich unter Beachtung dessen, daß

$$\frac{l_1}{l_1'}\left(\frac{C_{1g}^0}{H} - \frac{C_{1g}^0}{H_g}\right) = -\frac{H_p}{H}\cdot\frac{4 f_1}{l_1}\cdot\frac{l_1''}{l_1'}$$

ist, für die Durchbiegung im Punkt 1

$$(5\text{a})\quad \eta_1 = \frac{a}{H}\cdot\frac{l_1}{l_1'}\left(C_{1p}^0 + \frac{M_2 - M_1}{l_2} - \frac{M_1}{l_1}\right) - \frac{a}{H}\cdot\frac{l_1''}{l_1'}\cdot H_p\cdot\frac{4 f_1}{l_1}.$$

Darin bedeutet C_{1p}^0 den gedachten Auflagerdruck infolge der Querlast p im Punkt 1 des entsprechenden statisch bestimmten Gelenkträgers, der nicht durch Axialzugkraft belastet ist (Bild 4).

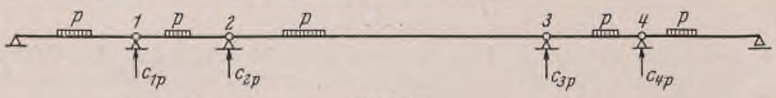


Bild 4.

Wie man sich leicht überzeugen kann, gilt wegen Symmetrie:

$$(5\text{b})\quad \eta_4 = \frac{a}{H}\cdot\frac{l_1}{l_1'}\left(C_{4p}^0 + \frac{M_3 - M_4}{l_2} - \frac{M_4}{l_1}\right) - \frac{a}{H}\cdot\frac{l_1''}{l_1'}\cdot H_p\cdot\frac{4 f_1}{l_1}.$$

2. Ermittlung von η_2 und η_3. Die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma M = 0$ um Punkt 3 für die am Kabel und Träger $\overline{2\,3}$ angreifenden Kräfte und Momente (Bild 2) liefert

$$V_2\, l_3 + H(\eta_2 - \eta_3) + Q_2\, l_3 + M_2 - M_3^0(g+p) - M_3 = 0.$$

Führt man folgende Ausdrücke

$$(6)\quad \begin{cases} Q_2 = -C_{2l}^0(g) - C_{2l}^0(p) - \dfrac{M_1 - M_2}{l_2} \\ \dfrac{M_3^0(g+p)}{l_3} = C_{2r}^0(g) + C_{2r}^0(p) \\ C_{2l}^0(p) + C_{2r}^0(p) = C_{2p}^0 \\ C_{2l}^0(g) + C_{2r}^0(g) = C_{2g}^0 = \dfrac{g_3\, l_3''}{2} = V_{2g} \end{cases}$$

in obige Gleichung und diese wieder in Gl. (3) ein, so erhält man unter Verwendung der Beziehungen

$$H_g = \frac{g_3\, l_3^2}{8 f_3} \quad\text{und}\quad \frac{V_{2g}}{H} - \frac{V_{2g}}{H_g} = -\frac{H_p}{H}\cdot\frac{4 f_3}{l_3^2}\cdot l_3''$$

die Durchbiegung im Punkt 2 zu

$$(7\text{a})\quad \begin{cases} \eta_2 = \dfrac{a}{H}\left(C_{2p}^0 + \dfrac{M_1 - M_2}{l_2} + \dfrac{M_3 - M_2}{l_3}\right) \\ \qquad - \dfrac{a}{H}\cdot H_p\cdot\dfrac{4 f_3}{l_3^2}\cdot l_3'' - \dfrac{a}{l_3}(\eta_2 - \eta_3). \end{cases}$$

Auf ähnliche Weise läßt sich der nachstehende Ausdruck für die Durchbiegung η_3 im Punkt 3 ableiten:

$$(7\text{b})\quad \begin{cases} \eta_3 = \dfrac{a}{H}\left(C_{3p}^0 + \dfrac{M_4 - M_3}{l_2} + \dfrac{M_2 - M_3}{l_3}\right) \\ \qquad - \dfrac{a}{H}\cdot H_p\cdot\dfrac{4 f^3}{l_3^2}\cdot l_3'' - \dfrac{a}{l_3}(\eta_3 - \eta_2). \end{cases}$$

Damit haben wir die vier Durchbiegungswerte ermittelt. Zu beachten ist, daß in Gl. (5a), (5b), (7a) und (7b) die Größen C_{1p}^0, C_{2p}^0, C_{3p}^0 und C_{4p}^0 die gedachten Auflagerdrücke infolge der Last p allein in den Punkten 1, 2, 3 und 4 des statisch bestimmten Gelenkträgers nach Bild 4 bedeuten. Die Größen M_1, M_2, M_3, M_4 sind aber die tatsächlichen Biegungsmomente in den Punkten 1, 2, 3 und 4 des Versteifungsträgers.

C. Berechnung der Momente $M_1, \ldots M_4$.

Aus Gl. (5) u. (7) erkennt man, daß der stellvertretende Versteifungsträger einen Durchlaufträger auf elastisch senkbaren Zwischenstützen darstellt, wobei die Stützensenkungen aber nicht den Auflagerdrücken proportional sind, wie es beim gewöhnlichen Durchlaufträger auf elastischen Stützen der Fall ist. Obwohl der stellvertretende Träger — wie bereits erwähnt — innerhalb der Strecken $\overline{A1}$, $\overline{23}$ und $\overline{4B}$ nicht nur durch die Querlast p allein, sondern auch durch die Last $y''\, H_p$ und den gedachten Axialzug H belastet ist, kann er bei konstantem H doch wie ein gewöhnlicher Balken behandelt werden*).

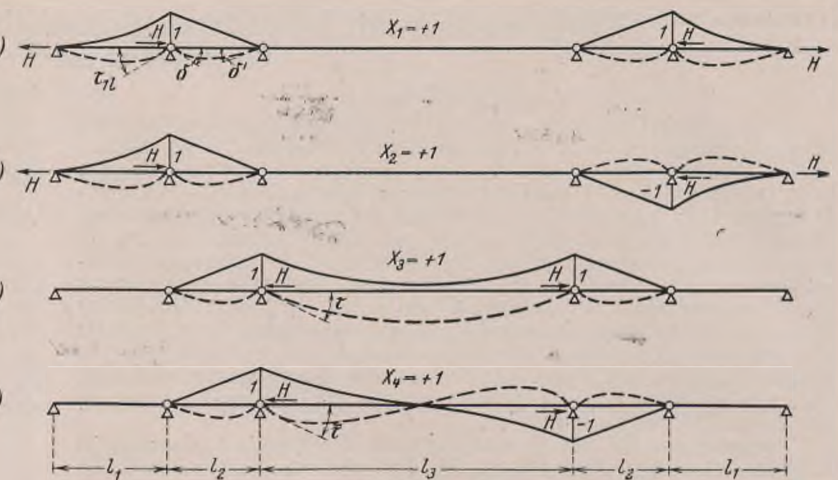


Bild 5a bis d..

Für den Durchlaufträger gilt ganz allgemein

$$(8)\quad \tau_{(r-1)\,r}\, M_{r-1} + \tau_{rr}\, M_r + \tau_{(r+1)\,r}\, M_{r+1} = -(\mathfrak{C}_r + R_r).$$

Darin bedeutet

$$(9)\quad R_r = \frac{\eta_{r-1}}{l_r} - \eta_r\left(\frac{1}{l_r} + \frac{1}{l_{r+1}}\right) + \frac{\eta_{r+1}}{l_{r+1}},$$

und $\mathfrak{C}$ oder τ sind die Tangentendrehwinkel infolge der Belastung oder $M = 1$. Im vorliegenden Fall lautet das Gleichungssystem folgendermaßen:

(10)

	M_1	M_2	M_3	M_4	
1	τ_{11}	τ_{21}			$= -(\mathfrak{C}_1 + R_1)$
2	τ_{12}	τ_{22}	τ_{32}		$= -(\mathfrak{C}_2 + R_2)$
3		τ_{23}	τ_{33}	τ_{43}	$= -(\mathfrak{C}_3 + R_3)$
4			τ_{34}	τ_{44}	$= -(\mathfrak{C}_4 + R_4)$.

Das vorstehende Gleichungssystem läßt sich durch Ausnutzung der Symmetrie des Tragwerks vereinfachen, indem man folgende Substitutionen einführt:

$$(11)\quad \begin{cases} X_1 = \dfrac{M_1 + M_4}{2} & X_3 = \dfrac{M_2 + M_3}{2} \\ X_2 = \dfrac{M_1 - M_4}{2} & X_4 = \dfrac{M_2 - M_3}{2} \end{cases}$$

Damit ergibt sich, wie man aus Bild 5 erkennen kann, das nachstehend einfachere Gleichungssystem:

(12)

	X_1	X_2	X_3	X_4	
1	δ_{11}		δ_{13}		$= -[(\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_4) + (R_1 + R_4)]$
2		δ_{22}		δ_{24}	$= -[(\mathfrak{C}_1 - \mathfrak{C}_4) + (R_1 - R_4)]$
3	δ_{31}		δ_{33}		$= -[(\mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_3) + (R_2 + R_3)]$
4		δ_{42}		δ_{44}	$= -[(\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{C}_3) + (R_2 - R_3)]$.

Es sollen nun die Werte δ, $\mathfrak{C}$ und R im folgenden nacheinander berechnet werden. Von vornherein sei aber bemerkt, daß diese Werte später wegen der bequemeren Zahlenrechnung in H-facher Größe angegeben werden, weil sie alle, wie sich aus der Rechnung ergab, das H im Nenner enthalten.

Die δ_{ik}-Werte im obigen Gleichungssystem kann man unmittelbar aus Bild 5 entnehmen. Man erhält:

$$(13)\quad \begin{cases} \delta_{13} = \delta_{31} = \delta_{24} = \delta_{42} = 2\,\delta' = \delta & \delta_{33} = 2(\tau + \delta) \\ \delta_{11} = \delta_{22} = 2(\tau_{1l} + \delta) & \delta_{44} = 2(\bar{\tau} + \delta). \end{cases}$$

Darin berechnen sich*) bei konstantem J mit $\dfrac{H}{E J_c} = \beta_c^2$:

$$(14)\quad \begin{cases} \delta = \dfrac{1}{3}\cdot l_2\,\beta_2^2 & \tau_{1l} = \dfrac{\beta_1}{\mathfrak{Tg}\, 2\alpha_1} - \dfrac{1}{l_1} \\ \tau = \beta_3\, \mathfrak{Tg}\,\alpha_3 \quad\text{und} & \bar{\tau} = \dfrac{\beta_3}{\mathfrak{Tg}\,\alpha_3} - \dfrac{2}{l_3}. \end{cases}$$

Die $\mathfrak{C}$-Werte in Gl. (12) sind die Belastungsglieder des entsprechenden Gelenkträgers. Wie bereits erwähnt, wirkt auf den Strecken l_1, l_3 und l_5 nicht nur die Querlast p, sondern auch die Last $y''\, H_p$ und der Axialzug H, während auf den Strecken l_2 und l_4 nur p angreift. Dementsprechend sind die $\mathfrak{C}$-Werte infolge der Belastung p auf den Strecken l_2 und l_4 genau so zu ermitteln wie beim gewöhnlichen Balken, nur müssen sie, wie bereits bemerkt, mit H multipliziert werden. Die $\mathfrak{C}$-Werte von den Trägerteilen l_1, l_3 und l_5 setzen sich aus den beiden Teilen $\mathfrak{C}(p)$ und $\mathfrak{C}(y''\, H_p)$ zusammen, und zwar muß man bei deren Ermittlung den Axialzug H berücksichtigen. Es sind*)

$$(15)\quad \begin{cases} \mathfrak{C}_1(y_1''\, H_p) = \mathfrak{C}_4(y_5''\, H_p) = -H_p\cdot\dfrac{l_1}{2\,\varrho_1}\cdot k_1 \\ \mathfrak{C}_2(y_3''\, H_p) = \mathfrak{C}_3(y_3''\, H_p) = -H_p\cdot\dfrac{l_3}{2\,\varrho_3}\cdot k_3. \end{cases}$$

Darin bedeuten

$$\text{(15a)}\quad \begin{cases} \varrho_1 = \dfrac{l_1^2}{8 f_1} = -\dfrac{1}{y_1''} & \varrho_3 = \dfrac{l_3^2}{8 f_3} = -\dfrac{1}{y_3''} \\ k_1 = 1 - \dfrac{\mathfrak{Tg}\,\alpha_1}{\alpha_1} & k_3 = 1 - \dfrac{\mathfrak{Tg}\,\alpha_3}{\alpha_3}. \end{cases}$$

Unter Einführung der Abkürzungen $\mathfrak{C}_1(p) + \mathfrak{C}_4(p) = \mathfrak{C}_I \ldots$ usw. erhält man dann die Belastungsglieder auf der rechten Seite der Gl. (12) zu

$$\text{(16)}\quad \begin{cases} \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_4 = \mathfrak{C}_I - H_p \cdot \dfrac{l_1}{\varrho_1} \cdot k_1 \\ \mathfrak{C}_1 - \mathfrak{C}_4 = \mathfrak{C}_{II} \\ \mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_3 = \mathfrak{C}_{III} - H_p \cdot \dfrac{l_3}{\varrho_3} \cdot k_3 \\ \mathfrak{C}_2 - \mathfrak{C}_3 = \mathfrak{C}_{IV}. \end{cases}$$

Damit sind die Belastungen p und $y'' H_p$ voneinander getrennt und später bei der Ermittlung von $X_1 \ldots X_4$ brauchen nur die Belastungsglieder $\mathfrak{C}_I \ldots \mathfrak{C}_{IV}$ infolge der Belastung p allein ermittelt zu werden.

Die Ausdrücke $(R_1 + R_4) \ldots (R_2 - R_3)$ auf der rechten Seite des Gleichungssystems (12) berechnen sich nach (Gl. (9), indem man die Werte $\eta_1 \ldots \eta_4$ der Gl. (5a), (5b) sowie (7a) u. (7b) einführt. Es ergibt sich

$$\text{(17)}\quad \begin{cases} R_1 + R_4 = -\dfrac{1}{2} \cdot \nu_1'' C_I + \dfrac{1}{2} \cdot C_{III} + \dfrac{X_1}{2} \cdot \dfrac{1}{l_2}(1 + \nu_1' \nu_1'') \\ \qquad\qquad - \dfrac{X_3}{2} \cdot \dfrac{1}{l_2}(1 + \nu_1'') - \dfrac{H_p}{2 \varrho_3}(l_3'' - \lambda \nu_1'' l_1'') \\ R_1 - R_4 = -\dfrac{1}{2} \cdot \nu_1'' C_{II} + \dfrac{1}{2} \cdot \nu_3 C_{IV} + \dfrac{X_2}{2} \cdot \dfrac{1}{l_2}(\nu_1' \nu_1'' + \nu_3) \\ \qquad\qquad - \dfrac{X_4}{2} \cdot \dfrac{1}{l_2}(\nu_1'' + \nu_3'') \\ R_2 + R_3 = \dfrac{1}{2} \cdot \nu_1 C_I - \dfrac{1}{2} \cdot C_{III} - \dfrac{X_1}{2} \cdot \dfrac{1}{l_2}(1 + \nu_1'') \\ \qquad\qquad + \dfrac{X_3}{2} \cdot \dfrac{1}{l_2}(1 + \nu_1) - \dfrac{H_p}{2 \varrho_3}(\lambda \nu_1'' l_1 - l_3'') \\ R_2 - R_3 = \dfrac{1}{2} \cdot \nu_1 C_{II} - \dfrac{1}{2} \cdot \nu_3 C_{IV} - \dfrac{X_2}{2} \cdot \dfrac{1}{l_2}(\nu_1'' + \nu_3'') \\ \qquad\qquad + \dfrac{X_4}{2} \cdot \dfrac{1}{l_2}(\nu_1 + \nu_3' \nu_3''). \end{cases}$$

Darin bedeuten die Abkürzungen

$$\text{(18)}\quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{\varrho_3}{\varrho_1} & & \\ \nu_1 = \dfrac{l_1}{l_1 + a} & \nu_1' = \dfrac{l_1 + 2a}{l_1} & \nu_1'' = \nu_1 \nu_1' \\ \nu_3 = \dfrac{l_3}{l_3 + 2a} & \nu_3' = \dfrac{l_3 + 4a}{l_3} & \nu_3'' = \nu_3 \nu_3'. \end{cases}$$

$$\text{(19)}\quad \begin{cases} C_I = C^0_{1p} + C^0_{4p} & C_{II} = C^0_{1p} - C^0_{4p} \\ C_{III} = C^0_{2p} + C^0_{3p} & C_{IV} = C^0_{2p} - C^0_{3p}. \end{cases}$$

Führt man nun die Werte $(\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2) \ldots$ und $(R_1 + R_2) \ldots$ der Gl. (16) und (17) in das Gleichungssystem (12) ein und bringt jeweils die Glieder $X_1 \ldots X_4$ in $(R_1 + R_2) \ldots$, usw. auf die linke Seite, so geht Gl. (12) über in folgende Form:

$$\text{(20)}\quad \begin{array}{c||c|c|c|c|l} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & \\ \hline\hline 1 & \delta'_{11} & & \delta'_{13} & & = -\left[\mathfrak{C}_I - \dfrac{\nu_1''}{2} \cdot C_I + \dfrac{1}{2} \cdot C_{III}\right] + k_1' H_p \\ 2 & & \delta'_{22} & & \delta'_{24} & = -\left[\mathfrak{C}_{II} - \dfrac{\nu_1''}{2} \cdot C_{II} + \dfrac{\nu_3}{2} \cdot C_{IV}\right] \\ 3 & \delta'_{31} & & \delta'_{33} & & = -\left[\mathfrak{C}_{III} + \dfrac{\nu_1}{2} \cdot C_I - \dfrac{1}{2} \cdot C_{III}\right] + k_3' H_p \\ 4 & & \delta'_{42} & & \delta'_{44} & = -\left[\mathfrak{C}_{IV} + \dfrac{\nu_1}{2} \cdot C_{II} - \dfrac{\nu_3}{2} \cdot C_{IV}\right]. \end{array}$$

Darin sind

$$\text{(21)}\quad \begin{cases} k_1' = \dfrac{l_1}{2 \varrho_3}\left(2 \lambda k_1 - \lambda \nu_1' \nu_1'' + \dfrac{l_3''}{l_1}\right) \\ k_3' = \dfrac{l_3}{2 \varrho_3}\left(2 k_3 + \lambda \nu_1 \cdot \dfrac{l_1}{l_3} - \dfrac{1}{\nu_3}\right). \end{cases}$$

$$\text{(22)}\quad \begin{cases} \delta'_{11} = \delta_{11} + \dfrac{1}{2 l_2}(1 + \nu_1' \nu_1'') \\ \delta'_{13} = \delta'_{31} = \delta - \dfrac{1}{2 l_2}(1 + \nu_1'') \\ \delta'_{22} = \delta_{22} + \dfrac{1}{2 l_2}(\nu_1' \nu_1'' + \nu_3) \\ \delta'_{24} = \delta'_{42} = \delta - \dfrac{1}{2 l_2}(\nu_1'' + \nu_3'') \\ \delta'_{33} = \delta_{33} + \dfrac{1}{2 l_2}(1 + \nu_1) \\ \delta'_{44} = \delta_{44} + \dfrac{1}{2 l_2}(\nu_1 + \nu_3' \nu_3''). \end{cases}$$

In obigen Gleichungen berechnen sich die δ_{ik}-Werte nach Gl. (13). Löst man Gl. (20) auf, so ergibt sich schließlich[4])

$$\text{(23)}\quad \begin{cases} X_1 = X_{1p} + X_1(y'' H_p) \\ \quad = -\dfrac{\mathfrak{C}_I - m_3 \mathfrak{C}_{III} - \dfrac{C_I}{2}(\nu_1'' + \nu_1 m_3) + \dfrac{C_{III}}{2}(1 + m_3)}{\varphi_1} \\ \quad + \dfrac{K_1}{\varphi_1} \cdot H_p \\ X_3 = X_{3p} + X_3(y'' H_p) \\ \quad = -\dfrac{\mathfrak{C}_{III} - m_1 \mathfrak{C}_I + \dfrac{C_I}{2}(\nu_1 + \nu_1'' m_1) - \dfrac{C_{III}}{2}(1 + m_1)}{\varphi_3} \\ \quad + \dfrac{K_3}{\varphi_3} \cdot H_p \\ X_2 = -\dfrac{\mathfrak{C}_{II} - m_4 \mathfrak{C}_{IV} - \dfrac{C_{II}}{2}(\nu_1'' + \nu_1 m_4) + \dfrac{C_{IV}}{2}(1 + m_4) \nu_3}{\varphi_2} \\ X_4 = -\dfrac{\mathfrak{C}_{IV} - m_2 \mathfrak{C}_{II} + \dfrac{C_{II}}{2}(\nu_1 + \nu_1'' m_2) - \dfrac{C_{IV}}{2}(1 + m_2) \nu_3}{\varphi_4} \end{cases}$$

Darin bedeuten die Abkürzungen

$$\text{(23a)}\quad \begin{cases} \varphi_1 = \delta'_{11} - m_3 \delta'_{13} & m_3 = \dfrac{\delta'_{13}}{\delta'_{33}} \\ \varphi_3 = \delta'_{33} - m_1 \delta'_{13} & m_1 = \dfrac{\delta'_{13}}{\delta'_{11}} \\ \varphi_2 = \delta'_{22} - m_4 \delta'_{24} & m_4 = \dfrac{\delta'_{24}}{\delta'_{44}} \\ \varphi_4 = \delta'_{44} - m_2 \delta'_{24} & m_2 = \dfrac{\delta'_{24}}{\delta'_{22}} \end{cases}$$

und

$$\text{(23b)}\quad K_1 = k_1' - m_3 k_3' \qquad K_3 = k_3' - m_1 k_1'.$$

Damit ist das Gleichungssystem (12) gelöst. Aus den Werten $X_1 \ldots X_4$ erhält man dann nach Gl. (11) die Biegungsmomente in den Punkten 1, 2, 3 und 4 des Versteifungsträgers zu

$$\text{(24)}\quad \begin{cases} M_1 = (X_{1p} + X_2) + X_1(y'' H_p) = M_1(p) + M_1(y'' H_p) \\ M_4 = (X_{1p} - X_2) + X_1(y'' H_p) = M_4(p) + M_4(y'' H_p) \\ M_2 = (X_{3p} + X_4) + X_3(y'' H_p) = M_2(p) + M_2(y'' H_p) \\ M_3 = (X_{3p} - X_4) + X_3(y'' H_p) = M_3(p) + M_3(y'' H_p). \end{cases}$$

Nachdem $M_1 \ldots M_4$ bekannt sind, lassen sich die Schnittgrößen an beliebiger Stelle im Versteifungsträger ohne weiteres ermitteln. Die Trägerteile l_2 und l_4 sind genau wie ein gewöhnlicher einfacher Träger zu behandeln, der durch die Momente M_1 und M_2 oder M_3 und M_4 an den beiden Enden und mitunter noch durch die Querlast p innerhalb des Trägers belastet ist. Die Schnittgrößen in Trägerteilen l_1, l_5 und l_3 setzen sich dagegen stets aus zwei oder drei Teilen zusammen; der erste Teil infolge des Endmomentes M_1 oder M_4 oder der Endmomente M_2 und M_3, der zweite Teil infolge der Vollast $y'' H_p$ und eventuell der dritte Teil infolge der Last p, sofern diese auf dem betreffenden Trägerteil vorhanden ist. Hierbei muß man den Axialzug H berücksichtigen, z. B. Bild 6. Die Träger mit solchen Belastungen sind in der Dissertation*) ausführlich behandelt worden.

Der vorstehend beschriebene Rechnungsgang gilt für die Schnittgrößen, Biegungsmoment und Querkraft, aber nicht für die Durchbiegung und den Biegewinkel gegen die Waagerechte. Bei der Ermittlung der beiden letzten Größen muß man noch den Anteil infolge der Senkungen $\eta_1 \ldots \eta_4$ in den Punkten 1, 2, 3 und 4 berücksichtigen, z. B. für die Durchbiegung oder den Biegewinkel an der Stelle x in der Mittelöffnung kommt noch das folgende Glied hinzu

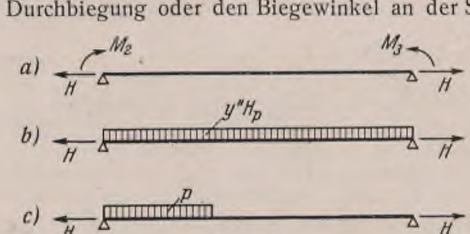


Bild 6a bis c.

$$\eta_x = \frac{x}{l_3} \cdot \eta_3 + \frac{x'}{l_3} \cdot \eta_2$$

oder

$$\tau_x = \frac{\eta_3 - \eta_2}{l_3}.$$

Entsprechendes gilt für die Außenöffnungen.

D. Entwicklung der Bestimmungsgleichung für H_p.

Wir haben die Hängebrücke statisch durch ihren Versteifungsträger mit den Querlasten p und $y'' H_p$ sowie mit dem Axialzug H ersetzt. In den vorangehenden Abschnitten wurde gezeigt, wie man einen solchen Träger mit elastischen Stützensenkungen berechnet. Dabei haben wir stillschweigend vorausgesetzt, daß die Kraft H_p (damit auch $H = H_g + H_p$) schon bekannt ist. Im folgenden möge der zweite Teil der Aufgabe, die Ermittlung von H_p, gelöst werden.

Wir multiplizieren Gl. (2) zunächst mit ϱ, um y'' von F_η zu trennen und dann mit $H (H = E J_c \beta_c^2)$ um die Werte $H F_\eta$ unmittelbar benutzen

[4]) Die Belastungsglieder $\mathfrak{C}$ für verschiedene Lastfälle enthält die Formelzusammenstellung in der unter *) aufgeführten Dissertation.

zu können, weil ja das F_η stets die Größe H im Nenner enthält. Damit geht Gl. (2) über in

$$(25)\qquad H_p\,\beta_c^2\cdot\frac{E\,J_c}{E_K\,F_K^0}\cdot\varrho_3\,L\pm\beta_c^2\,\alpha_t\,t\,E\,J_c\,\varrho_3\,L_t-H\,F_\eta=0.$$

Die Verschiebungsfläche F_η des Hängegurtes in der allgemeinen Bestimmungsgleichung (25) kann man sich, wie Bild 7 ausweist, aus drei Teilen zusammengesetzt denken:

$$(26)\qquad F_\eta=F_\eta(s)+F_\eta(M)+F_\eta^0.$$

Darin sind $F_\eta(s)$ die Fläche infolge der Senkungen η_1, η_2, η_3 und η_4, $F_\eta(M)$ diejenige infolge $M_1\ldots M_4$ und F_η^0 diejenige der Gelenkträger l_1, l_3 und l_5.

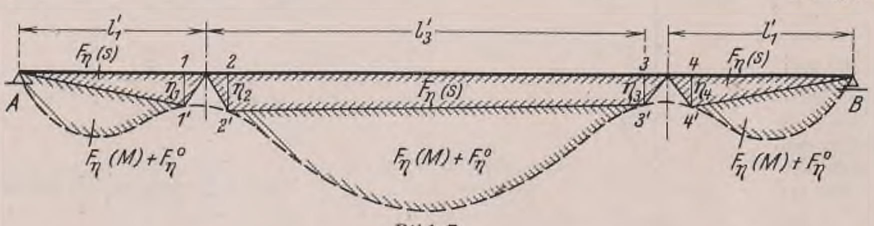


Bild 7.

Der erste Teil der Fläche berechnet sich (Bild 7) nach

$$F_\eta(s)=\frac{1}{2}\,[(\eta_1+\eta_4)\,l_1'+(\eta_2+\eta_3)\,l_3'].$$

Die Einführung der Werte $\eta_1\ldots\eta_4$ nach Gl. (5a), (5b), (7a) und (7b) in obige Gleichung liefert

$$(27\,a)\qquad H\,F_\eta(s)=\frac{a}{2}\,(l_1\,C_{\mathrm{I}}+l_3'\,C_{\mathrm{III}})+X_1\cdot\frac{l_3'-l_1''}{4}+X_3\cdot\frac{l_1-l_3'}{4}-H_p\cdot\frac{a}{2\,\varrho_3}\,(\lambda\,l_1\,l_1''+l_3'\,l_3'')$$

Der zweite Teil beträgt*)

$$(27\,b)\qquad H\,F_\eta(M)=\frac{1}{2}\cdot\sum_1^4 M\,l\,k=X_1\,l_1\,k_1+X_3\,l_3\,k_3.$$

Addiert man Gl. (27a) und (27b) und führt X_1 und X_3 nach Gl. (23) ein, so ergibt sich

$$(28)\qquad H\,F_\eta(s)+H\,F_\eta(M)=\frac{a}{2}\,(l_1\,C_{\mathrm{I}}+l_3'\,C_{\mathrm{III}})+X_{1p}\,K_1'+X_{3p}\,K_3'+H_p\left[\frac{K_1\,K_1'}{\varphi_1}+\frac{K_3\,K_3'}{\varphi_3}-\frac{a}{2\,\varrho_3}\,(\lambda\,l_1\,l_1''+l_3'\,l_3'')\right].$$

Darin bedeuten die Abkürzungen

$$(29)\qquad K_1'=l_1\,k_1+\frac{l_3'-l_1''}{4}\qquad K_3'=l_3\,k_3+\frac{l_1-l_3'}{4}.$$

Der dritte Teil der Fläche ergibt sich*) zu

$$(30)\qquad H\,F_\eta^0=\Sigma\,\lambda\,H\,F_\eta(p)-H_p\left(\frac{2}{3}\cdot f_3\,l_3+\frac{4}{3}\cdot\lambda\,f_1\,l_1-\frac{8\,f_3}{l_3}\cdot\frac{K_0'}{\beta_c^2}\right).$$

Darin bedeutet

$$(30\,a)\qquad K_0'=k_3+\lambda\cdot\frac{2\,l_1}{l_3}.$$

Setzt man Gleichung (30) und Gl. (28) in Gl. (25) ein, und löst sie nach H_p auf, dann erhält man schließlich die Bestimmungsgleichung für H_p zu

$$(31)\qquad H_p=\frac{\Sigma\,\lambda\,H\,F_\eta(p)+X_{1p}\,K_1'+X_{3p}\,K_3'+\dfrac{a}{2}\,(l_1\,C_{\mathrm{I}}+l_3'\,C_{\mathrm{III}})\mp\beta_c^2\,\alpha_t\,t\,E\,J_c\,\varrho_3\,L_t}{\dfrac{2}{3}\cdot f_3\,l_3+\dfrac{4}{3}\cdot\lambda\,f_1\,l_1+\dfrac{a}{2\,\varrho_3}\,(\lambda\,l_1\,l_1''+l_3\,l_3'')-\dfrac{8\,f_3}{l_3}\cdot\dfrac{K_0'}{\beta_c^2}-\left[\dfrac{K_1\,K_1'}{\varphi_1}+\dfrac{K_3\,K_3'}{\varphi_3}\right]+\beta_c^2\cdot\dfrac{E\,J_c}{E_K\,F_K^0}\cdot\varrho_3\,L}.$$

Damit ist der zweite Teil der Aufgabe, die Ermittlung von H_p, erledigt, und das gesamte Problem auch vollständig gelöst[5]). Im folgenden sei kurz auf die praktische Anwendung des Verfahrens hingewiesen.

III. Praktische Anwendung des Verfahrens.

Wie die Ergebnisse der vorangehenden Abschnitte zeigen, ist die Berechnung des vorliegenden Hängebrückensystems im wesentlichen wie diejenige der Hängebrücken mit durchlaufenden Versteifungsträgern auf starren Zwischenstützen. Aber die praktische Durchführung der Berechnung ist viel umständlicher, weil jeweils fünf statisch unbestimmte Größen X_1, X_2, X_3, X_4 und H_p ermittelt werden müssen, während man es bei der entsprechenden Hängebrücke mit starren Zwischenstützen nur mit drei solchen Größen, nämlich mit zwei Stützenmomenten und der H_p-Kraft, zu tun hat. Die Berechnung wird sehr langwierig werden, wenn man für jeden Verkehrslastzustand zunächst H_p genau ermitteln und dann die X-Werte berechnen will. Denn Gl. (23) für jedes $H=H_p+H_g$ zu lösen, erfordert viel Rechenarbeit, weil man die Beiwerte nach Gl. (23a), (23b), (21), (22), (13) und (14) jedesmal neu ermitteln muß. Praktisch empfiehlt es sich, zu jedem Lastfall Gl. (23) und Gl. (31) für zwei angenommene H-Werte, z. B. $H=H_g$ und $H=H_g+\frac{3}{4}\cdot\max H_p$, zu lösen und die richtigen Werte von H_p, $X_1,\ldots X_4$ durch geradlinige Zwischenschaltung[6])

[5]) Die Werte $H\,F_\eta$ für verschiedene Lastfälle sind in der unter *) angegebenen Dissertation zusammengefaßt.

[6]) s. a. Neukirch, Ingenieurarchiv 1936, S. 140 (mit drei Werten), und Stüssi, Abhandlungen der I. V. B. H. Bd. 4 (mit zwei Werten).

zu bestimmen. Nach der genauen Ermittlung von H_p und X können dann die Schnittgrößen nach dem in Abschnitt II. C angegebenen Vorgang berechnet werden.

IV. Entwicklung des Verfahrens für Versteifungsträger mit veränderlichem Trägheitsmoment.

In den vorangehenden Abschnitten wurde das Berechnungsverfahren für den Versteifungsträger mit konstantem Trägheitsmoment J_1, J_2, J_3 in den Strecken $\overline{A1}$, $\overline{12}$ und $\overline{23}$ entwickelt. Im nachstehenden soll der Fall beliebig veränderlichen Trägheitsmoments behandelt werden.

Für den Versteifungsträger mit veränderlichem J gelten im großen und ganzen die in vorangehenden Abschnitten erläuterten Betrachtungen und abgeleiteten Gleichungen. Der Unterschied besteht lediglich darin, daß man die Drehwinkel infolge $X_i=1,\ldots$ und die Belastungsglieder $\mathfrak{C}_1,\ldots$ sowie die Biegefläche F_η auf anderem Wege ermittelt[7]). Wegen der Berechnung dieser Größen beim Träger mit veränderlichem J sei auf das in der Dissertation*) entwickelte Annäherungsverfahren verwiesen.

Die Gl. (1) bis (13) bleiben im vorstehenden Fall ungeändert. Die Drehwinkel in Gl. (14) mögen noch dieselben Beziehungen δ, τ_{1p}, τ und $\overline{\tau}$ (Bild 5) erhalten, während Gl. (16) folgendermaßen umgeschrieben werden soll:

$$(16)'\qquad\left\{\begin{aligned}&\mathfrak{C}_1+\mathfrak{C}_4=\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}(p)+\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}(y''H_p)=\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}-\frac{H_p}{\varrho_1}\cdot\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}(1)\\&\mathfrak{C}_1-\mathfrak{C}_4=\mathfrak{C}_{\mathrm{II}}\\&\mathfrak{C}_2+\mathfrak{C}_3=\mathfrak{C}_{\mathrm{III}}(p)+\mathfrak{C}_{\mathrm{III}}(y''H_p)=\mathfrak{C}_{\mathrm{III}}-\frac{H_p}{\varrho_3}\cdot\mathfrak{C}_{\mathrm{III}}(1)\\&\mathfrak{C}_2-\mathfrak{C}_3=\mathfrak{C}_{\mathrm{IV}}.\end{aligned}\right.$$

Darin bedeuten $\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}(1)$ oder $\mathfrak{C}_{\mathrm{III}}(1)$ die Belastungsglieder infolge der Vollast 1 t/m auf den mit Axialzug H belasteten Trägerteilen $\overline{A1}$ und $\overline{4B}$ oder $\overline{23}$. Man kann deshalb $\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}(y''H_p)=-\frac{H_p}{\varrho_1}\cdot\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}(1)$ setzen, weil bei konstantem Axialzug H das Superpositionsgesetz gilt.

Setzt man nun statt Gl. (21)

$$(21)'\qquad\left\{\begin{aligned}&k_1'=\frac{l_1}{2\,\varrho_3}\left(2\,\lambda\cdot\frac{\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}(1)}{l_1}-\lambda\,\nu_1'\,\nu_1''+\frac{l_3''}{l_1}\right)\\&k_3'=\frac{l_3}{2\,\varrho_3}\left(2\cdot\frac{\mathfrak{C}_{\mathrm{IV}}(1)}{l_3}+\lambda\,\nu_1\cdot\frac{l_1}{l_3}-\frac{1}{\nu_3}\right),\end{aligned}\right.$$

so bleiben das Gleichungssystem (20), die Lösungsgleichungen (23) und alle anderen Gleichungen unverändert. Damit ist die Berechnung der Momente $M_1,\ldots M_4$ und der anderen Schnittgrößen im vorstehenden Fall erledigt.

Zur Berechnung von H_p kann man jetzt wie im Abschnitt III von derselben Gleichung (25) ausgehen. In Gl. (26) berechnet sich die Biegefläche $H\,F_\eta(s)$ wie früher nach Gl. (27a), während der Ausdruck der Biegefläche $H\,F_\eta(M)$ infolge der Momente M_1, M_2, M_3 und M_4 statt Gl. (27b) folgende Form annimmt

$$(27\,b)'\qquad H\,F_\eta(M)=X_1\,\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}(1)+X_3\,\mathfrak{C}_{\mathrm{III}}(1),$$

weil die Belastungsglieder (Drehwinkel) $\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}(1)$ und $\mathfrak{C}_{\mathrm{III}}(1)$ an den Stellen 1, 4 und 2, 3 infolge der Vollast 1 t/m gleich sind der Biegefläche infolge der Schnittgröße X_1 und X_3 [nach dem in der Dissertation*) bewiesenen Satz 3: Die Biegefläche $F_\eta(M_i)$ eines einfachen oder durchlaufenden Trägers mit oder ohne Axialzug H, hervorgerufen durch ein Moment M_i t/m an der Stelle i, ist zahlenmäßig gleich dem Biegewinkel $\tau_i(p)$ im Punkt i infolge der Vollast p t/m (zahlenmäßig $p=M_i$)].

Damit geht Gl. (29) über in

$$(29)'\qquad\left\{\begin{aligned}&K_1'=\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}(1)+\frac{1}{4}\,(l_3'-l_1'')\\&K_3'=\mathfrak{C}_{\mathrm{III}}(1)+\frac{1}{4}\,(l_1-l_3').\end{aligned}\right.$$

Der dritte Teil der Biegefläche nach Gl. (30) sei im vorliegenden Fall kurz bezeichnet mit:

$$(30)'\qquad H\,F_\eta^\circ=\Sigma\,\lambda\,H\,F_\eta(p)+H\,F_\eta(y''H_p)=\Sigma\,\lambda\,H\,F_\eta(p)+H\,\Sigma\cdot\frac{H_p}{\varrho}\cdot F_\eta(1).$$

Darin bedeutet $F_\eta(1)$ die Biegefläche der durch Axialzug H belasteten Gelenkträger $\overline{A1}$, $\overline{23}$ und $\overline{4B}$ infolge der Vollast 1 t/m.

Die Einführung der Gl. (27a), (27b)' u. (30)' in Gl. (25) liefert

$$(31)'\qquad H_p=\frac{\Sigma\,\lambda\,H\,F_\eta(p)+X_{1p}\,K_1'+X_{3p}\,K_3'+\dfrac{a}{2}\,(l_1\,C_{\mathrm{I}}+l_3'\,C_{\mathrm{III}})\mp\beta_c^2\,\alpha_t\,t\,E\,J_c\,\varrho_3\,L_t}{\beta_c^2\cdot\dfrac{E\,J_c}{\varrho_3}\cdot\Sigma\,\lambda\,F_\eta(1)+\beta_c^2\cdot\dfrac{E\,J_c}{E_K\,F_K^\circ}\cdot\varrho_3\,L-\left[\dfrac{K_1\,K_1'}{\varphi_1}+\dfrac{K_3\,K_3'}{\varphi_3}\right]}.$$

Damit haben wir den Fall des veränderlichen Trägheitsmoments vollkommen erledigt.

[7]) Im vorliegenden Fall kann man auch diese Werte in H-facher Größe ermitteln.

Wie aus vorangehenden Ableitungen zu ersehen ist, braucht man nur die Drehwinkel infolge der X-Werte und die Belastungsglieder $\mathfrak{C}_I(1)$ und $\mathfrak{C}_{III}(1)$ sowie die Biegefläche $F_\eta(1)$ infolge der Vollast 1 t/m auf den Gelenkträgern $\overline{A1}$, $\overline{23}$ und $\overline{4B}$ und die Belastungsglieder $\mathfrak{C}(p)$ sowie die Biegefläche $F_\eta(p)$ infolge der Last p nach dem Annäherungsverfahren zu ermitteln. Außer $\mathfrak{C}(p)$ und $F_\eta(p)$ sind diese Größen jedoch nur einmal für ein beliebig gewähltes H zu berechnen, da sie unabhängig von p sind und ferner der Änderung von H leicht durch die Abänderung der Multiplikatoren a Rechnung getragen werden kann. Die Werte $\mathfrak{C}(p)$ und $F_\eta(p)$ infolge p müssen für jede Laststellung p ermittelt werden, aber auch nur einmal für ein beliebig gewähltes H. Was den weiteren praktischen Rechnungsgang anbelangt, so gilt das unter III Gesagte auch für den vorliegenden Fall.

V. Entwicklung der „beschränkten Einflußlinien"*).

Der allgemeine Vorgang*) zur Ermittlung der beschränkt gültigen Einflußlinien einer beliebigen Hängebrücke nach der Theorie II. Ordnung ist folgender:

1. Ermittlung der Einflußlinie für die betreffende Schnittgröße des stellvertretenden Trägers mit Axialzug H. Dies entspricht der Teilbelastung p.
2. Berechnung dieser Schnittgröße infolge der Vollast $y'' H_p$ unter Berücksichtigung von H. Daraus ergibt sich der zweite Ast der Einflußlinie, der stets gleich ist den mit einer Konstanten multiplizierten Ordinaten der H_p-Linie.
3. Addition beider Linien liefert die gesuchte beschränkte Einflußlinie. Die Auswertung der Einflußlinie hat jedoch nur mit der Verkehrslast p zu erfolgen.

Im folgenden möge der Rechnungsgang bei der Ermittlung der beschränkten Einflußlinien verschiedener Schnittgrößen im einzelnen erläutert werden.

1. Die beschränkte Einflußlinie für H_p.

Sie berechnet sich (ohne Temperaturwirkung) aus

$$H_p = \frac{\lambda H F_\eta(p) + X_{1p} K_1' + X_{3p} K_3' + \frac{a}{2}(l_1 C_I + l_3' C_{III})}{N'}$$

Darin ist N' der Nenner in Gl. (31) oder (31)', der konstant bleibt, sobald die Axialzugkraft H, die der betreffenden Einflußlinie zugrunde liegen soll, gewählt ist.

Der erste Summand im Zähler $H F_\eta(p)$ ist im vorliegenden Fall die Biegefläche der Gelenkträger $\overline{A1}$, $\overline{23}$ und $\overline{4B}$ infolge einer wandernden Einzellast $P = 1$. Für Träger mit öffnungsweise konstantem J können hierfür der Dissertation*) die fertigen Formeln entnommen werden. Für Träger mit veränderlichem J läßt sich diese Größe leicht nach dem in der gleichen Arbeit bewiesenen Satz 2 ermitteln. Dieser lautet: Die Biegefläche $F_\eta(P_i)$ eines einfachen oder durchlaufenden Trägers mit oder ohne Axialzug H, hervorgerufen durch eine Last P_i (in Tonnen) an der Stelle i, ist zahlenmäßig gleich der Durchbiegung $\eta_i(p)$ im Punkt i infolge der Vollast p t/m (zahlenmäßig $p = P$). Im vorliegenden Fall ist also $p = 1$ t/m.

Der zweite und dritte Summand X_{1p} und X_{3p} berechnen sich nach Gl. (23). Die darin vorkommenden Ausdrücke $\mathfrak{C}_I$ und $\mathfrak{C}_{III}$ (Biegewinkel infolge einer Einzellast $P = 1$) sind nach dem Gegenseitigkeitssatz gleich der Biegelinie infolge $X_1 = 1$ und $X_3 = 1$. Bei Trägern mit konstantem J kann man aus der Formelzusammenstellung in der Dissertation*) die fertigen Formeln für diese Ausdrücke entnehmen. Im Falle des veränderlichen Trägheitsmoments lassen sie sich nach dem Annäherungsverfahren*) berechnen. Die Größen K_1' und K_3' sowie φ_1 und φ_3 sind leicht zu ermittelnde Festwerte, nachdem der Axialzug H festgelegt ist, während die Berechnung der Auflagerdrücke C_I und C_{III} des Gelenkträgers infolge der Einzellast $P = 1$ keiner weiteren Erläuterung bedarf.

2. Die beschränkte Einflußlinie für $M_1, \ldots M_4$.

Man ermittle nach Gl. (23) zunächst die Linien von X_{1p}, X_{3p}, X_2 und X_4. Das entspricht der Teilbelastung p. Die Ausdrücke $\mathfrak{C}_I$, $\mathfrak{C}_{II}$, $\mathfrak{C}_{III}$ und $\mathfrak{C}_{IV}$ sind, wie bereits erwähnt, die Biegelinien infolge dieser Größen. Für den Fall konstanten Trägheitsmoments enthält sie die Formelzusammenstellung der Dissertation*) und für den Fall veränderlichen Trägheitsmoments können sie nach dem Annäherungsverfahren*) ermittelt werden. Die Auflagerdrücke C_I, C_{II}, C_{III} und C_{IV} des Gelenkträgers infolge $P = 1$ lassen sich leicht berechnen, und die Größen φ und m sind, wie gesagt, konstante Werte für ein bestimmtes H.

Der zweite Ast der Einflußlinie für X_1 oder X_3 ist gleich der schon ermittelten H_p-Linie mal dem Multiplikator $\frac{K_1}{\varphi_1}$ oder $\frac{K_3}{\varphi_3}$.

Nach der Ermittlung von $X_1, \ldots X_4$ sind die Einflußlinien für M_1, M_2, M_3 und M_4 nach Gl. (24) bekannt.

3. Die beschränkten Einflußlinien für Schnittgrößen M und Q.

A. In den Trägerteilen $\overline{12}$ und $\overline{34}$. Wie bereits erwähnt, gilt für diese beiden Strecken die einfachere Differentialgleichung (1a), und diese beiden Trägerteile sind wie ein einfacher, gewöhnlicher Balken mit nur Last p und den Endmomenten M_1 und M_2 oder M_3 und M_4 (siehe oben) belastet zu behandeln. Genau so ist bei der Ermittlung der Einflußlinien für die Schnittgrößen dieser Trägerteile vorzugehen.

B. In den Trägerteilen $\overline{A1}$, $\overline{23}$ und $\overline{4B}$. Auf diese Trägerteile greifen die Querlasten p und $y'' H_p$ und der Axialzug H an, daher muß man bei der Ermittlung der Einflußlinien der Schnittgrößen in diesen Strecken sowohl p und $y'' H_p$ als auch H berücksichtigen. Die Einflußlinien kann man entweder nach Bild 8 für p und für $y'' H_p$, wie eingangs erwähnt, ganz getrennt berechnen, oder man zählt nach Bild 6 die Endmomente infolge p und $y'' H_p$ zusammen und trennt dann für den einfachen Träger die Lasten p und $y'' H_p$. Es kommt dasselbe heraus.

Im ersten Fall setzt sich die Einflußlinie einer Schnittgröße, z. B. M_x in der Mittelöffnung, nach Bild 8 aus drei Teilen zusammen. Der erste Ast ist die Einflußlinie eines einfachen Balkens mit Axialzug H. Der zweite Ast rührt von den Endmomenten $M_2(p)$ und $M_3(p)$ her, und ist gleich der $M_2(p)$-Linie mal einem Multiplikator plus $M_3(p)$-Linie mal einem Multiplikator. Diese beiden Äste zusammen stellen die Teilbelastung p dar. Der dritte Ast ist gleich der H_p-Linie mal einem Multiplikator μ_{M_x}, weil das Moment M_x im Bild 8c infolge der Vollast $y'' H_p$ und der Endmomente $M_2(y'' H_p)$ und $M_3(y'' H_p)$ sich zu $M_x = \mu_{M_x} H_p$ ergeben wird.

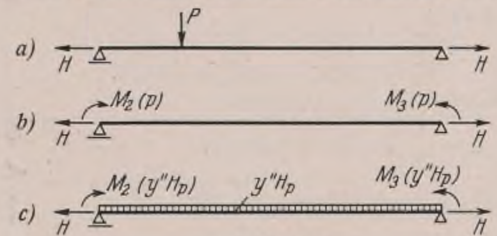


Bild 8a bis c.

Im zweiten Fall setzen sich die Einflußlinien auch aus drei Teilen zusammen (Bild 6). Die Berechnung ist im großen und ganzen wie im ersten Fall. Nur werden hier, z. B. für M_x in der Mittelöffnung, die M_2- und M_3-Linien statt der $M_2(p)$- und $M_3(p)$-Linien benutzt, und der Multiplikator im Bild 6c wird ein anderer sein als der im Bild 8c.

Auf die Ermittlung des ersten Astes der Einflußlinie und die Berechnung der einzelnen Multiplikatoren beim Träger mit konstantem und veränderlichem J können wir hier nicht näher eingehen und möchten auf die Dissertation verweisen. Die vorstehende Darlegung gilt entsprechend für die Querkraft und für die Trägerteile $\overline{A1}$ und $\overline{4B}$.

4. Die beschränkten Einflußlinien für die Durchbiegungen und die Biegewinkel.

Für die beschränkten Einflußlinien der Durchbiegung und der Biegewinkel kommt außer dem oben Gesagten noch die Berücksichtigung der Senkungen $\eta_1, \ldots \eta_4$ in den Punkten 1, 2, 3 und 4 hinzu, wie schon unter II. C erwähnt ist. Die Linien von $\eta_1, \ldots \eta_4$ lassen sich aber nach Gl. (5a), (5b), (7a) u. (7b) ohne weiteres aus der H_p-Linie und den Linien von $M_1, \ldots M_4$ ermitteln.

Zahlenbeispiel.

Im folgenden möge eine Hängebrücke nach Bild 9 berechnet werden.

Kabel	$F_k = 0{,}67$ m²	$E_k = 1550$ t/cm²
Versteifungsträger . .	$J_1 = J_3 = 11$ m⁴	$E = 2100$ t/cm²
Last je Tragwand . .	$g_1 = g_3 = 26$ t/m	$p = 15$ t/m.

Man ermittle zunächst die Festwerte in Gl. (18). Es ergab sich:

$$\lambda = 1 \qquad \begin{array}{ll} \nu_1 = 0{,}943 & \nu_3 = 0{,}960 \\ \nu_1' = 1{,}120 & \nu_3' = 1{,}083 \\ \nu_1'' = 1{,}056 & \nu_3'' = 1{,}040. \end{array}$$

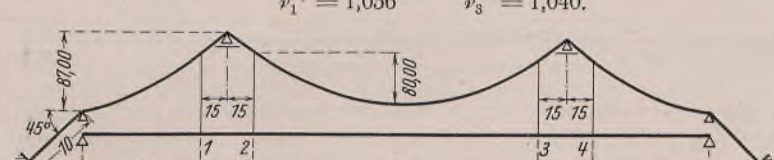


Bild 9.

Weiter wähle man zwei H-Werte, um damit Gl. (23) u. (31) aufzulösen. Im vorliegenden Fall seien

$$H_1 = 21\,000 \text{ t} \left(H_g = \frac{g\,l^2}{8f} = 21\,013 \text{ t}\right)$$

$$H_2 = 28\,000 \text{ t} \;(\max H_p \sim 11\,150 \text{ t}).$$

Wir wollen im nachstehenden die Zahlenrechnung für $H = 21\,000$ t zeigen.

$$\beta_1^2 = \beta_3^2 = \frac{H}{EJ} = \frac{21\,000}{21 \cdot 10^6 \cdot 11} = 0{,}9091 \cdot 10^{-4}$$

$$\beta = 0{,}953 \cdot 10^{-2}$$

$$\alpha_3^* = \frac{l_3}{2} \cdot \beta = 3{,}4308 \qquad k_3 = 0{,}7091$$

$$\alpha_1 = \frac{l_1}{2} \cdot \beta = 1{,}1913 \qquad k_1 = 0{,}3025$$

$$K_0' = k_3 + \lambda \cdot \frac{2\,l_1}{l_3} = 0{,}9191$$

$$\mathfrak{Tg}\,\alpha_3 = 0{,}9979 \qquad \mathfrak{Tg}\,2\,\alpha_1 = 0{,}9831.$$

Nach Gl. (14):

$$\delta = 0{,}0909 \cdot 10^{-2} \qquad \tau = 0{,}9510 \cdot 10^{-2}$$

$$\tau_{1l} = 0{,}5694 \cdot 10^{-2} \qquad \bar{\tau} = 0{,}6772 \cdot 10^{-2}.$$

Nach Gl. (13) u. (22):

$$\delta'_{11} = 4{,}959 \cdot 10^{-2} \qquad \delta'_{22} = 4{,}892 \cdot 10^{-2}$$
$$\delta'_{33} = 5{,}322 \cdot 10^{-2} \qquad \delta'_{44} = 4{,}985 \cdot 10^{-2}$$
$$\delta'_{13} = -3{,}335 \cdot 10^{-2} \qquad \delta'_{24} = -3{,}402 \cdot 10^{-2}.$$

Nach Gl. (23a):

$$m_3 = -0{,}6266 \qquad \varphi_1 = 2{,}869 \cdot 10^{-2}$$
$$m_1 = -0{,}6725 \qquad \varphi_3 = 3{,}079 \cdot 10^{-2}$$
$$m_4 = -0{,}6825 \qquad \varphi_2 = 2{,}570 \cdot 10^{-2}$$
$$m_2 = -0{,}6954 \qquad \varphi_4 = 2{,}619 \cdot 10^{-2}.$$

Nach Gl. (21), (23b) u. (29):

$$k_1' = 0{,}3747 \qquad K_1 = 0{,}5709 \qquad K_1' = 189{,}38$$
$$k_3' = 0{,}3132 \qquad K_3 = 0{,}5652 \qquad K_3' = 389{,}30.$$

Der Nenner in der Bestimmungsgleichung (31):

$$\frac{2}{3} \cdot f_3 l_3 + \frac{4}{3} \cdot \lambda f_1 l_1 = 41\,617$$
$$\frac{a}{2 \varrho_3} [\lambda l_1 l_1'' + l_3' l_3''] = 5\,765$$
$$-\frac{8 f_3}{l_3} \cdot \frac{K_0'}{\beta^2} = -8\,987$$
$$-\left[\frac{K_1 K_1'}{\varphi_1} + \frac{K_3 K_3'}{\varphi_3}\right] = -10\,909$$
$$\beta^2 \cdot \frac{E J}{E_K F_K^\circ} \cdot \varrho L = 2\,408$$
$$N = 29\,894.$$

Man erhält schließlich nach Gl. (23)

$$X_1 = X_{1p} + X_1 (y'' H_p)$$
$$= [-34{,}855\, \mathfrak{C}_{\rm I} - 21{,}841\, \mathfrak{C}_{\rm III} + 8{,}086\, C_{\rm I} - 6{,}485\, C_{\rm III}] + 19{,}892\, H_p$$
$$X_3 = X_{3p} + X_3 (y'' H_p)$$
$$= [-32{,}478\, \mathfrak{C}_{\rm III} - 21{,}841\, \mathfrak{C}_{\rm I} - 3{,}784\, C_{\rm I} + 5{,}310\, C_{\rm III}] + 18{,}350\, H_p$$
$$X_2 = -38{,}911\, \mathfrak{C}_{\rm II} - 26{,}555\, \mathfrak{C}_{\rm IV} + 8{,}035\, C_{\rm II} - 5{,}914\, C_{\rm IV}$$
$$X_4 = -38{,}182\, \mathfrak{C}_{\rm IV} - 26{,}555\, \mathfrak{C}_{\rm II} - 3{,}971\, C_{\rm II} + 5{,}594\, C_{\rm IV}$$

und nach Gl. (31)

$$10^4 H_p = 0{,}3345\, \Sigma \lambda H F_\eta + 63{,}30\, X_{1p} + 130{,}20\, X_{3p} + 627\, C_{\rm I} + 1844\, C_{\rm III} + H_t,$$

worin

$$H_t = -\frac{\alpha_t\, t\, E J\, \varrho_3\, L_t}{N} = \mp 244 \text{ t}$$

für $t = \pm 25\,^\circ$C beträgt.

Auf gleiche Weise ergeben sich für $H = 28000$ t die ähnlichen Gleichungen für X und H_p, die hier nicht mitgeteilt werden. Damit kann man die Größen X und H_p bei jedem Lastfall mit Hilfe der vorstehenden Gleichungen ermitteln. Im folgenden wollen wir die Anwendung des Verfahrens weiter an Hand der Berechnung des maximalen Biegungsmoments max M_v im Viertelpunkt der Mittelöffnung zeigen. Der Berechnung möge die näherungsweise ungünstigste Laststellung nach Bild 10 mit einer gleichzeitigen Temperatursteigerung $t = +25\,^\circ$C zugrunde liegen.



Bild 10.

$$C_1^0 = 0 \qquad C_{\rm I} = C_1^0 + C_4^0 = 1875 \text{ t}$$
$$C_4^0 = \frac{p l_1}{2} = \frac{15 \cdot 250}{2} = 1875 \qquad C_{\rm II} = C_1^0 - C_4^0 = -1875 \text{ t}$$
$$C_2^0 = \frac{p a \left(l_3 - \frac{a}{2}\right)}{l_3} = \frac{15 \cdot 300 \cdot 570}{720} = 3562{,}5 \text{ t} \qquad C_{\rm III} = C_2^0 + C_3^0 = 4500 \text{ t}$$
$$C_3^0 = \frac{p a^2}{2 l_3} = \frac{15 \cdot 300^2}{2 \cdot 720} = 937{,}5 \text{ t} \qquad C_{\rm IV} = C_2^0 - C_3^0 = 2625 \text{ t}$$

Für $H = 21\,000$ t:

$$a \beta = 2{,}8590 \qquad \mathfrak{Sin} \frac{a}{2} \cdot \beta = 1{,}968 \qquad \mathfrak{Cof}\, a \beta = 8{,}751$$
$$b \beta = 4{,}0026 \qquad \mathfrak{Cof} \frac{b}{2} \cdot \beta = 3{,}767 \qquad \mathfrak{Cof}\, b \beta = 27{,}38$$
$$\alpha_3 = 3{,}4308 \qquad \mathfrak{Cof}\, \alpha_3 = 15{,}470 \qquad \mathfrak{Cof}\, 2\alpha_3 = 478{,}2$$
$$\mathfrak{Sin}\, 2\alpha_3 = 478{,}2$$

Mit den Formeln aus der Dissertation*) ergeben sich:

$$\mathfrak{C}_1 = 0$$
$$\mathfrak{C}_4 = \frac{p l_1}{2} \cdot k_1 = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 250 \cdot 0{,}3025 = 567{,}2$$
$$\mathfrak{C}_2 = \frac{p a \left(l_3 - \frac{a}{2}\right)}{l_3} - \frac{p}{\beta} \cdot \frac{\mathfrak{Cof}\, 2\alpha_3 - \mathfrak{Cof}\, b \beta}{\mathfrak{Sin}\, 2\alpha_3}$$
$$= 3562{,}5 - \frac{15}{0{,}953 \cdot 10^{-2}} \cdot \frac{478{,}2 - 27{,}38}{478{,}2} = 2079{,}5$$
$$\mathfrak{C}_3 = \frac{p a^2}{l_3} - \frac{p}{\beta} \cdot \frac{\mathfrak{Cof}\, a \beta - 1}{\mathfrak{Sin}\, 2\alpha}$$
$$= 2625 - \frac{15}{0{,}953 \cdot 10^{-2}} \cdot \frac{8{,}751 - 1}{478{,}2} = 912{,}5$$
$$\mathfrak{C}_{\rm I} = \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_4 = 567{,}2 \qquad \mathfrak{C}_{\rm III} = \mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_3 = 2992$$
$$\mathfrak{C}_{\rm II} = \mathfrak{C}_1 - \mathfrak{C}_4 = -567{,}2 \qquad \mathfrak{C}_{\rm IV} = \mathfrak{C}_2 - \mathfrak{C}_3 = 1167$$

Unter Verwendung der Formelwerte aus der Dissertation*) gewinnt man:
$\Sigma H F_\eta = H F_\eta$ (Mittelöffnung) $+ H F_\eta$ (Seitenöffnungen)

$$= \frac{p a^2}{12} (3 l_3 - 2a) - \frac{2p}{\beta^2} \left[\frac{a}{2} - \frac{\mathfrak{Sin} \frac{a}{2} \beta \cdot \mathfrak{Cof} \frac{b}{2} \beta}{\beta \cdot \mathfrak{Cof}\, \alpha_3}\right] + \frac{p l_1^3}{12} - p l_1 \cdot \frac{k_1}{\beta^2}$$
$$= 17\,550 \cdot 10^4 - 3291{,}1 \cdot 10^4 + 1953{,}1 \cdot 10^4 - 1247{,}9 \cdot 10^4 = 14964{,}1 \cdot 10^4.$$

Die Einführung der obigen Zahlenwerte in die Gleichungen von X und H_p liefert:

$$X_{1p} = -34{,}855 \cdot 567{,}2 - 21{,}841 \cdot 2992 + 8{,}086 \cdot 1875 - 6{,}485 \cdot 4500 = -99\,139 \text{ tm}$$
$$X_{3p} = -32{,}478 \cdot 2992 - 21{,}841 \cdot 567{,}2 - 3{,}784 \cdot 1875 + 5{,}310 \cdot 4500 = -92\,762 \text{ tm}$$
$$X_2\text{[8]} = +38{,}911 \cdot 567{,}2 - 26{,}555 \cdot 1167 - 8{,}035 \cdot 1875 - 5{,}914 \cdot 2625 = -39\,509 \text{ tm}$$
$$X_4 = -38{,}182 \cdot 1167 + 26{,}555 \cdot 567{,}2 + 3{,}971 \cdot 1875 + 5{,}594 \cdot 2625 = -7367 \text{ tm}$$
$$H_p = 0{,}3345 \cdot 14\,964{,}1 - 63{,}30 \cdot 9{,}9139 - 130{,}20 \cdot 9{,}2762 + 627 \cdot 0{,}1875 + 1844 \cdot 0{,}4500 - 244 = 3876 \text{ t}$$
$$X_1 (y'' H_p) = 19{,}892 \cdot 3876 = 77\,101 \text{ tm}$$
$$X_3 (y'' H_p) = 18{,}350 \cdot 3876 = 71\,125 \text{ tm}$$
$$X_1\text{[8]} = X_{1p} + X_1 (y'' H_p) = -22\,038 \text{ tm}$$
$$X_3 = X_{3p} + X_3 (y'' H_p) = -21\,637 \text{ tm}.$$

Auf gleiche Weise erhält man für $H = 28\,000$ t

$$X_3 = -17\,861 \text{ tm} \qquad X_4 = -7089 \text{ tm}$$
$$H_p = 3926 \text{ t}.$$

Es sind

$$\Delta H = 28\,000 - 21\,000 = 7000 \text{ t}$$
$$\Delta H_p = 3876 - 3926 = -50 \text{ t}$$
$$\Delta X_3 = -21\,637 + 17\,861 = -3776 \text{ tm}$$
$$\Delta X_4 = -7367 + 7089 = -278 \text{ tm}.$$

Die geradlinige Interpolation*) liefert

$$H_p = 3876 + 50 \cdot \frac{3876}{7000 - 50} = 3876 + 50 \cdot 0{,}5577 = 3904 \text{ t}$$
$$X_3 = -21\,637 + 3776 \cdot 0{,}5577 = -19\,531 \text{ tm}$$
$$X_4 = -7367 + 278 \cdot 0{,}5577 = -7212 \text{ tm}$$
$$M_2 = X_3 + X_4 = -26\,743 \text{ tm}$$
$$M_3 = X_3 - X_4 = -12\,319 \text{ tm}.$$

Damit kann man M_v ermitteln.

Für $H_p = 3904$ t hat man

$$H = H_p + H_g = 3904 + 21\,013 = 24\,917 \text{ t}$$
$$\beta^2 = 1{,}0786 \cdot 10^{-4} \qquad \beta = 1{,}0385 \cdot 10^{-2}$$
$$\frac{1}{4} \cdot l_3 \beta = 1{,}8693 \qquad \mathfrak{Sin} \frac{1}{4} \cdot l_3 \beta = 3{,}165 \qquad \frac{3{,}165}{884{,}4} = 0{,}003\,58$$
$$\frac{3}{4} \cdot l_3 \beta = 5{,}6079 \qquad \mathfrak{Sin} \frac{3}{4} \cdot l_3 \beta = 136{,}30 \qquad \frac{136{,}30}{884{,}4} = 0{,}154\,11$$
$$2\alpha_3 = 7{,}4772 \qquad \mathfrak{Sin}\, 2\alpha_3 = 884{,}4$$
$$b \beta = 4{,}3617 \qquad \mathfrak{Cof}\, b \beta = 39{,}20.$$

Das Moment M_v setzt sich nach Bild 6 aus drei Teilen zusammen:

1. Bild 6a

$$M_v (M) = \frac{M_2 \cdot \mathfrak{Sin} \frac{3}{4} \cdot l_3 \beta + M_3 \cdot \mathfrak{Sin} \frac{1}{4} \cdot l_3 \beta}{\mathfrak{Sin}\, 2\alpha_3}$$
$$= -26\,743 \cdot 0{,}154\,11 - 12\,319 \cdot 0{,}003\,58 = -4165 \text{ tm}$$

2. Bild 6b

$$M_v (y'' H_p) = \frac{y'' H_p}{\beta^2} \left(1 - \frac{\mathfrak{Sin} \frac{3}{4} \cdot l_3 \beta + \mathfrak{Sin} \frac{1}{4} \cdot l_3 \beta}{\mathfrak{Sin}\, 2\alpha_3}\right)$$
$$= -0{,}001\,237\,3 \cdot \frac{3904}{1{,}0786 \cdot 10^{-4}} (1 - 0{,}154\,11 - 0{,}003\,58) = -37\,722 \text{ tm}$$

3. Bild 6c

$$M_v (p) = \frac{p}{\beta^2} \left(1 - \frac{\mathfrak{Sin} \frac{3}{4} \cdot l_3 \beta + \mathfrak{Cof}\, b \beta \cdot \mathfrak{Sin} \frac{1}{4} \cdot l_3 \beta}{\mathfrak{Sin}\, 2\alpha_3}\right)$$
$$= \frac{15}{1{,}0786 \cdot 10^{-4}} (1 - 0{,}154\,11 - 39{,}20 \cdot 0{,}003\,58) = 98\,124 \text{ tm}$$

---

[8]) Zur Ermittlung von M_v braucht man X_2 und X_1 an sich nicht, nur X_{1p}.

Die Addition der obigen drei Werte liefert schließlich

$$\max M_v = -4165 - 37\,722 + 98\,124 = 56\,237 \text{ tm}.$$

Damit ist $\max M_v$ berechnet. Auf ähnliche Weise lassen sich auch die anderen Schnittgrößen ermitteln.

Bild 11 stellt die Kurve der größten Momente im Versteifungsträger dar. Zum Vergleich ist auch die max $|M|$-Linie[8]) des Systems mit starren Zwischenstützen[9]) aufgetragen. Aus der Gegenüberstellung der größten Momente aus der Berechnung erkennt man, daß sich der Wegfall der Zwischenstützen, rein statisch betrachtet, sowohl günstig als auch ungünstig auswirkt. Dem Vorteil eines Ausgleichs der Biegungsmomente in der Mittelöffnung und der Milderung der sonst beim Versteifungsträger mit Zwischenstützen auftretenden Momentenspitzen tritt der Nachteil entgegen, daß die größten Momente in den Seitenöffnungen zunehmen. Im großen und ganzen konnte der Wegfall der Zwischenstützen, vom Standpunkt der Momentenverteilung aus beurteilt, als vorteilhaft angesehen werden.

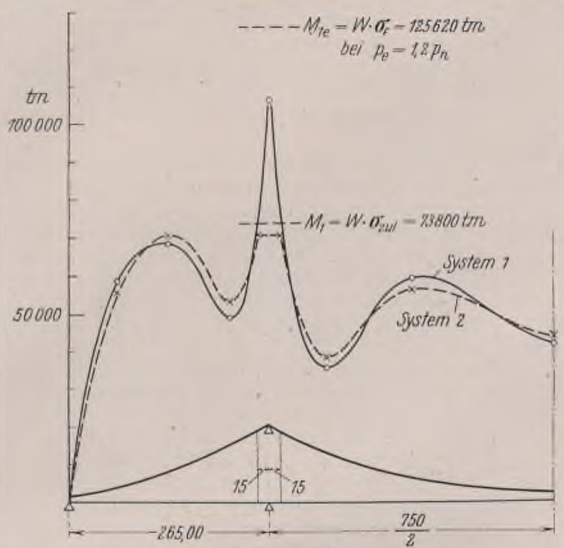


Bild 11. Max $|M|$ im Versteifungsträger.

Bei der Bemessung von Tragwerken, deren Momentenflächen dadurch charakterisiert sind, daß das Größtmoment sehr viel größer ist als das durchschnittliche Moment und sich auch nur auf eine verhältnismäßig kurze Länge des Balkens erstreckt, liegt es immer nahe, sich des tatsächlichen Verhaltens solcher Träger bei Laststeigerungen bis zur Traglast zu erinnern. Man kann über diesen Vorgang, der über die tatsächliche Sicherheit der Tragkonstruktion mehr aussagt als die übliche Bemessung gegen Erreichen der Fließgrenze, nur Aufschluß gewinnen, wenn man sich der vereinfachten Plastizitätstheorie bedient. Bekanntlich darf schon im Stahlhochbau (DIN 1050) der Durchlaufträger unter Berücksichtigung seiner tatsächlichen Tragfähigkeit bemessen werden. Die Hängebrücke eignet sich für diese Betrachtung insofern noch besonders, weil das Kabel bei einer solchen Untersuchung stets noch ein zusätzliches selbständiges Tragglied bildet, das vom Versagen des Versteifungsträgers im Sinne der Plastizitätstheorie unabhängig ist.

Wenn man danach die Vor- und Nachteile der beiden Systeme mit dem Maßstab der Sicherheit des Trägers gegen Erreichen der Traglast vergleicht, so kommt man, wie die anschließende Untersuchung zeigen wird, zu der ganz anderen Feststellung, daß der Versteifungsträger des Systems 1 wegen seiner zweifach statisch unbestimmten Lagerung (zwei Zwischenstützen) dem System 2 gegenüber ein höheres Tragvermögen besitzt, selbst wenn die Momentenspitzen des Trägers nicht durch $W\sigma_{zul}$ gedeckt werden. Das bedeutet gleichzeitig, daß den Momentenspitzen über den Stützen keine so große Bedeutung zukommt wie bei der üblichen Bemessung. Es soll auch nicht unterlassen werden, darauf hinzuweisen, daß im allgemeinen die Unterbringung der erforderlichen Laschenverstärkungen über den Zwischenstützen bei System 1 keine unüberwindlichen Schwierigkeiten bietet, zumal größere und stärker belastete Hängebrücken wohl immer mancher Vorteile wegen zweiwandige Versteifungsträger aufweisen.

Bild 12a stellt die Stellung der Nutzlast $p_n = 15$ t/m und die dazugehörige Momentenlinie für den Fall der größten Momentenspitze über der Stütze 1 $M_{1n} = -106\,300$ tm dar. Der Träger möge über den Stützen nicht mit diesem Biegungsmoment für σ_{zul} bemessen werden, sondern so, daß er beim Zuwachs der Last von p_n auf $p_e = 1{,}2\,p_n$ zu fließen beginnt. Hierfür ist die Momentenlinie im Bild 12b aufgetragen, und das Moment über der Stütze 1 beträgt $M_{1e} = -126\,520$ tm. Aus $M_{1e} = \sigma_F W$ ergibt sich mit $\sigma_F = 3600$ kg/cm² für St 52 das erforderliche Widerstandsmoment des Trägers über der Stütze zu

$$W = \frac{M_{1e}}{\sigma_F} = \frac{126\,520}{36\,000} = 3{,}514 \text{ m}^3 \text{ }^{10)}.$$

[9]) Im folgenden wird dieses System zum Unterschied von System 2, das keine Zwischenstützen aufweist, als System 1 bezeichnet.

[10]) Der Berechnung lag $J = 11$ m⁴ zugrunde. Hieraus ergibt sich also die Trägerhöhe zu

$$h = \frac{2\,J}{W} = \frac{2 \cdot 11}{3{,}514} = 6{,}26 \text{ m}.$$

Damit erhält man das Biegungsmoment, das für die Bemessung nach σ_{zul} maßgebend ist, zu

$$M_1 = W\sigma_{zul} = 3{,}514 \cdot 21\,000 = 73\,800 \text{ tm}$$

und die Spannung bei M_{1n} für p_n zu

$$\sigma_n = \frac{M_{1n}}{M_{1e}} \cdot \sigma_F = 0{,}840\,\sigma_F \qquad \text{oder} \qquad \frac{\sigma_F}{\sigma_n} = 1{,}19.$$

Wie man sieht, ist das Verhältnis σ_F zu σ_n (1,19) kleiner als p_e zu p_n (1,2), d. h. die Spannung nimmt langsamer zu als die Last, eine alleinige Folge der Theorie II. Ordnung.

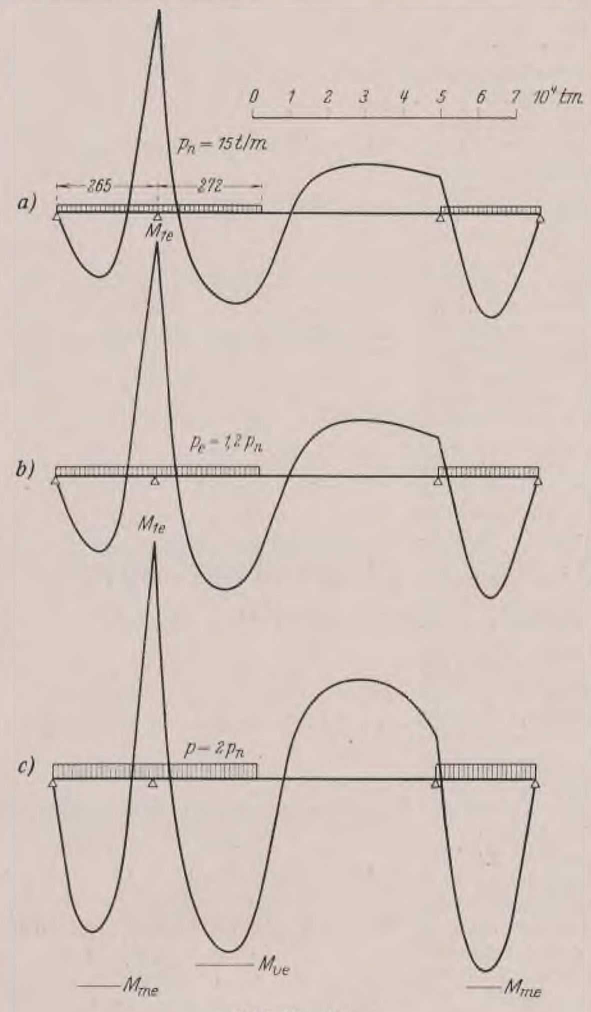


Bild 12a bis c.

Es soll nun untersucht werden, wie sich der Träger verhält, wenn die Last p nach dem Erreichen von p_e weiter zunimmt. Der Untersuchung sei ein idealplastisches Zugdehnungs-Diagramm zugrunde gelegt, wie es auch in der mathematischen Plastizitätstheorie üblich ist; eine Erörterung der Auswirkungen unterschiedlicher Spannungsdehnungslinien oberhalb der Fließgrenze und des Verfestigungseinflusses kann also unterbleiben. Das bedeutet, daß das Biegungsmoment M_{1e} bei der weiteren Laststeigerung konstant bleibt. Man kann mithin die Hängebrücke als eine solche behandeln, deren Versteifungsträger über der Stütze 1 ein Gelenk aufweist und dabei links und rechts von der Stütze 1 durch ein äußeres Moment M_{1e} beansprucht ist. Ein solches System wurde für die Belastung $p = 2\,p_n$ untersucht. Die hierzu gehörige Momentenlinie ist im Bild 12c aufgetragen. Wie aus der Momentenlinie ersichtlich ist, kann man die Last noch über $2\,p$ steigern. Denn erst wenn die Momentenlinie in zwei weiteren Punkten — im vorstehenden Fall wird es etwa im Viertelpunkt der Mittelöffnung und in der Mitte der rechten Seitenöffnung zu erwarten sein — das Biegungsmoment M_e erreicht, bei dem der Querschnitt zu fließen beginnt, ist der Träger labil und sein Tragvermögen erschöpft.

Wir haben die Untersuchung für den Fall, wenn der Querschnitt über der Stütze bei $p_e = 1{,}2\,p_n$ schon zu fließen anfängt, durchgeführt und sind zu dem Ergebnis gekommen, daß die Traglast $p_{max} > 2\,p_n$ ist. Wird man andere Lastfälle, bei denen sich $\max M_n$ in den Öffnungen ergibt, untersuchen, so ist es auch klar, daß nach dem Erreichen M_e[11]) $= 1{,}71 \max M_n$

[11]) Die Querschnitte in den Öffnungen seien mit ihren größten Momenten nach σ_{zul} bemessen, so daß es angenommen wird

$$M_e = \frac{\sigma_F}{\sigma_{zul}} \cdot \max M_n = 1{,}71 \max M_n.$$

Demnach ist das Trägheitsmoment im Gegensatz zu dem der Berechnung zugrunde gelegten nicht über die ganze Trägerlänge konstant, und infolgedessen wird die im Bild 11 aufgetragene max M-Kurve eine kleine Änderung erfahren, was wir aber in unseren Betrachtungen nicht berücksichtigen wollen.

noch eine weitere Laststeigerung möglich ist, weil das Tragvermögen des Trägers nicht durch das Fließen an einer Stelle, sondern durch das Fließen an drei verschiedenen Stellen beschränkt ist. Anders verhält sich aber der Versteifungsträger des Systems 2. Er ist ein einfacher Träger und gerät schon beim Erreichen des Fließens an einer Stelle in den labilen Zustand. Das Biegungsmoment M_e bedeutet also im Sinne unserer Betrachtung gleichzeitig sein größtes Tragmoment. Hierbei ist von dem selbständigen Sicherheitsbeitrag des Kabels abgesehen, der für beide Systeme gleichermaßen zur Geltung käme.

Die vorgehende Untersuchung hat zur Genüge gezeigt, daß das System 1 hinsichtlich der Sicherheit gegen Traglast dem System 2 überlegen ist, wobei der Querschnitt des Trägers über den Stützen im ersten Fall nur mit einem um 5,4% größeren Biegungsmoment (73 800 tm gegenüber 70 000 tm im System 2) bemessen zu werden braucht. Es sei jedoch bemerkt, daß sich die angestellte Untersuchung nur auf die statische Beanspruchung bezieht. Hinsichtlich der Dauerfestigkeit bei genieteten Trägern mit Nietlöchern in den äußersten Gurtplatten kann sich die Plastizität nicht so günstig auswirken[12]. Es ist also zu untersuchen, inwieweit bei einer Hängebrücke die Bemessung des Versteifungsträgers auf Dauerfestigkeit überhaupt in Betracht kommt.

Die vorstehende Vergleichsbetrachtung über die Tragfähigkeit eines Trägers unter Berücksichtigung der Plastizität des Materials wollen wir noch an einem einfacheren Beispiel, einem gewöhnlichem Durchlaufbalken, erläutern.

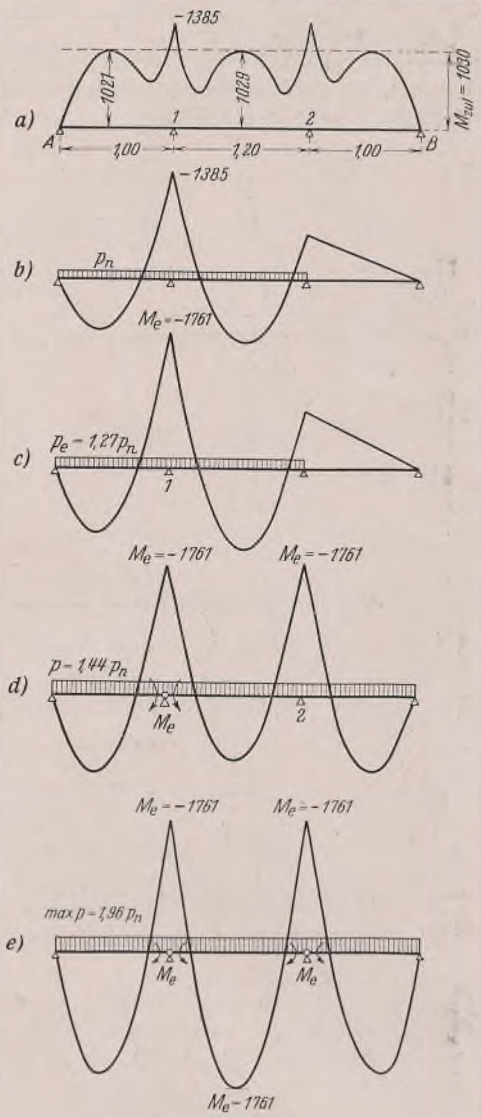


Bild 13a bis e.

Bild 13a stellt die Kurve der größten Momente infolge der gleichmäßig verteilten beweglichen Nutzlast p_n eines Durchlaufträgers dar. Der Träger sei überall gleich stark nach $M_{zul} = W \sigma_{zul} = 1030$ bemessen, so daß die Stützmomente nicht voll gedeckt sind. Zur Untersuchung der Tragfähigkeit des Balkens gehen wir vom ungünstigsten Lastfall des größten Stützmoments im Punkt 1 aus. Die Laststellung p_n und die dazugehörige Momentenlinie sind im Bild 13b dargestellt. Läßt man die Laststärke im Bild 13b zunehmen, so wird das Stützmoment bei $p_e = 1,27\,p_n$ den Grenzwert $M_e = 1,71\,M_{zul} = 1761$ erreichen, bei dessen Überschreitung der Querschnitt über der Stütze 1 zu fließen beginnt, d. h. M_e ist das größte Biegungsmoment, dem der Trägerquerschnitt überhaupt noch einen Widerstand leisten kann. Von diesem Grenzzustand ab kann der Träger nach Bild 13d behandelt werden, indem man über der Stütze 1 ein Gelenk einschaltet und dafür das Moment M_e anbringt. Für dieses System ist die im Bild 13d skizzierte Laststellung die ungünstigste. Bei $p = 1,44\,p_n$ erreicht der Querschnitt über der Stütze 2 den Grenzzustand, und der Träger geht in das im Bild 13e skizzierte statisch bestimmte System über. Geht man nun weiter mit der Laststeigerung, so fließt auch der Querschnitt in der Mitte der Mittelöffnung bei $\max p = 1,96\,p_n$, und der Träger gerät in den labilen Zustand, so daß sein Tragvermögen als erschöpft angesehen werden kann.

Die Festlegung eines Sicherheitsgrades gegen Fließen oder Erreichen der Traglast wird natürlich auch von dem Durchbiegungsnachweis bestimmt, der für die Nutzlast nach der Elastizitätstheorie durchzuführen ist.

[12]) K. Klöppel, Schlußbericht der I.V.B.H. 1936, S. 77.

Schlußbemerkung.

Das im ersten Teil dieser Arbeit mitgeteilte Berechnungsverfahren für Hängebrücken ist auch für andere ungewöhnliche Stützbedingungen des Versteifungsträgers anwendbar. So z. B., wenn der durchlaufende Versteifungsträger unter den Pylonen elastisch aufgelagert würde, um nur einen Teil des Auflagerdruckes aufzunehmen, der bei starrer Stützung an diesen Stellen entstehen würde. Auch bei Einspannungen der Versteifungsträger in den Widerlagern kommt man mit dem Berechnungsverfahren zum Ziele.

Zu den Voraussetzungen des entwickelten Berechnungsverfahrens gehört auch die Vernachlässigung der Biegesteifigkeit des Kabels. Diese Annahme ist allen Berechnungen von Hängebrücken gemeinsam. Ihre Zulässigkeit ist nach dem Stand unseres Wissens aber nur auf Grund der Erfahrungen zu rechtfertigen. Wenn also Systeme verwendet werden, die sich hinsichtlich der Beanspruchung der Kabelbiegung wesentlich von den bestehenden Hängebrücken unterscheiden, so ist es wohl unumgänglich, die Frage aufzuwerfen, ob auch in diesem Falle diese übliche Annahme, die Biegesteifigkeit des Kabels zu vernachlässigen, ohne weiteres zulässig ist. Dabei bleibt dahingestellt, ob wir überhaupt imstande sind, auf theoretischem oder experimentellem Wege diese Frage zu klären. Ganz besondere Beachtung verdient dieser Punkt, wenn es sich um eine Hängebrücke handelt, die starken Dauerbeanspruchungen, etwa durch Eisenbahnverkehr, unterworfen ist. Von diesem Standpunkt aus gesehen, ist das System 2 dem System 1 gegenüber im Nachteil, denn das Kabel wird in den ersten Hängestangen nach den Pylonen wahrscheinlich stärker auf Biegung beansprucht werden als über dem Kabelsattellager oder dem Umlenkungslager, wo sonst bei Hängebrücken nach System 1 die ungünstigsten Beanspruchungen des Kabels auftreten. In diesem Zusammenhang verdient ferner der Umstand Beachtung, daß die im Ingenieurlaboratorium der T. H. Darmstadt durchgeführten Modellversuche mit dem System 2 klar erkennen ließen, daß bei bestimmten Belastungsfällen die den Pylonen benachbarten Hängeseile nicht mehr auf Zug beansprucht werden. Bedenkt man ferner, daß an sich die Belastung eines solchen Hängeseiles im System 2 wesentlich größer ist als bei System 1, so wird auch seine konstruktive Durchbildung Schwierigkeiten bereiten, denn die Dicke des Hängeseiles ist dann durch die Biegsamkeit begrenzt, die die Umschlingung der Kabelschelle erfordert.

Es drängt sich die Frage nach einem Vergleich der Durchbiegungen beider Tragsysteme auf. Eine solche Berechnung, die hier aus Gründen der Raumersparnis nicht wiedergegeben werden kann, lieferte für die Durchbiegung der Viertelspunkte in der Mittelöffnung folgende Werte:

System 1: $\eta_v = 3,866$ m

System 2: $\eta_v = 3,751$ m.

Der Unterschied beträgt $\Delta\eta_v = 3\,\%$. Hinsichtlich der Größe der Durchbiegungen sind also beide Systeme nahezu gleichwertig. Die Krümmungen des Versteifungsträgers sind natürlich nach diesem Ergebnis bei System 1 größer. Von größerer Wichtigkeit dürfte aber für manche Hängebrücken (z. B. mit Eisenbahnverkehr) der Vergleich der „Weichheit" beider Systeme sein, worunter ohne nähere Begriffsformulierung die Ausbildung von Schwingungen des Trägers bei einer Zugüberfahrt verstanden sein soll.

Bei der vorliegenden Betrachtung kam es nicht darauf an, alle Vor- und Nachteile der beiden Systeme zu vergleichen, denn es müßte dann natürlich auch noch auf konstruktive Fragen eingegangen werden, die vor allem bei großen Hängebrücken für die Ausführbarkeit gewisser Konstruktionsteile von ausschlaggebender Bedeutung sind. Es sei also ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die auf den Berechnungsergebnissen durchgeführte Gegenüberstellung keinesfalls erschöpfend ist.

INHALT: Professor W. Rein 60 Jahre alt. — Beitrag zum Hängebrückenproblem. — Hängebrücken mit besonderen Stützbedingungen des Versteifungsträgers.

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt. — Verlag: Wilh. Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W 9. Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

DER STAHLBAU

Schriftleitung:
Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule
Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599
Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61
Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage zur Zeitschrift **DIE BAUTECHNIK** Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

13. Jahrgang | BERLIN, 1. November 1940 | Heft 23/24

In sich verankerte Hängebrücken mit waagerecht festgehaltenem Gurtscheitel.

Von Prof. Dr. Friedrich Hartmann, Wien.

Die großen Biegemomente und Verformungen der Hängebrücken bei einseitiger Belastung sind in der waagerechten Verschiebung des Hängegurtscheitels begründet, die zur Folge hat, daß sich der Gurt und mit ihm der Träger einer Brückenhälfte hebt, in der anderen senkt. Im folgenden wird untersucht, welche Wirkung eine feste Verbindung des Gurtscheitels mit dem Träger hat. Durch diese Verbindung ergibt sich bei einseitiger Belastung eine neue statisch unbestimmbare innere Kraft Y zwischen Gurt und Träger, die natürlich waagerecht wirkt. Bei der in sich selbst verankerten Hängebrücke entstehen hierdurch keinerlei waagerechte Stützkräfte, hingegen in einer Brückenhälfte eine Vergrößerung des Druckes im Träger. Die Biegemomente in den Viertelpunkten werden aber beträchtlich verringert, wenn der Gurtscheitel nicht zu hoch über dem Träger liegt. Bei symmetrischer Belastung ist natürlich $Y=0$.

Bei Hängebrücken, deren Gurt in besonderen Widerlagern verankert ist, brächte die Verbindung von Gurtscheitel und Träger keinerlei Vorteile, sondern nur Nachteile, über die am Schlusse dieser Abhandlung berichtet wird.

Im folgenden wird eine Hängebrücke nach Bild 1 für halbseitige Belastung behandelt. Sie ist zweifach statisch unbestimmt nach H und Y. Zur Abkürzung wird der statisch bestimmte Fall mit $Y=0$, $H=0$ (durchschnittener Gurtscheitel) als Tragwerk I, der einfach statisch unbestimmte Fall ($H=H_0$, $Y=0$) als Tragwerk II und der hier zu behandelnde Fall mit H und Y als Tragwerk III bezeichnet. Die Verankerung des Gurtes erfolgt im Abstand c unterhalb der Trägerschwerachse. In gleicher Höhe liegen die Gelenke, mit denen die Träger an den Pylonen verbunden sind.

1. Berechnung des Tragwerks II ($H=H_0$, $Y=0$) als Grundtragwerk für den Fall III. Es handelt sich also hier um die gewöhnliche Hängebrücke. Durchschneidet man den Gurtscheitel (Tragwerk I), so erhält man die Elastizitätsgleichung für Tragwerk II:

$$(1)\qquad H_0\,\delta_{hh}+\delta_{hp}+\delta_{ht}=0,\qquad H_0=-\frac{\delta_{hp}+\delta_{ht}}{\delta_{hh}}.$$

Die δ sind gegenseitige Verschiebungen der Schnittstellen, positiv bei Überschiebung, also z. B. für zwei Zugkräfte 1 (Hilfsangriff). Beziehen sich $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ auf die Belastung p, $\overline{\mathfrak{M}}$ und $\overline{\mathfrak{N}}$ auf den Hilfsangriff im Tragwerk I, so ist

$$(2)\qquad H_0=-\frac{\int\frac{\overline{\mathfrak{M}}\,\mathfrak{M}\,dx}{EJ}+\int\frac{\overline{\mathfrak{N}}\,\mathfrak{N}\,ds}{EF}+\int\overline{\mathfrak{N}}\,\alpha\,t\,s}{\int\frac{\overline{\mathfrak{M}}^2\,dx}{EJ}+\int\frac{\overline{\mathfrak{N}}^2\,ds}{EF}}.$$

Da Momente nur im Träger entstehen, ist hierfür ds durch dx ersetzt worden. Der Einfluß der Längenänderungen der Pylonen und Hängestangen wird wie üblich vernachlässigt. Der Hängegurt ist parabolisch $\left(\text{allgemein } y=\frac{4fx(l-x)}{l^2}\right)$. Man erhält mit

$$(3)\qquad \overline{\mathfrak{M}}=-1\,(y+c)\qquad \overline{\mathfrak{M}}^2=y^2+2\,y\,c+c^2$$

$$(4)\qquad j=\frac{J}{J_1}$$

$$\text{allg}\ldots\int_0^l\overline{\mathfrak{M}}^2\,dx=\frac{8f^2l}{15}+\frac{4}{3}\cdot f\,l\,c+c^2\,l$$

und daher für alle Felder

$$(5)\qquad \int\frac{\overline{\mathfrak{M}}^2\,dx}{EJ}=\frac{8f^2l}{15\,EJ}\left(1+2j\cdot\frac{f_1^2\,l}{f^2\,l}\right)+\frac{4flc}{3\,EJ}\left(1+2j\cdot\frac{f_1\,l_1}{f\,l}\right)+\frac{c^2}{EJ}\,(l+2j\,l_1).$$

Der Hilfsangriff $H_0=1$ bewirkt im Gurt die Zugkraft $\overline{\mathfrak{N}}=1\cdot\frac{ds}{dx}$ und im Träger die Druckkraft $\overline{\mathfrak{N}}=-1$.

Für den Gurt ist also, wenn $\mathfrak{L}$ die ganze Gurtlänge bedeutet:

$$(6)\qquad \int_0^{\mathfrak{L}}\frac{\overline{\mathfrak{N}}^2\,ds}{EF}=\int_0^{\mathfrak{L}}\left(\frac{ds}{dx}\right)^2\frac{ds}{EF_G}=\int_0^{\mathfrak{L}}\left(\frac{ds}{dx}\right)^3\frac{dx}{EF_G}.$$

F_G ist der Gurtquerschnitt. Bei Kabeln ist $F_G=F_{ka}$ unveränderlich. Bei Spiraldrahtkabeln ist das Dehnmaß $E_{ka}<(E=2100\ \text{t/cm}^2)$. Bei Ketten ist $F_G=F_{ke}\cdot\frac{ds}{dx}$ veränderlich mit F_{ke} als Scheitelquerschnitt.

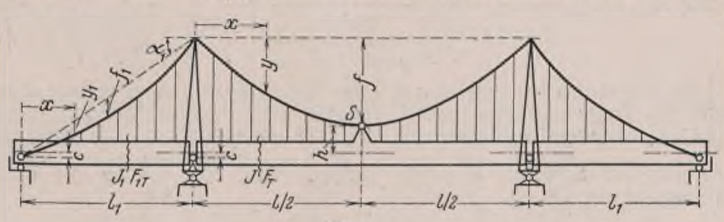


Bild 1.

Man hat somit zu unterscheiden:

$$(7)\qquad \text{für Kabel:}\int_0^{\mathfrak{L}}\frac{\overline{\mathfrak{N}}_{ka}^2\,ds}{EF}=\frac{1}{E_{ka}\,F_{ka}}\int_0^{\mathfrak{L}}\left(\frac{ds}{dx}\right)^3dx=\frac{\mathfrak{L}_{ka}}{E_{ka}\,F_{ka}}$$

$$(8)\qquad \text{für Ketten:}\int_0^{\mathfrak{L}}\frac{\overline{\mathfrak{N}}_{ke}\,ds}{EF}=\frac{1}{EF_{ke}}\int\left(\frac{ds}{dx}\right)^2dx=\frac{\mathfrak{L}_{ke}}{EF_{ke}}.$$

Man erhält nach Bohny[1]) mit $n=\frac{f}{l}$ und $n_1=\frac{f_1}{l_1}$ und den Bezeichnungen nach Bild 1

$$(9)\qquad \mathfrak{L}_{ka}=l\left(1+8\,n^2+\frac{96}{5}\cdot n^4\right)+2\,l_1\left(\sec^3\alpha_1+\frac{16}{3}\cdot n_1^2\right)$$

$$(10)\qquad \mathfrak{L}_{ke}=l\left(1+\frac{16}{3}\cdot n^2\right)+2\,l_1\left(\sec^2\alpha_1+\frac{16}{3}\cdot n_1^2\right).$$

Sind die Träger in den Seitenfeldern nicht angehängt, so ist $f_1=0$ und daher auch $n_1=0$ zu setzen.

Für den Träger mit den mittleren Querschnittsflächen F_T und F_{1T} ist

$$(11)\qquad \int\frac{\overline{\mathfrak{N}}^2\,ds}{EF}=\frac{l}{EF_T}+\frac{2\,l_1}{EF_{1T}}.$$

Somit wird der Nenner von Gl. (2) allgemein

$$(12)\qquad \int\frac{\overline{\mathfrak{M}}^2\,dx}{EJ}+\int\frac{\overline{\mathfrak{N}}^2\,ds}{EF}=\frac{8f^2l}{15\,EJ}\left(1+2j\cdot\frac{f_1^2\,l}{f^2\,l}\right)+\frac{4flc}{EJ}\left(1+2j\cdot\frac{f_1\,l_1}{f\,l}\right)+\frac{c^2\,l}{EJ}\left(1+\frac{2j\,l_1}{l}\right)+\frac{\mathfrak{L}_k}{E_h\,F_k}+\frac{l}{EF_T}+\frac{2\,l_1}{EF_{1T}}.$$

a) Belastung der rechten Brückenhälfte mit p erzeugt im Tragwerk I die in Bild 2 dargestellten Momente $\mathfrak{M}$. H_0 ist für halbseitige Belastung halb so groß als für Vollbelastung. Im letzteren Falle verläuft sowohl $\mathfrak{M}$ als auch der Teil $(-y)$ von $\overline{\mathfrak{M}}$ [Gl. (3)] in allen Feldern parabolisch.

[1]) Bohny, Hängebrücken. Berlin 1934, Wilh. Ernst & Sohn.

Sind zwei Parabeln mit den Ordinaten η_1 und η_2, den Pfeilhöhen ζ_1 und ζ_2 bei gleicher Sehnenlänge a gegeben, so wird

$$(13)\qquad \int_0^a \eta_1 \eta_2 \, dx = \frac{8}{15} \cdot \zeta_1 \zeta_2 a.$$

In unserem Falle ist für das Mittelfeld $a = l$, $\zeta_1 = \frac{p l^2}{8}$, $\zeta_2 = -f$ [entsprechend $\overline{\mathfrak{M}}$ nach Gl. (3)], daher das entsprechende Integral für das Mittelfeld $-\frac{8}{15} \cdot \frac{p l^2}{8} \cdot f l = -\frac{p l^3 f}{15}$. Mit dem zweiten Teil $(-c)$ von $\overline{\mathfrak{M}}$ erhält man $-c \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{p l^2}{8} \cdot l = -\frac{p l^3 c}{12}$, im ganzen also für Vollbelastung

$$(14)\qquad \int \overline{\mathfrak{M}} \mathfrak{M} \, dx = -\left(\frac{p l^3 f}{15} + \frac{2 p l_1^3 f_1}{15} + \frac{p l^3 c}{12} + \frac{p l_1^3 c}{12}\right),$$

für halbseitige Belastung die Hälfte hiervon.

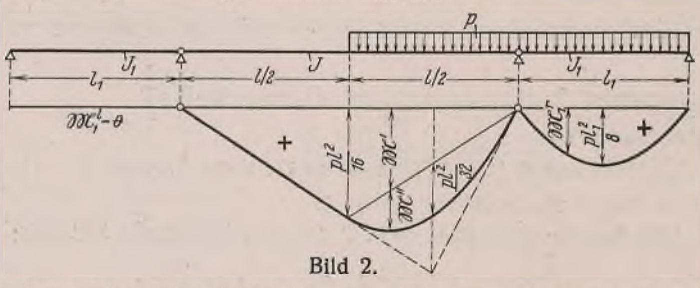


Bild 2.

Das zweite Zählerglied in Gl. (2) wird Null, weil die Belastung p im Tragwerk I keine Normalkräfte erzeugt, weil also $\mathfrak{N} = 0$ ist.

Man erhält somit, wenn Zähler und Nenner mit $\frac{15 EJ}{8 f^2 l}$ multipliziert werden,

$$(15)\qquad H_{op} = + \frac{\frac{p l^2}{16 f}\left(1 + 2j \cdot \frac{f_1 l_1^3}{f l^3}\right) + \frac{5 p l^2 c}{64 f^2}\left(1 + 2j \cdot \frac{l_1}{l}\right)}{1 + 2j \cdot \frac{f_1^2 l}{f^2 l} + \frac{5c}{2f}\left(1 + 2j \cdot \frac{f_1 l_1}{f l}\right) + \frac{15 c^2}{8 f^2}\left(1 + 2j \cdot \frac{l_1}{l}\right) + \frac{15 EJ \mathfrak{L}_k}{8 E_k F_k f^2 l} + \frac{15}{8 f^2}\left(\frac{J}{F_T} + \frac{2 J l_1}{F_{1T} l}\right)}.$$

b) Wärmeänderung erzeugt nur Spannungen, wenn verschiedene Teile des Tragwerks verschieden erwärmt sind. Das ist der Fall, wenn der Gurt, von der Sonne bestrahlt, um $\varDelta t^\circ$ wärmer ist als der unter der Fahrbahn im Schatten liegende Träger. Mit $\overline{\mathfrak{N}} = \frac{ds}{dx}$ ist das dritte Zählerglied der Gl. (2)

$$(16)\qquad \int \overline{\mathfrak{N}} \alpha t s = \alpha \varDelta t \int_0^{\mathfrak{L}} \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 dx = \alpha \varDelta t \mathfrak{L}_t.$$

Nach Gl. (8) ist

$$(16a)\qquad \mathfrak{L}_t = \mathfrak{L}_{ke}.$$

Bezeichnet man den Nenner von Gl. (15) mit N_0, so ist

$$(17)\qquad H_{ot} = -\frac{15 EJ \alpha \varDelta t \mathfrak{L}_{ke}}{8 f^2 l N_0}.$$

2. Berechnung des Tragwerks III. Bei fester Verbindung zwischen Gurtscheitel S und Träger entsteht im Scheitel eine waagerechte innere Kraft Y, die bei rechtsseitiger Belastung am Gurt nach links, am Träger nach rechts wirkt. Löst man die Verbindung, so entsteht Tragwerk II mit den getrennten Punkten S_G (Gurt) und S_T (Träger) nach Bild 3. Ist bei rechtsseitiger Belastung p die gegenseitige Verschiebung dieser Punkte δ_{yp} und unter der Wirkung des Hilfsangriffs $Y = 1$ (zwei entgegengesetzt wirkende Kräfte 1 in S_G und S_T nach Bild 3) δ_{yy}, so ist

$$(18)\qquad Y = -\frac{\delta_{yp}}{\delta_{yy}}.$$

Dabei sind beide δ positiv gedacht, wenn S_G links von S_T liegt.

a) Berechnung der Momente und Normalkräfte für den Hilfsangriff $Y = 1$ im Tragwerk II (Bild 3).

Im Gurt wird in der rechten Hälfte eine Zugkraft wirken, deren waagerechte Seitenkraft $+H_0''$ sei, während in der linken Hälfte eine Druckkraft mit $-H_0'$ vorhanden ist. Diese Kräfte übergehen an den Enden des Gurtes mit entgegengesetztem Vorzeichen in den Träger und finden in Brückenmitte durch die in S_T wirkende Kraft 1 ihren Ausgleich. Das feste Lager des Trägers (im linken Pylon) erhält hiervon keine waagerechte Kraft. Wirkt im parabolischen Hängegurt allgemein eine Zugkraft H, so entstehen in den Hängestangen Kräfte, die man als gleichmäßig verteilt ansehen darf, und die für die Längeneinheit sind:

$$(19)\qquad \text{im Mittelfeld } s = \frac{8 H f}{l^2}, \text{ im Seitenfeld } s_1 = \frac{8 H f_1}{l^2}.$$

Ist H eine Zugkraft, so wirken die s am Gurt nach abwärts, am Träger nach aufwärts, bei Druck entgegengesetzt (Bild 3). Das Tragwerk ist für

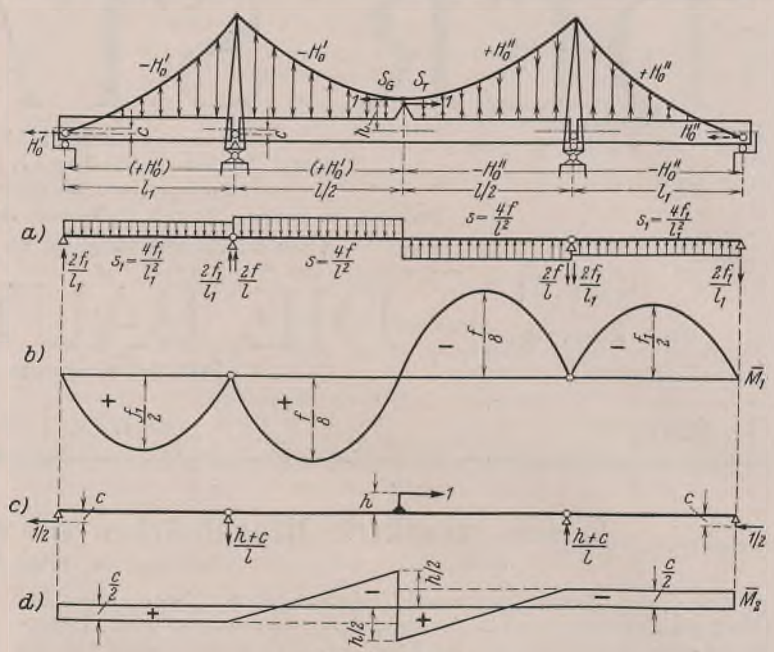


Bild 3a bis d.

die gegebene Belastung nach Bild 3 einfach statisch unbestimmt nach H. Durchschneidet man in S_G und bringt die eine Hälfte der in S_G wirkenden Kraft 1 an der linken, die andere Hälfte an der rechten Gurthälfte an, so ist im linken Teil $H_l = -\frac{1}{2}$, im rechten Teil $H_r = +\frac{1}{2}$ wirksam. Eine gegenseitige Verschiebung der beiden Gurtteile in S_G findet nicht statt, weil sich beide Hälften um dasselbe Maß nach links verschieben. Es ist daher in Gl. (3) $\delta_{hp} = 0$ und daher auch die statisch unbestimmbare Kraft $H = 0$, so daß im Tragwerk II dieselben Gurtkräfte wirken wie im Tragwerk I. Es ist also

$$(20)\qquad -H_0' = -\frac{1}{2}, \quad +H_0'' = +\frac{1}{2}.$$

Die Hängestangenkräfte sind für die Längeneinheit nach Gl. (19) links $s = +\frac{4f}{l^2}$ und $s_1 = \frac{4 f_1}{l_1^2}$, rechts $s = -\frac{4f}{l^2}$ und $s_1 = -\frac{4 f_1}{l_1^2}$; das positive Zeichen bedeutet, daß die s am Träger nach abwärts wirken (Bild 3a). Die Biegemomente $\overline{M}_1$ verlaufen parabolisch nach Bild 3b.

Auf den Träger wirken jedoch noch die außerhalb der Achse angreifenden Normalkräfte, wodurch die Momente $\overline{M}_2$ im Tragwerk I entstehen, die auch für Tragwerk II gelten, da dieses dieselben Gurtkräfte hat wie I (Bild 3c u. 3d).

b) Berechnung der gegenseitigen Verschiebung δ_{yp} [Gl. (18)] im Tragwerk II.

$$(21)\qquad \delta_{yp} = \int \frac{\overline{M} \mathfrak{M} \, dx}{EJ} + \int \frac{\overline{N} \mathfrak{N} \, ds}{EF}.$$

Die Momente vom Hilfsangriff sind $\overline{M} = \overline{M}_1 + \overline{M}_2$. Die Momente der Belastung $\mathfrak{M}$ dürfen bekannterweise auch dem statisch bestimmten Tragwerk I entnommen werden. Es sind dies die $\mathfrak{M}$ nach Bild 2, die im Mittelfeld gespalten werden in $\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''$. Spaltet man auch $\overline{M}_2$ in $\overline{M}_2' + \overline{M}_2''$ nach Bild 4b u. c, so ist

$$\int \overline{M} \mathfrak{M} \, dx = \int (\overline{M}_1 + \overline{M}_2' + \overline{M}_2'')(\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'') \, dx$$
$$= \int (\overline{M}_1 \mathfrak{M}' + \overline{M}_1 \mathfrak{M}'' + \overline{M}_2' \mathfrak{M}' + \overline{M}_2' \mathfrak{M}'' + \overline{M}_2'' \mathfrak{M}' + \overline{M}_2'' \mathfrak{M}'') \, dx.$$

Bild 4 zeigt alle in Betracht kommenden Momente.

Da im linken Seitenfeld $\mathfrak{M} = 0$ ist, entfällt das entsprechende Glied. Für das Mittelfeld sind alle Kombinationen Null, in denen symmetrische mit antimetrischen Momentenlinien verbunden sind, also $\overline{M}_1 \mathfrak{M}'$, $\overline{M}_2' \mathfrak{M}'$ und $\overline{M}_2'' \mathfrak{M}'$. Daher ist

$$\int \overline{M} \mathfrak{M} \, dx = \int_0^{l/2} \overline{M}_1 \mathfrak{M}'' \, dx + \int_0^{l/2} \overline{M}_2' \mathfrak{M}'' \, dx + \int_0^{l/2} \overline{M}_2'' \mathfrak{M}'' \, dx + \int_0^{l_1} \overline{M}_1 \mathfrak{M}_1'' \, dx$$
$$+ \int_0^{l_1} \overline{M}_2' \mathfrak{M}_1^r \, dx.$$

Die Integrale lassen sich durchweg in der Form $\mu \zeta_1 \zeta_2 a$ darstellen, wenn ζ die größten Ordinaten der betreffenden Momentenlinien sind, a die Längen, über die integriert wird, und μ einen Zahlenwert bedeutet. Bild 5 gibt eine Darstellung der Kombinationen mit den μ-Werten.

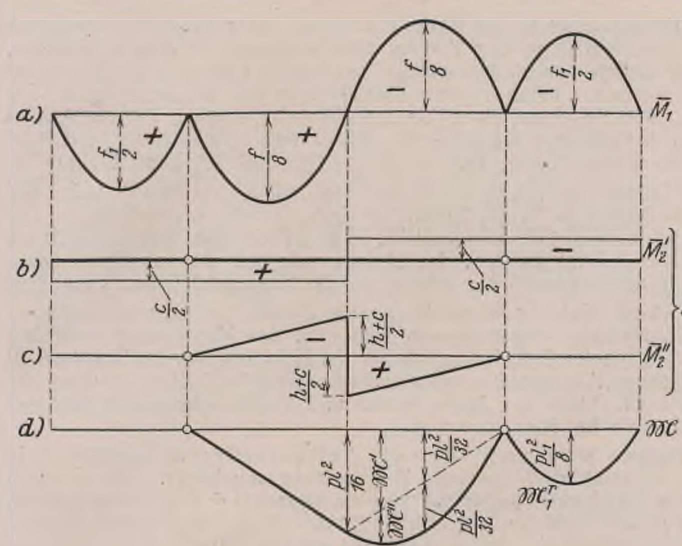


Bild 4a bis d.

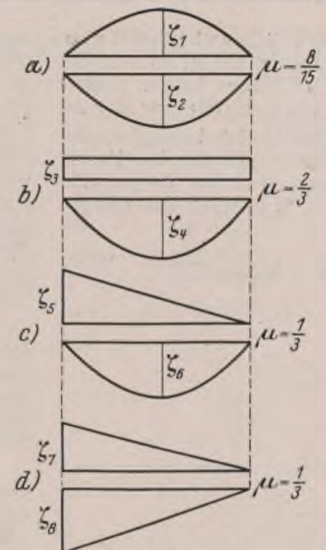


Bild 5a bis d.

Damit wird

$$\int \overline{M}\,\mathfrak{M}\,dx = -\frac{8}{15}\cdot\frac{f}{8}\cdot\frac{p\,l^2}{32}\cdot\frac{l}{2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{p\,l^2}{32}\cdot\frac{l}{2}$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}+\frac{c}{2}\right)\frac{p\,l^2}{32}\cdot\frac{l}{2} - \frac{8}{15}\cdot\frac{f_1}{2}\cdot\frac{p\,l_1^2}{8}\cdot l_1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{p\,l_1^2}{8}\cdot l_1$$
$$= -\frac{p\,l^3 f}{960}\left(1-\frac{5(h-c)}{2f}+\frac{32 f_1 l_1^3}{f\,l^3}+\frac{40\,c\,l_1^3}{f\,l^3}\right).$$

Das zweite Integral in Gl. (21) ist Null, weil im Tragwerk I für Belastung p die Normalkräfte $\mathfrak{N} = 0$ sind.

Somit ist

$$(22)\qquad \delta_{yp} = -\frac{p\,l^3 f}{960\,E\,J}\left(1-\frac{5(h-c)}{2f}+32\,j\cdot\frac{f_1 l_1^3}{f\,l^3}+40\,j\cdot\frac{c\,l_1^3}{f\,l^3}\right).$$

c) **Berechnung der gegenseitigen Verschiebung** δ_{yy} **im Tragwerk II.**

$$(23)\qquad \delta_{yy} = \int\frac{\overline{M}^2\,dx}{E\,J}+\int\frac{\overline{N}^2\,ds}{E\,F}$$

$$\int\overline{M}^2\,dx = \int(\overline{M}_1+\overline{M}_2'+\overline{M}_2'')^2\,dx$$
$$= \int\left(\overline{M}_1^2+\overline{M}_2'^2+\overline{M}_2''^2+2\,\overline{M}_1\,\overline{M}_2'+2\,\overline{M}_1\,\overline{M}_2''+2\,\overline{M}_2'\,\overline{M}_2''\right)dx$$
$$= 2\cdot\frac{8}{15}\left(\frac{f}{8}\right)^2\frac{l}{2}+2\left(\frac{c}{2}\right)^2\frac{l}{2}+2\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}+\frac{c}{2}\right)^2\frac{l}{2}$$
$$+4\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{f}{8}\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{l}{2}-4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{f}{8}\left(\frac{h}{2}+\frac{c}{2}\right)\frac{l}{2}$$
$$-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{2}\left(\frac{h}{2}+\frac{c}{2}\right)\frac{l}{2}+2\cdot\frac{8}{15}\left(\frac{f_1}{2}\right)^2 l_1+2\left(\frac{c}{2}\right)^2 l_1$$
$$+2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{f_1}{2}\cdot l_1 = \frac{f^2 l}{120}\left(1-\frac{5h}{f}+\frac{10h^2}{f^2}+\frac{32 f_1^2 l_1}{f^2 l}\right)$$
$$+\frac{c^2 l}{12}\left(1+\frac{f-2h}{2c}+\frac{6 l_1}{l}+\frac{4 f_1 l_1}{c\,l}\right).$$

Im zweiten Glied der Gl. (23) ist für den Gurt nach Bild 3 und Gl. (20) $N^2 = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{ds}{dx}\right)^2$ und für den Träger $\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

$$\int\frac{\overline{N}^2\,ds}{E\,F} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\mathfrak{L}_k}{E_k\,F_k}+\frac{1}{4}\left(\frac{l}{E\,F_T}+\frac{2\,l_1}{E\,F_{1T}}\right).$$

Nun erhält man

$$\delta_{yy} = \frac{f^2 l}{120\,E\,J}\left[\left(1-\frac{5h}{f}+\frac{10h^2}{f^2}+32\,j\cdot\frac{f_1^2 l_1}{f^2 l}\right)\right.$$
$$+\frac{10\,c^2}{f^2}\left(1+\frac{f-2h}{2c}+\frac{6\,j\,l_1}{l}+\frac{4\,j\,f_1 l_1}{c\,l}\right)+\frac{30\,E\,J\,\mathfrak{L}_k}{E_k\,F_k\,f^2 l}$$
$$\left.+\frac{30}{{}^2}\left(\frac{J}{F_T}+\frac{2\,J\,l_1}{F_{1T}\,l}\right)\right].$$

d) **Berechnung von** Y.

Nach Gl. (18) ist, nach Multiplikation von Zähler und Nenner mit $\frac{120\,EJ}{f^2 l}$

$$(24)\qquad Y_p = \frac{\frac{p\,l^2}{8f}\left(1-\frac{5(h-c)}{2f}+\frac{32\,j\,f_1 l_1^3}{f\,l^3}+\frac{40\,j\,c\,l_1^3}{f\,l^3}\right)}{1-\frac{5h}{f}+\frac{10h^2}{f^2}+32\,j\cdot\frac{f_1^2 l_1}{f^2 l}+\frac{10c^2}{f^2}\left(1+\frac{f-2h}{c}+\frac{6\,j\,l_1}{l}+\frac{4\,j\,f_1 l_1}{c\,l}\right)+\frac{30\,E\,J\,\mathfrak{L}_k}{E_k\,F_k\,f^2 l}+\frac{30}{f^2}\left(\frac{J}{F_T}+\frac{2\,J\,l_1}{F_{1T}\,l}\right)}.$$

Die Momente im Träger sind vom Eigengewicht

$$(25)\qquad M_g = -H_g\,c,$$

von halbseitiger Belastung

$$(26)\qquad M_p = \mathfrak{M} - H_{op}(y+c) + Y\left(\overline{M}_1+\overline{M}_2\right).$$

Wärmewirkung. Gleichmäßige Wärmeänderung in allen Teilen bewirkt keine Spannungen, da das Tragwerk statisch bestimmt gelagert ist. Erwärmt sich der Hängegurt um $\Delta t°$ mehr als der Träger, so wirkt sich das in H_0 aus [(Gl. 17)]. Y wird hiervon nicht beeinflußt, denn ein Wärmeunterschied von $\Delta t°$ ist dasselbe, als wenn der Träger unerwärmt bliebe und nur der Gurt sich um $\Delta t°$ erwärmte. Im Tragwerk II erfährt dann der Träger und seine Lager keine waagerechte Verschiebung, und der Hängegurt verformt sich symmetrisch zur Brückenmitte. Der Gurtscheitel bleibt also auch in Ruhe. Da somit keine gegenseitige waagerechte Verschiebung der Punkte S_G und S_T stattfindet, ist $Y_t = 0$.

Beispiel. Kettenbrücke aus Stahl St 52, $l = 240$, $f = 24$, $l_1 = 60$ m, $f_1 = 0$ (Seitenfelder nicht angehängt), Trägerhöhe $h_T = 4$ m, $J = J_1 = 1{,}687$ m^4 ($j = 1$), $F_T = F_{1T} = 0{,}5141$ m^2 (in den Seitenfeldern sind noch Zwischenhauptträger vorhanden, die sich auf die Endquerträger stützen), $W_n = 0{,}7425$ m^3; $F_{ke} = 0{,}34$ m^2, $\mathfrak{L}_k = 398$ m, $h = 3{,}5$, $c = 0{,}18$ m (wird so gewählt, daß schließlich die größten positiven und negativen Momente, die hier nur für die Viertelpunkte berechnet werden, zahlenmäßig möglichst gleich groß werden), $H_g = 5250$ t, $p = 6{,}85$ tm.

Für Tragwerk II ist nach Gl. (15) für Belastung der rechten Trägerhälfte mit p

$$H_{op} = \frac{1027{,}5+14{,}5}{1+0{,}0188+0{,}0002+0{,}0268+0{,}0160} = \frac{1042}{1{,}062} = 981{,}3\text{ t};$$

Gl. (17) ergibt für $\Delta t = 15°$ $\quad H_{ot} = -\frac{34{,}4}{1{,}062} = -32{,}4$ t;

$$H_{o(p+t)} = 948{,}9\text{ t}.$$

Die größten positiven Momente sind mit $H_{o(p+t)}$, die größten negativen mit H_{op} zu berechnen. Man erhält im Mittelfeld für halbseitige Belastung (rechts):

$$M^o_{(p+t)3l/4} = \frac{p\,l^2}{16} - H_{o(p+t)}\left(\frac{3}{4}\cdot f+c\right) = 24\,660 - 948{,}9\cdot 18{,}18 = +7409\text{ tm}$$
$$M^o_{(p+t)\,l/2} = \frac{p\,l^2}{16} - H_{o(p+t)}(f+c) = 24\,660 - 948{,}9\cdot 24{,}18 = +1716\text{ „}$$
$$M^o_{p\,l/4} = \frac{p\,l^2}{32} - H_{op}\left(\frac{3}{4}\cdot f+c\right) = 12330 - 981{,}3\cdot 18{,}18 = -5510\text{ „}$$

Momente vom Eigengewicht: $M_g = -H_g\,c = -945$ tm;
Gesamtmomente:

$$(27)\qquad M^o_{3l/4} = +6464,\quad M^o_{l/2} = +771,\quad M^o_{l/4} = -6455\text{ tm}.$$

Für Tragwerk III ist nach Gl. (24)

$$(28)\qquad Y = \frac{2055\,(1-0{,}3460+0{,}0047}{1-0{,}729+0{,}213+0{,}055+0{,}429+0{,}256} = \frac{1354}{1{,}224} = 1106\text{ t}.$$

Die Momente im Mittelfeld sind nach Gl. (26) und Bild 4

$$M_{(p+t)3/4\,l} = M^o_{(p+t)3/4\,l} - Y\left(\frac{f}{8}-\frac{h-c}{4}\right) = 7409 - 1106\cdot 2{,}17 = +5009\text{ tm}$$
$$M_{(p+t)(l/2+0)} = M^o_{(p+t)\,l/2} + Y\cdot\frac{h}{2} = 1716 + 1106\cdot 1{,}75 = +3651\text{ „}$$
$$M_{p(l/2-0)} = M^o_{p\,l/2} - Y\cdot\frac{h}{2} = 932 - 1106\cdot 1{,}75 = -1003\text{ „}$$
$$M_{p\,l/4} = M^o_{p\,l/4} + Y\left(\frac{f}{8}-\frac{h-c}{4}\right) = -5510 + 1106\cdot 2{,}17 = -3110\text{ „}$$

Mit der Eigengewichtswirkung ist

$$(29)\qquad \begin{cases} M_{3l/4} = +4064 & M_{(l/2+0)} = +2706 \\ M_{(l/2-0)} = -1948 & M_{l/4} = -4055\text{ tm}. \end{cases}$$

Die feste Verbindung von Gurt und Träger in Brückenmitte setzt also unter den hier gegebenen Verhältnissen die Momente der gewöhnlichen Hängebrücke in den Viertelpunkten auf 63% ihres Wertes herab. Bild 6 zeigt den Verlauf der Momente im Mittelfeld. Die Vergrößerung der M gegenüber den M^0 in kurzer Strecke in Trägermitte ist belanglos, da dort die Momente für eine symmetrische Belastung (für die also $Y=0$ ist) von gleicher Größenordnung sind. Hingegen sind im Träger die Normalkräfte um $0{,}5\,Y$ größer als im Tragwerk II. Für unseren Belastungsfall ist in der rechten Trägerhälfte

$$N = H_g + H_{o\,(p+t)} + \frac{1}{2}\cdot Y = 5250 + 949 + 553 = 6752 \text{ t},$$

hingegen $N_o = 6199$ t.

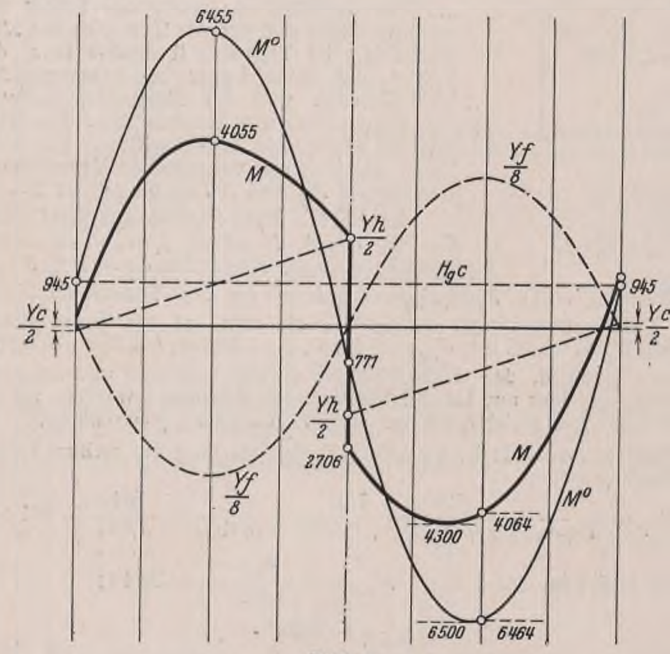


Bild 6.

Man erhält mit den Größtmomenten nach Bild 6 eine Randspannung

für Tragwerk II:

$$\sigma_o = \frac{6199}{0{,}5141} + \frac{6500}{0{,}7425} = 12\,060 + 8750 = 20\,810 \text{ t/m}^2 = \mathbf{2{,}08} \text{ t/cm}^2;$$

für Tragwerk III:

$$\sigma = \frac{6752}{0{,}5141} + \frac{4300}{0{,}7425} = 13\,130 + 5790 \text{ t/m}^2 = \mathbf{1{,}89} \text{ t/cm}^2.$$

Man könnte also den Träger nicht unbeträchtlich schwächer ausführen als für Tragwerk II. Der Hängegurt ist für Vollbelastung ($Y=0$) am stärksten beansprucht, erfordert also keine Verstärkung im Tragwerk III. In diesem ist für halbseitige Belastung

$$\max H = H_g + H_{op} + \frac{1}{2}\cdot Y = 5250 + 981 + 553 = 6784 \text{ t},$$

hingegen für Vollbelastung wie im Tragwerk II

$$\max H = H_g + H_{op}^v = 5250 + 1962 = 7212 \text{ t}.$$

Die Ersparnisse im Tragwerk III sind gegenüber Tragwerk II um so größer, je kleiner h angenommen wird, da die Momente $\bar{M}_2''$ (Bild 4) von h abhängen und belastend wirken. In unserem Beispiel ist die Trägerhöhe 4 m und $h=3{,}5$ m (Achsabstand Träger—Gurt). Nimmt man an, daß der Träger die Fahrbahn um 1,2 m überragt, dann liegt die Gurtachse im tiefsten Punkt 2,7 m über der Fahrbahn. Bei einer Breite der Kettenglieder von 1,2 m wäre der lichte Abstand zwischen Fahrbahn und Gurt 2,1 m, so daß der freie Blick in keiner Weise gestört ist. Zwischen Trägeroberkante und Gurtunterkante ist der lichte Abstand 0,9 m, vermindert um die Plattendicke des Trägers. Würde man sich entschließen, die Kette bis auf den Träger herabzuführen, so wäre $h=2{,}6$ m, $Y=1170$ t und die Momente mit Eigengewichtswirkung in den Viertelpunkten rund ± 3660 tm. Der freie Ausblick in Brückenmitte wäre dann mindestens einseitig (wenn Konsolen vorhanden sind) auf eine kurze Strecke behindert. Man könnte natürlich noch weiter gehen und den Gurt in der Mitte mit $h=0$ in den Träger einführen. Dann wäre $Y=1193$ t und die Momente in den Viertelpunkten rd. ± 2825 tm. In diesem Fall wären also sehr beträchtliche Ersparnisse zu erzielen. Das Aussehen dieser Brücke würde etwa der Krefelder Rheinbrücke entsprechen, obzwar die Art des Tragwerks dort eine andere ist. Auch die Verbindung zwischen Gurt und Träger wäre denkbar einfach. In unserem Beispiel mit $h=3{,}5$ m müßte man in Brückenmitte in die Kette ein kurzes Zwischenglied einschalten (Bild 7). An die Stege des Trägers sind beiderseits Platten anzunieten, die in die Kette eingeschoben werden, wo sie vier Lamellen des Zwischengliedes ersetzen. Diese Platten durchdringen die Obergurtplatten des Trägers und die Trägergurtwinkel werden an ihnen gestoßen. Die vier Platten haben in der obersten Nietreihe der Gurtwinkel das Moment $1106\cdot 1{,}56 = 1725$ tm aufzunehmen, was bei $\sigma_{zul}=2{,}1$ t/cm² $W_n = 82\,200$ cm³ erfordert. Daraus ergibt sich die Plattenlänge mit 2,5 m (Bild 7), wenn die Dicke der Platten je 23 mm (gleich der Kettenlamellendicke) beträgt. Die Platten wären natürlich auszusteifen. Das Brückenbild würde durch sie kaum beeinträchtigt werden. Im übrigen könnten sie auf Bronzetafeln Bilder aus der Baugeschichte zeigen und die Namen der Erbauer angeben.

Bei einem Kabelgurt müßte an die Blechtafeln eine entsprechend lange Kabelschelle angeschlossen sein, die das Kabel unverschieblich umfaßt. Es scheint jedoch fraglich, ob bei Kabelbrücken das Tragwerk III dem Tragwerk II gegenüber nennenswerte Vorteile bietet, da hier die Größtmomente mehr zur Mitte rücken und Vollbelastung viel größeren Einfluß hat als bei Kettenbrücken.

Schließlich wäre noch über die Seitenfelder zu sprechen. In unserem Beispiel sind hier die Träger nicht angehängt. Sie erhalten daher dem Tragwerk II gegenüber nur die Momente $\pm Y\cdot c/2$ nach Bild 4b und die Normalkräfte $\pm Y/2$ nach Bild 3c. Wenn Widerstandsmoment und Querschnittsfläche ebenso groß sind wie im Mittelfeld, so wäre die Randbiegespannung vom Moment $Y\cdot c/2 \ldots \sigma_1 = \frac{1106\cdot 0{,}09}{0{,}7425} = 134$ t/m², die Normalspannung von $Y/2 \ldots \sigma_2 = \frac{553}{0{,}5141} = 1076$ t/m². Da schon im Tragwerk II die große Druckkraft $H_g + H_{op}$ wirkt, ist die Randdruckspannung (oberer Rand) maßgebend. Die größere Zusatzspannung σ_2 ist bei rechtsseitiger Belastung im rechten Seitenfeld eine Druckspannung. Hingegen ist hier das Moment $Y\cdot c/2$ nach Bild 4b negativ, so daß am oberen Trägerrand eine Biegezugspannung σ_1 entsteht. Im ganzen erhält

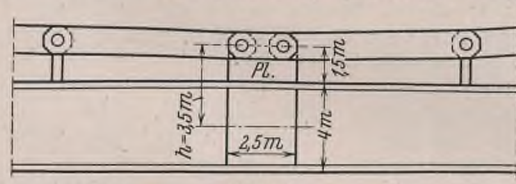


Bild 7.

man eine Mehrbelastung von $-(\sigma_2 - \sigma_1) = -942$ t/m² $= -0{,}094$ t/cm², die also sehr gering ist. Im übrigen wird man den Träger in den Seitenfeldern unsymmetrisch ausbilden, wodurch sich auch c ändert, und wird dieses und eine Sprengung des Trägers so bestimmen, daß die Wirkung davon möglichst günstig ist.

Wenn das hier behandelte Tragwerk auch nur in Sonderfällen anwendbar ist, kann es doch in solchen Fällen mit Vorteil angewandt werden.

Bei außen verankerten Hängebrücken müßte der Träger zur Aufnahme von Y (in S_T) ein festes Lager erhalten, was zur Folge hat, daß schon bei gleichmäßiger Erwärmung aller Teile eine Kraft Y_t entsteht. Das feste Lager könnte auf einem der Pylonenpfeiler angeordnet werden, was aber den Nachteil hätte, daß dieser Pfeiler die große waagerechte Kraft Y_{p+t} aufnehmen müßte. Ordnet man das feste Lager hingegen bei einem der Endwiderlager an, dann wird Y_t noch größer. Die Rechnung zeigt, daß Y_t sogar wesentlich größer wird als Y_p; da Y_t positiv und negativ sein kann, ergibt sich somit auch ein negatives Y_{p+t}, das nun nicht nur keine Verringerung, sondern eine Vergrößerung der Biegemomente zur Folge hätte. Die Anordnung einer festen Verbindung zwischen Gurtscheitel und Träger ist also bei in Betonklötzen verankerten Hängebrücken zwecklos. Das ergibt aber eine Warnung für die Ausführung solcher Hängebrücken. Die bei größeren Brücken recht große Relativverschiebung zwischen Gurtscheitel und Trägermitte muß möglich sein. Erhält der Träger nur bewegliche Lager, dann darf der Rollendurchmesser nicht zu klein sein. Ist aber ein festes Lager vorhanden, dann müssen die Hängestangen in Brückenmitte lang genug sein, um die Verschiebung zu ermöglichen, der Gurtscheitel also entsprechend hoch über dem Träger liegen. Andernfalls tritt eine Kraft Y auf, die sich auf mehrere Hängestangen in Brückenmitte verteilt und die durch das Erreichen der Fließgrenze in den Hängestangen begrenzt wird. Je kürzer die Hängestangen in Brückenmitte sind, desto schiefer stellen sie sich, und desto größer wird Y. Man soll daher bei größeren Hängebrücken mit festem Trägerlager stets die gegenseitige Verschiebung berechnen, um ein Urteil über deren Wirkung zu erhalten. Allerdings tritt die halbseitige Belastung in voller Größe wohl niemals auf, ebensowenig die sich aus den Einflußlinien ergebende ungünstigste Belastung, die man meiner Ansicht nach überhaupt nicht errechnen sollte, da sie stets nur wenig ungünstiger wirkt als die sehr einfach zu behandelnde halbseitige Belastung.

Die Berechnung gekrümmter Blechträgerbrücken.

Von Dr.-Ing. Ernst Melan, Professor an der Technischen Hochschule in Wien.

I.

Wir untersuchen das in Bild 1 dargestellte Tragwerk, welches aus zwei Hauptträgern, einer waagerechten Bodenscheibe und Querwänden besteht. Wir nehmen an, daß die Hauptträger zwischen den einzelnen Querwänden gerade sind; ihr Grundriß bildet einen aus einzelnen Geraden bestehenden Linienzug. Sind die Hauptträger stetig gekrümmt, wie dies zumeist der Fall ist, so ist die Ermittlung der hierdurch auftretenden zusätzlichen Verdrehungsbeanspruchung der Hauptträger Gegenstand einer besonderen Untersuchung. Wir nehmen ferner an, daß sämtliche Trägerscheiben nur Kräfte in ihrer Ebene aufnehmen können; auch ihr Widerstand gegen Verdrehung sei vernachlässigbar klein. Der Querschnitt ist in Bild 2, der Grundriß in Bild 2a dargestellt. Die Belastung möge aus Einzellasten bestehen, welche in jenen Stellen, wo Querwände anschließen, auf die Hauptträger wirken.

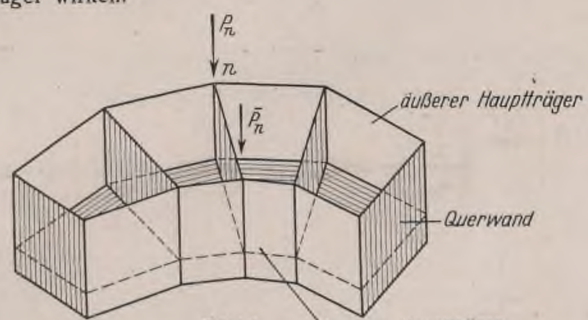


Bild 1.



Bild 2.



Bild 2a.

In Bild 3a ist der Knoten n des äußeren Hauptträgers herausgezeichnet. Die Hauptträger und die Querwand sind knapp neben dem Knoten geschnitten. An den Schnittstellen greifen die Momente M_n', M_n'' und L_n, die Querkräfte Q_n, Q_{n+1} und T_n in der aus dem Bild ersichtlichen Weise an. Die Belastung des Knotens sei P_n. Dann ergibt das Gleichgewicht in lotrechter Richtung

(1) $$Q_n - Q_{n+1} - T_n - P_n = 0.$$

Auch die Momente M_n', M_n'' und L_n müssen im Gleichgewicht sein. Da nach Voraussetzung die Scheiben keine Kräfte senkrecht zu ihrer Ebene aufnehmen können, müssen die Vektoren dieser Momente senkrecht zur Scheibenebene stehen, wie dies in Bild 3b dargestellt ist.

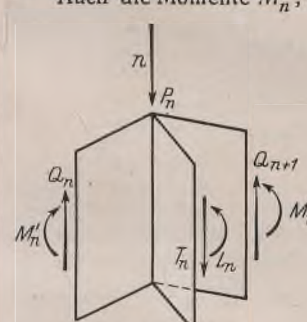


Bild 3a.

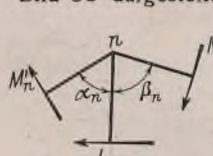


Bild 3b.

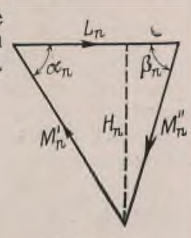


Bild 3c.

Der in Bild 3c gezeichnete Momentenplan erlaubt mit Hilfe der eingetragenen Winkel α_n und β_n und des Moments H_n die Größen M_n', M_n'' und L_n wie folgt auszudrücken:

(2) $$\left\{\begin{array}{ll} M_n' = \dfrac{H_n}{\sin\alpha_n} & M_n'' = \dfrac{H_n}{\sin\beta_n} \\ L_n = -H_n(\operatorname{cotg}\alpha_n + \operatorname{cotg}\beta_n). & \end{array}\right.$$

Betrachtet man nun die Hauptträgerscheibe zwischen den Knoten $n-1$ und n, so findet man zwischen den Größen Q_n, M_n' und M_n'' gemäß Bild 4 die Beziehung

(3) $$Q_n = \frac{1}{a_n}\left(-M''_{n-1} + M_n'\right) = \frac{1}{a_n}\left(-\frac{H_{n-1}}{\sin\beta_{n-1}} + \frac{H_n}{\sin\alpha_n}\right)$$

und ebenso für die Hauptträgerscheibe zwischen den Knoten n und $n+1$

(3a) $$Q_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}}\left(-\frac{H_n}{\sin\beta_n} + \frac{H_{n+1}}{\sin\alpha_{n+1}}\right).$$

Für den inneren Hauptträger, dessen Momente und Querkräfte durch einen Querstrich gekennzeichnet werden mögen, ergibt sich auf die gleiche Weise, wie aus Bild 5a, b, c ersichtlich ist

(4) $$\bar Q_n - \bar Q_{n+1} - \bar T_n - \bar P_n = 0.$$

(5) $$\bar M_n' = \frac{\bar H_n}{\sin\bar\alpha_n} \qquad \bar M_n'' = \frac{\bar H_n}{\sin\bar\beta_n} \qquad \bar L_n = \bar H_n(\operatorname{cotg}\bar\alpha_n + \operatorname{cotg}\bar\beta_n).$$

wobei nach Bild 6

(6) $$\left\{\begin{array}{l} \bar Q_n = \dfrac{1}{\bar a_n}\left(-\dfrac{\bar H_{n+1}}{\sin\bar\beta_{n-1}} + \dfrac{\bar H_n}{\sin\bar\alpha_n}\right) \\ \bar Q_{n+1} = \dfrac{1}{\bar a_{n+1}}\left(-\dfrac{\bar H_n}{\sin\bar\beta_n} + \dfrac{\bar H_{n+1}}{\sin\bar\alpha_{n+1}}\right) \end{array}\right.$$

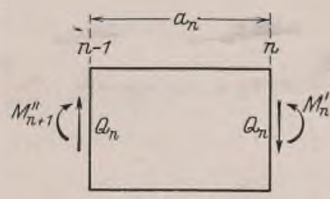


Bild 4.

ist. Betrachtet man schließlich noch die Querscheibe im Knoten n, so findet man, wie aus Bild 6 hervorgeht

$$-\bar T_n = T_n = \frac{-L_n + \bar L_n}{c_n} = \frac{H_n}{c_n}(\operatorname{cotg}\alpha_n + \operatorname{cotg}\beta_n) + \frac{\bar H_n}{c_n}(\operatorname{cotg}\bar\alpha_n + \operatorname{cotg}\bar\beta_n).$$

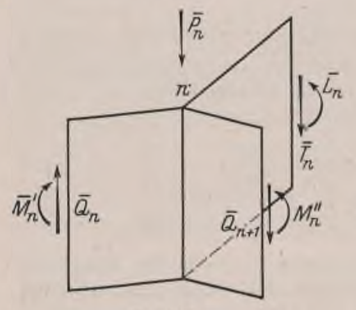


Bild 5a.

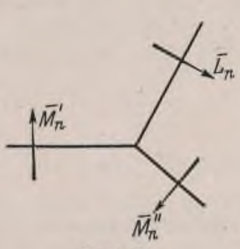


Bild 5b.

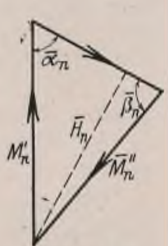


Bild 5c.

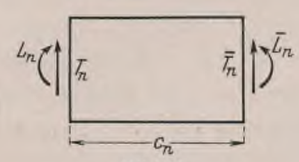


Bild 6.

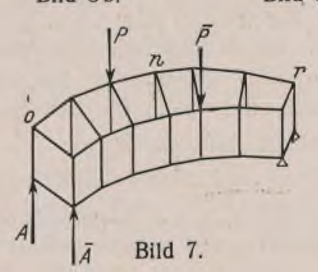


Bild 7.

Setzt man die Werte von Q_n und Q_{n-1} nach Gl. (3), den Wert von T_n nach Gl. (7) in Gl. (1) ein, so erhält man für den äußeren Hauptträger

(8) $$\frac{1}{a_n}\left(-\frac{H_{n-1}}{\sin\beta_{n-1}} + \frac{H_n}{\sin\alpha_n}\right) - \frac{1}{a_{n+1}}\left(-\frac{H_n}{\sin\beta_n} + \frac{H_{n+1}}{\sin\alpha_{n+1}}\right) - \frac{H_n}{c_n}(\operatorname{cotg}\alpha_n + \operatorname{cotg}\beta_n) - \frac{\bar H_n}{c_n}(\operatorname{cotg}\bar\alpha_n + \operatorname{cotg}\bar\beta_n) - P_n = 0$$

und auf die gleiche Weise für den inneren Hauptträger

(8a) $$\frac{1}{\bar a_n}\left(-\frac{\bar H_{n-1}}{\sin\bar\beta_{n-1}} + \frac{\bar H_n}{\sin\bar\alpha_n}\right) - \frac{1}{\bar a_{n-1}}\left(-\frac{\bar H_n}{\sin\bar\beta_n} + \frac{\bar H_{n+1}}{\sin\bar\alpha_{n+1}}\right) + \frac{H_n}{c_n}(\operatorname{cotg}\alpha_n + \operatorname{cotg}\beta_n) + \frac{\bar H_n}{c_n}(\operatorname{cotg}\bar\alpha_n + \operatorname{cotg}\bar\beta_n) - \bar P_n = 0.$$

Wir können für jede Querwand $n = 0, 1, 2 \ldots r$ die beiden vorstehenden Gleichungen anschreiben, erhalten also doppelt soviel Gleichungen als Knoten. Da aber in den beiden Gleichungen für $n = 0$ und $n = r$ auch noch die Werte H_{-1} und H_{r-1}, $\bar H_{-1}$ und $\bar H_{r-1}$ vorkommen, enthalten diese Gleichungen um vier Unbekannte mehr als die Zahl derselben. Die Form dieser vier fehlenden Gleichungen, die als Randbedingungen bezeichnet werden, hängt davon ab, wie das Tragwerk gestützt ist. Ist z. B. das eine Ende eines Hauptträgers $n = 0$ frei, d. h. weder gestützt noch eingespannt, so ist hier $H_0 = 0$ und $Q_0 = 0$, also wegen der Gl. (3) auch $H_{-1} = 0$. Ist hingegen ein Trägerende $n = 0$ nur gestützt, so ist hier $H_0 = 0$; Q_0 stellt den hier auftretenden Auflagerdruck vor. Man erkennt hieraus, daß der zumeist vorliegende Fall, wo

alle vier Hauptträgerenden gestützt sind, statisch bestimmt ist, denn die vier Randbedingungen

$$H_0 = \overline{H}_0 = H_r = \overline{H}_r = 0$$

genügen gerade, um die Lösungen der Gl. (8) u. (8a) in eindeutiger Weise festzulegen.

Die Auflösung dieser Gleichungen wäre bei größerer Felderzahl ziemlich mühsam. Kennt man aber die Werte von H und Q beider Hauptträger an einem Ende, also z. B. H_0, $\overline{H}_0$, Q_0, und $\overline{Q}_0$, wie dies bei einem freien Trägerende $n=0$ der Fall ist, so kann man mit Hilfe der aus den Gl. (8) u. (8a) sich sofort ergebenden Rekursionsformeln

$$(9)\quad H_{n+1} = a_{n+1} \cdot \sin\alpha_{n+1} \left[\frac{1}{a_n}\left(-\frac{H_{n-1}}{\sin\beta_{n-1}} + \frac{H_n}{\sin\alpha_n} \right) - \frac{H_n}{c_n}(\operatorname{cotg}\alpha_n + \operatorname{cotg}\beta_n) - \frac{\overline{H}_n}{c_n}(\operatorname{cotg}\overline{\alpha}_n + \operatorname{cotg}\overline{\beta}_n) - P_n \right] + H_n \cdot \frac{\sin\alpha_{n+1}}{\sin\alpha_n},$$

$$(9a)\quad \overline{H}_{n+1} = \overline{a}_{n+1} \cdot \sin\overline{\alpha}_{n+1} \left[\frac{1}{\overline{a}_n}\left(-\frac{\overline{H}_{n-1}}{\sin\overline{\beta}_{n-1}} + \frac{\overline{H}_n}{\sin\overline{\alpha}_n} \right) + \frac{H_n}{c_n}(\operatorname{cotg}\alpha_n + \operatorname{cotg}\beta_n) + \frac{\overline{H}_n}{c_n}(\operatorname{cotg}\overline{\alpha}_n + \operatorname{cotg}\overline{\beta}_n) - \overline{P}_n \right] + \overline{H}_n \cdot \frac{\sin\overline{\alpha}_{n+1}}{\sin\overline{\alpha}_n},$$

vom freien Ende beginnend, schrittweise die Momente der beiden Hauptträger bis zum Einspannmoment bestimmen.

Sind insbesondere alle Feldweiten a des äußeren und $\overline{a}$ des inneren Hauptträgers gleich, ebenso alle Winkel $\alpha = \beta = \overline{\alpha} = \overline{\beta}$ gleich, demnach auch die Breite $c_n = c$ unveränderlich, so vereinfachen sich für diesen fast stets vorliegenden Fall die angegebenen Rekursionsformeln zu

$$H_{n+1} = (-H_{n-1} + 2H_n - P_n)\, a \cdot \sin\alpha - \frac{2a}{c} \cdot \cos\alpha\, (H_n + \overline{H}_n)$$

$$\overline{H}_{n+1} = (-\overline{H}_{n-1} + 2\overline{H}_n - \overline{P}_n)\, a \cdot \sin\alpha + \frac{2a}{c} \cdot \cos\alpha\, (H_n + \overline{H}_n).$$

Will man sonach mittels dieser Rekursionsformeln die Biegungsmomente eines Tragwerkes auf vier Stützen ermitteln, so muß man die Auflagerdrücke kennen. Diese bestimmt man am einfachsten auf folgende Weise. Man denkt sich die Stützen an einem Ende, etwa in $n=0$ entfernt und dafür die Hauptträger an dem anderen Ende $n=r$ eingespannt (Bild 7). Mittels der angegebenen Rekursionsformeln kann man, am freien Ende bei $n=0$ beginnend, die Momente H'_{nP} und $\overline{H}'_{nP}$ dieses Kragträgers ermitteln und erhält die Einspannmomente H'_{rP} und $\overline{H}'_{rP}$ infolge der gegebenen Belastung P_n und $\overline{P}_n$. Dann bestimmt man die Momente H_{nA} und $\overline{H}_{nA}$ infolge des Auflagerdruckes $A=1$ am äußeren Hauptträger und $H_{n\overline{A}}$ und $\overline{H}_{n\overline{A}}$ infolge des Auflagerdruckes $\overline{A}=1$ am inneren Hauptträger. Die wirklich auftretenden Momente sind dann durch

$$H_{nP} = H'_{nP} + A\,H_{nA} + \overline{A}\,H_{n\overline{A}} \quad \text{bzw.} \quad \overline{H}_{nP} = \overline{H}'_{nP} + A\,\overline{H}_{nA} + \overline{A}\,\overline{H}_{n\overline{A}}$$

gegeben, wobei die Auflagerdrücke A und $\overline{A}$ aus der Bedingung zu bestimmen sind, daß in $n=r$, also am anderen Trägerende, die Momente H_{rP} und $\overline{H}_{rP}$ verschwinden müssen, demnach aus den beiden Gleichungen

$$H'_{rP} - A\,H_{rA} + \overline{A}\,H_{r\overline{A}} = 0$$

$$\overline{H}'_{rP} - A\,\overline{H}_{rA} - \overline{A}\,\overline{H}_{r\overline{A}} = 0.$$

II.

Obwohl das vorstehende Berechnungsverfahren keine sonderliche Mühe verursacht, läßt sich die Ermittlung der Biegungsmomente für den Fall, daß die Winkel α_n, β_n, $\overline{\alpha}_n$, $\overline{\beta}_n$ nur wenig von einem rechten Winkel abweichen, ein noch einfacheres Verfahren angeben. Dieses Näherungsverfahren beruht auf der Benutzung der Lösungen eines „benachbarten Systems“, die als bekannt vorausgesetzt werden. In der Praxis liegen ja die Verhältnisse zumeist so, daß die Krümmung der Haupttragwände klein im Verhältnis zu der Feldweite ist und das nachstehend beschriebene Verfahren daher stets mit hinreichender Genauigkeit zum Ziele führt. Wir setzen zur Abkürzung

$$\frac{1}{\sin\alpha_n} = 1 + \varphi_n, \quad \frac{1}{\sin\beta_n} = 1 + \psi_n, \quad \frac{1}{\sin\overline{\alpha}_n} = 1 + \overline{\varphi}_n, \quad \frac{1}{\sin\overline{\beta}_n} = 1 + \overline{\psi}_n$$

$$\frac{1}{c_n}(\operatorname{cotg}\alpha_n + \operatorname{cotg}\beta_n) = \frac{\varrho_n}{c} \qquad \frac{1}{c_n}(\operatorname{cotg}\overline{\alpha}_n + \operatorname{cotg}\overline{\beta}_n) = \frac{\overline{\varrho}_n}{c},$$

worin φ_n, ψ_n, $\overline{\varphi}_n$, $\overline{\psi}_n$ sowie ϱ_n, $\overline{\varrho}_n$ gegen 1 kleine Größen sind. c bedeutet den Mittelwert der c_n. Sind nun $\varphi_n \ldots \overline{\varrho}_n$ Null, so erhalten wir als „benachbartes System“ gerade Träger mit den Feldweiten a bzw. $\overline{a}$, deren Momente H_n^* und $\overline{H}_n^*$ leicht zu bestimmen sind. Die Lösungen des gegebenen gekrümmten Trägers werden bei kleinen Werten von $\varphi_n \ldots \overline{\varrho}_n$ nur wenig von den Lösungen des benachbarten Systems abweichen, es ist also, wenn die Verbesserungen mit $\varDelta H_n$ bzw. $\varDelta \overline{H}_n$ bezeichnet werden,

$$H_n = H_n^* + \varDelta H_n \quad \text{und} \quad \overline{H}_n = \overline{H}_n^* + \varDelta \overline{H}_n,$$

wobei $\varDelta H_n$ und $\varDelta \overline{H}_n$ ebenfalls kleine Werte vorstellen; setzt man diese in Gl. (8) u. (8a) ein, vernachlässigt als klein zweiter Ordnung die Produkte von $\varDelta H_n$ und $\varDelta \overline{H}_n$ mit $\varphi_n \ldots \overline{\varrho}_n$ und beachtet, daß für die Lösungen des benachbarten Systems die Gleichungen

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{a_n}(-H_{n-1}^* + H_n^*) - \dfrac{1}{a_{n+1}}(-H_n^* + H_{n+1}^*) - P_n = 0 \\[2ex] \dfrac{1}{\overline{a}_n}(-\overline{H}_{n-1}^* + \overline{H}_n^*) - \dfrac{1}{\overline{a}_{n+1}}(-\overline{H}_n^* + \overline{H}_{n+1}^*) - \overline{P}_n = 0 \end{cases}$$

gelten, so erhält man für die Verbesserungen $\varDelta H$ die Gleichungen

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{a_n}(-\varDelta H_{n-1} + \varDelta H_n) - \dfrac{1}{a_{n+1}}(-\varDelta H_n + \varDelta H_{n+1}) - \varDelta P_n = 0 \\[2ex] \dfrac{1}{\overline{a}_n}(-\varDelta \overline{H}_{n-1} - \varDelta \overline{H}_n) - \dfrac{1}{\overline{a}_{n+1}}(-\varDelta \overline{H}_n + \varDelta \overline{H}_{n+1}) - \varDelta \overline{P}_n = 0, \end{cases}$$

wobei

$$(11a)\quad \begin{cases} \varDelta P_n = \dfrac{1}{a_n}(H_{n-1}^* \psi_{n-1} - H_n^* \varphi_n) - \dfrac{1}{a_{n+1}}(H_n^* \psi_n - H_{n+1}^* \varphi_{n+1}) + \dfrac{1}{c}(H_n^* \varrho_n + \overline{H}_n^* \overline{\varrho}_n) \\[2ex] \varDelta \overline{P}_n = \dfrac{1}{\overline{a}_n}(\overline{H}_{n-1}^* \overline{\psi}_{n-1} - \overline{H}_n^* \overline{\varphi}_n) - \dfrac{1}{\overline{a}_{n+1}}(\overline{H}_n^* \overline{\psi}_n - \overline{H}_{n-1}^* \overline{\varphi}_{n+1}) - \dfrac{1}{c}(H_n^* \varrho_n + \overline{H}_n^* \overline{\varrho}_n) \end{cases}$$

aus den als bekannt vorausgesetzten Momenten des geraden Trägers zu ermitteln sind.

Sonach ergibt sich folgende einfache Vorschrift für die Berechnung von gekrümmten vollwandigen Trägern unter der Voraussetzung, daß die Winkel zwischen Querwänden und Hauptträgern nicht allzusehr von rechten Winkeln abweichen. Man ermittelt zunächst die Biegungsmomente H^* für den äußeren Träger $\overline{H}^*$ und für den inneren Träger so, als wenn die Träger gerade wären und die Feldweiten a_n und $\overline{a}_n$ besäßen. Sodann bestimmt man sich die Zusatzbelastung $\varDelta P_n$ des äußeren und $\varDelta \overline{P}_n$ des inneren Trägers nach Gl. (11) bzw. (11a) und erhält durch diese Belastung die Verbesserungen der H_n^* und $\overline{H}_n^*$, nämlich $\varDelta H_n$ und $\varDelta \overline{H}_n$. Die Genauigkeit dieses Verfahrens ist in praktischen Fällen vollständig ausreichend; es stimmen z. B. bei einem Tragwerk mit rd. 4 m Querträgerentfernung und 250 m Krümmungsradius die Momente nach diesem Näherungsverfahren gerechnet mit den genau ermittelten auf 5 Stellen überein. Für den Fall, daß $\alpha_n = \beta_n = \overline{\alpha}_n = \overline{\beta}_n = \alpha$ sowie $a_n = \overline{a}_n$ ist, vereinfachen sich die Ausdrücke für die Zusatzbelastung

$$\varDelta P_n = (H_{n-1} - 2H_n + H_{n+1})\frac{1}{a \cdot \sin\alpha} + 2(H_n + \overline{H}_n)\frac{\operatorname{cotg}\alpha}{c}$$

$$\varDelta \overline{P}_n = (\overline{H}_{n-1} - 2\overline{H}_n - \overline{H}_{n+1})\frac{1}{\overline{a} \cdot \sin\alpha} - 2(H_n + \overline{H}_n)\frac{\operatorname{cotg}\alpha}{c}.$$

III.

Bei einem gekrümmten Durchlaufträger wird man am besten die Stützenmomente $H_p = X_p$ und $\overline{H}_p = Y_p$ als statisch unbestimmte Größen einführen. Die Elastizitätsgleichungen nehmen dann, wie man leicht bestätigt findet, die Form an

$$X_{p-1}\delta_{p\,p-1} + X_p\,\delta_{pp} + X_{p+1}\delta_{p\,p+1} + Y_{p-1}\eta_{p\,p-1} + Y_p\,\eta_{pp} + Y_{p+1}\eta_{p\,p+1} + \delta_{pP} = 0,$$

$$X_{p-1}\eta_{p\,p-1} + X_p\,\eta_{pp} + X_{p+1}\eta_{p\,p+1} + Y_{p-1}\eta_{p\,p-1} + Y_p\,\varepsilon_{pp} + Y_{p+1}\varepsilon_{p\,p+1} + \varepsilon_{pP} = 0.$$

Dabei ist

$$\delta_{p\,p-1} = \left[M_{sX_p}\, M_{sX_{p-1}}\right] \qquad \delta_{pp} = \left[M_{sX_p}\, M_{sX_p}\right]$$

$$\eta_{p\,p-1} = \left[M_{sX_p}\, M_{sX_{p-1}}\right] \qquad \eta_{pp} = \left[M_{sX_p}\, M_{sY_p}\right]$$

$$\varepsilon_{p\,p-1} = \left[M_{sY_p}\, M_{sY_{p-1}}\right] \qquad \varepsilon_{pp} = \left[M_{sY_p}\, M_{sY_p}\right]$$

$$\delta_{Pp} = \left[M_{sP}\, M_{sX_p}\right] \qquad \varepsilon_{Pp} = \left[M_{sP}\, M_{sY_p}\right]$$

wobei z. B. $\left[M_{sX_p}\, M_{sX_{p-1}}\right]$ zur Abkürzung für das Integral

$$\int M_{sX_p}\, M_{sX_{p-1}} \cdot \frac{ds}{J}$$

geschrieben wurde. Alle Integrale erstrecken sich über beide Hauptträger und die Querwände zwischen den Knoten $p-1$, p und $p-1$.

Die Momente M_{sX_p} und $M_{sX_{p-1}}$, M_{sY_p} und $M_{sY_{p-1}}$ werden durch die Hilfsangriffe $X_p = 1$ und $X_{p-1} = 1$ bzw. durch $Y_p = 1$ und $Y_{p-1} = 1$ erzeugt; M_{sP} bedeutet die Momente infolge der äußeren Belastung. Alle diese Biegungsmomente treten in dem gekrümmten Träger auf, sind also entweder nach dem in I oder II angegebenen Verfahren zu bestimmen. Bei der Ermittlung der Beiwerte der statisch unbestimmten Größen können aber stets jene Beiträge, die im Vergleich zu den übrigen klein zweiter Ordnung sind, vernachlässigt werden. Daher kann man sich darauf beschränken, bei der Ermittlung von $\delta_{p\,p-1}$ und δ_{pp} die Integrale lediglich über den äußeren, bei $\varepsilon_{p\,p-1}$ und ε_{pp} lediglich über den inneren Hauptträger zu nehmen, da sich im ersten Falle die Biegungsmomente des inneren, im zweiten des äußeren Hauptträgers nur auf die unter II bestimmten Zusatzmomente beschränken. Auch die Momente in den Querwänden sind im allgemeinen klein zweiter Ordnung; nur bei sehr biegungsschwachen Querwänden kann der Beitrag der Integrale über die Querwände allenfalls zu berücksichtigen sein. Hingegen sind die Größen $\eta_{p\,p-1}$ und η_{pp} nur klein erster Ordnung, denn in den Integralen $\left[M_{sX_p}\ M_{sY_p}\right]$ ist längs der Hauptträger stets nur ein Faktor des Integranden klein erster Ordnung. Ob der Beitrag der Querwände in Frage kommt, hängt wiederum von dem Verhältnis der Biegungssteifigkeit der Querwände zu jenem der Hauptträger ab.

Die Lösung der Elastizitätsgleichungen wird nun ebenfalls wieder unter Benutzung des benachbarten Systems mit $\eta = 0$ erhalten. Man bestimmt also zunächst Näherungslösungen X_p^* und Y_p^* aus den Gleichungssystemen

$$X^*_{p-1}\,\delta_{p\,p-1} + X_p^*\,\delta_{pp} + X^*_{p+1}\,\delta_{p\,p+1} + \delta_{P_p} = 0$$

und

$$Y^*_{p-1}\,\varepsilon_{p\,p-1} + Y_p^*\,\varepsilon_{pp} + Y^*_{p+1}\,\varepsilon_{p\,p+1} + \varepsilon_{P_p} = 0$$

und hat also zunächst zwei voneinander unabhängige Gleichungssysteme, bei denen jede Gleichung nur drei Unbekannte enthält, aufzulösen. Die Verbesserungen ΔX und ΔY erhält man durch Auflösen des Gleichungssystems

$$\Delta X_{p-1}\,\delta_{p\,p-1} + \Delta X_p\,\delta_{pp} + \Delta X_{p+1}\,\delta_{p\,p+1} + Y^*_{p-1}\,\eta_{p\,p-1} + Y_p^*\,\eta_{pp} + Y^*_{p+1}\,\eta_{p\,p+1} = 0$$

$$\Delta Y_{p-1}\,\varepsilon_{p\,p-1} + \Delta Y_p\,\varepsilon_{pp} + \Delta Y_{p+1}\,\varepsilon_{p\,p+1} + X^*_{p-1}\,\eta_{p\,p-1} + X_p^*\,\eta_{pp} + X^*_{p+1}\,\eta_{p\,p+1} = 0,$$

wenn die Produkte $\Delta X\,\eta$ und $\Delta Y\,\eta$ als klein zweiter Ordnung vernachlässigt werden.

Zur Theorie der Schweißverbindungen.

Von Prof. Dr.-Ing. habil. Karl Girkmann, Wien.

Für die richtige Gestaltung und Bemessung der Schweißverbindungen ist die Kenntnis des inneren Kräftespieles von wesentlicher Bedeutung; besonders dann, wenn diese Verbindungen für häufig wiederholte Lasteinwirkungen zu entwerfen sind. In zahlreichen Abhandlungen, die in den verschiedensten Zeitschriften verstreut sind, wurde auch bereits der Spannungszustand von Schweißverbindungen untersucht[1], [2].

Im folgenden wird nun ein kurzer Überblick über die Entwicklung der Theorie der Schweißverbindungen — mit Ausschluß der Untersuchungen über Schrumpfspannungen — gegeben. Zu diesem Zwecke werden die bemerkenswerteren, in theoretischer Hinsicht bedeutungsvolleren Untersuchungen nach Teilgebieten zusammengefaßt; es werden die Voraussetzungen erörtert, die Lösungswege angedeutet und die Ergebnisse kurz besprochen; auch auf allfällige Mängel wird im Interesse der kritischen Bewertung dieser Arbeiten verwiesen werden. Mit Rücksicht auf den verfügbaren Raum können die Ergebnisse experimenteller Spannungsermittlungen nur vereinzelt angeführt werden. Auf die Wiedergabe elementarer Berechnungsformeln wird verzichtet.

Die hier zur Besprechung gelangenden theoretischen Arbeiten betreffen die alleinige Ermittlung der Lastspannungen. Darunter wollen wir jene Spannungen der Schweißverbindungen verstehen, die von den zu übertragenden Kräften allein hervorgerufen werden. Bei der Ermittlung dieser Spannungen werden die Werkstoffe in der Regel als isotrop, die Spannungszustände zumeist als rein elastisch und die Schweißverbindungen als eigenspannungsfrei vorausgesetzt. Nicht immer können aus den so erhaltenen Ergebnissen unmittelbare Rückschlüsse auf die Festigkeit selbst eigenspannungsfreier Verbindungen gezogen werden, da die Werkstoffe in Wirklichkeit elastisch-plastisches Verhalten aufweisen und die Spannungszustände, bedingt durch die geometrische Form der Verbindungen, meist sehr verwickelter Art sind.

I. Überlappungs- und Laschenverbindungen von Stäben.

1. Eindimensionale Untersuchungen.

a) Axiale Beanspruchung, Verschweißung mittels Flankenkehlnähten. Die beiden ersten Untersuchungen, die im Rahmen der vereinfachenden Annahme einachsiger Spannungszustände einer befriedigenden Lösung zugeführt wurden, hat W. Hovgaard [3]) veröffentlicht. In der ersten Arbeit wird ein axial beanspruchter Verbundstab untersucht, der aus einem Flachstab besteht, an den innerhalb eines bestimmten Teiles seiner Länge ein zweiter Flachstab mittels Flankenkehlnähten angeschlossen ist. Die zweite Veröffentlichung behandelt bereits eine axial beanspruchte Stabüberlappung mit Flankenkehlnähten (Bild 1 a, b). Diese Arbeit soll eingehender besprochen werden, da viele der späteren Untersuchungen von Kehlnahtverbindungen unter denselben oder ähnlichen Vereinfachungen durchgeführt wurden.

Die Voraussetzungen Hovgaards sind die folgenden: In den Stäben werden nur zur Stabachse parallele Normalspannungen, in den Schweißnähten nur die Scherspannungen des Kehlschnittes (nutzbare Dicke a in Bild 2a) berücksichtigt. Es werden nur sehr schmale Stäbe in Betracht gezogen, um so rechnen zu dürfen, als wären die Stabspannungen gleichmäßig über die Querschnitte verteilt. Die Außermittigkeit der Kraftübertragung bleibt unberücksichtigt. Es werden nur rein elastische Spannungszustände in Betracht gezogen, und die Schweißverbindung wird als eigenspannungsfrei vorausgesetzt. Die elastische Nachgiebigkeit der Nähte wird in Rechnung gestellt, und zwar wird angenommen, daß die gegenseitige, auf Grund gleichmäßiger Verteilung der Stabspannungen errechnete (also mittlere) Verschiebung u (Bild 2 b, c) der Stäbe verhältnisgleich ist der am gleichen Orte wirkenden mittleren Scherspannung ϱ des Nahtkehlschnittes: $u = k\,\varrho$. Der Proportionalitätsfaktor k wird „Verschiebungszahl" genannt und besitzt die Dimension $\frac{\text{cm}^3}{\text{kg}}$. Er muß experimentell ermittelt werden. Auf Grund der Nachrechnung der Versuchsergebnisse von Hammond Smith[4]) hat Hovgaard für 6 mm-Nähte k-Werte von $18 \cdot 10^{-6}$ bis $18 \cdot 10^{-7}$ in Rechnung gestellt. Ein gleichartiges Formänderungsgesetz hat viele Jahre vorher schon Arnovljevic[5]) bei der Berechnung der Haftspannungen in Verbundstäben verwendet; Fillunger[6]) hat dasselbe Gesetz seiner Theorie der Löt-, Leim- und Nietverbindungen zugrunde gelegt. Übrigens wären aus dieser Arbeit die Ergebnisse Hovgaards unmittelbar, im Wege einer einfachen Spezialisierung, zu erhalten gewesen.

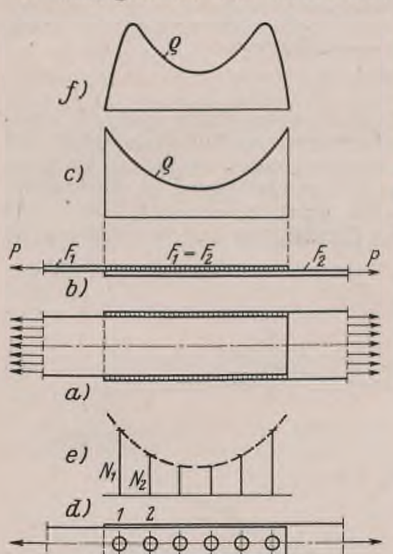


Bild 1.

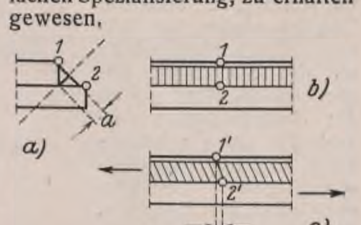


Bild 2.

Hovgaard hat die gegenständliche Aufgabe mit Hilfe des Satzes vom Minimum der Formänderungsarbeit gelöst. Lokschin[7]) hat darauf aufmerksam gemacht, daß es einfacher ist, die Differentialgleichung des Problems aufzustellen und zu integrieren; diesen Weg hatte schon Fillunger[6]) beschritten.

Bild 1 c zeigt die von Hovgaard errechnete Verteilungslinie der Nahtscherspannungen, mit Spannungsgrößtwerten an den Nahtenden. Im vorliegenden Falle besitzen beide Stäbe gleichen Querschnitt; die Endwerte der Spannungen sind dann gleich groß.

[1]) Eine Übersicht über Arbeiten der Wiener Hochschule haben Hartmann und der Verfasser anläßlich des Londoner Schweißkongresses (Mai 1935) gegeben: The Present Situation of Welding in Structural Engineering in Austria, Bericht, Gruppe 1/a.

[2]) Eine Beschreibung und Zusammenstellung der bis 1. Januar 1937 erschienenen Arbeiten über experimentelle und theoretische Spannungsermittlungen in Kehlnahtverbindungen haben A. G. Solakian u. G. E. Claussen veröffentlicht: Journ. Amer. Weld. Soc., Vol. 16 (1937), Weld. Res. Suppl. 5.

[3]) The Stress Distribution in Welds and The Stress Distribution in Welded Overlapped Joints. Proc. Nation. Ac. of Sc.-USA., Vol. 16 (1930); s. a. ZAMM 11 (1931), S. 341.

[4]) Stress Strain Characteristics of Welded Joints. Journ. Amer. Weld. Soc., Vol. 8 (1929), Weld. Res. Suppl. 9.

[5]) Das Verteilungsgesetz der Haftspannungen in axial beanspruchten Verbundstäben. Z. f. Arch. u. Ing.-Wesen Hannover 1909, S. 415.

[6]) Über die Festigkeit von Löt-, Leim- und Nietverbindungen. Österr. Wochenschr. f. d. öffentl. Baud. 1919, S. 3.

[7]) ZAMM 12 (1932), S. 128.

Petermann[8]) hat dieselbe Verteilung der Nahtspannungen aus den Ergebnissen von Nietberechnungen im Wege eines Grenzüberganges erhalten; auch in einer genieteten Überlappung verteilt sich die Axialkraft, solange nur elastische Formänderungen auftreten, stark ungleichmäßig auf die einzelnen Niete (Bild 1 d, e) und die Abstufung der Nietkräfte entspricht dem Verlauf der Scherspannung der Flankennaht.

Bild 3 zeigt noch die Ergebnisse der Hovgaardschen Berechnung eines axial beanspruchten, beiderseits verlaschten Stabstoßes mit Flankenkehlnähten. Der Querschnitt beider Laschen zusammen ist hier größer gewählt als der Stabquerschnitt. Die Scherspannungen an den Nahtenden sind nun verschieden, und zwar tritt am Ende des stärkeren Elementes, das sind hier die Laschen, die größere Nahtspannung auf. In Bild 3 ist auch der Verlauf der mittleren Normalspannung der Stäbe und Laschen dargestellt. Dieser charakteristische S-förmige Verlauf (an den Enden ist der Abfall steiler, in der Mitte flacher) wurde auch bei Versuchen beobachtet[9]). Es sei darauf hingewiesen, daß der Abfall bzw. der Anstieg der mittleren Normalspannungen der Stäbe und Laschen nicht linear erfolgen kann. Zu einem linearen Verlauf gehört nämlich eine längs der ganzen Nahtlänge konstante Scherspannung.

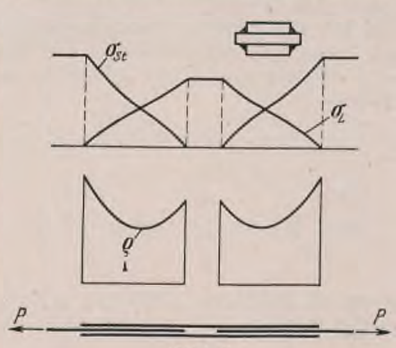


Bild 3.

Die veränderlichen Normalspannungen innerhalb der Überlappung verursachen auch veränderliche Querverkürzungen und die Stäbe streben die in Bild 4 stark verzerrt dargestellten Querverformungen an. Gegenüberliegende Stabpunkte suchen sich also auch in Richtung quer zur Naht voneinander zu entfernen. Diese Verschiebungen werden aber durch den Verformungswiderstand der Schweißnähte behindert, wobei in den Stäben vor allem quergerichtete Zug- und Druckspannungen geweckt werden. Die eindimensionale Untersuchungsmethode vermag diese Querspannungen nicht zu erfassen.

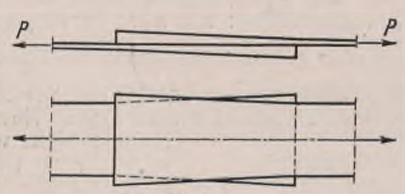


Bild 4.

Erfolgt die Ausbildung des Stoßes zweier Stäbe gleichen Querschnittes in der Weise, daß die Stabenden stumpf verschweißt und die Laschen nur als Verstärkungen zugegeben werden, so kann die Rechnung im Rahmen der getroffenen Vereinfachungen so durchgeführt werden, als wenn der Stab ungestoßen durchlaufen würde. Denn eine allfällige geringe Verschiedenheit der Elastizitätsmoduli des Mutterwerkstoffes und des Schweißgutes ist bei der geringen Nahtbreite praktisch bedeutungslos. Sind die Laschen wieder nur mittels Flankenkehlnähten an die Stabenden angeschlossen, dann gelten die Hovgaardschen Formeln für den Verbundstab, und die Nahtscherspannungen verlaufen nach einer sin h-Linie. Bild 5 zeigt einen Stumpfstoß, der zugleich durch Laschen voll gedeckt ist. Die nutzbare Schweißfläche ist gleich der doppelten Querschnittfläche des Stabes angenommen; die Verteilungslinie der Nahtscherspannungen wurde unter Zugrundelegung von $k = 10 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{cm}^3}{\text{kg}}$ (mittelharte Naht) bestimmt.

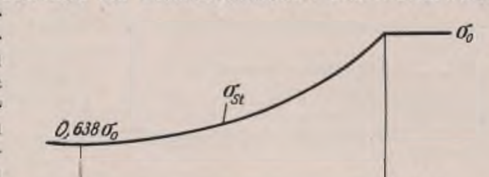


Bild 5.

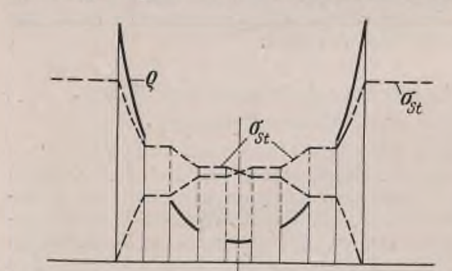
Die weitgehenden Vereinfachungen, die dem Hovgaardschen Berechnungsverfahren zugrunde liegen, haben zur Folge, daß die Ergebnisse in verschiedener Hinsicht unzulänglich sind. Wendet man beispielsweise dieses Verfahren auf die Berechnung einer Stabverlaschung baupraktischer Abmessungen (Stabbreite nicht mehr klein gegenüber der Nahtlänge) an, so tritt sofort der Mangel zutage, daß über den Spannungszustand der Stäbe und Laschen, und somit auch über die Anstrengung des Werkstoffes in diesen Baugliedern, nichts ausgesagt werden kann. Daß in den Nähten nur Scherspannungen, nicht aber auch die Längsspannungen berücksichtigt werden, die durch die aufgezwungenen Dehnungen hervorgerufen werden, ließe sich im Rahmen der getroffenen Vereinfachungen leicht berichtigen.

Charakteristisch für die eindimensionale Untersuchungsmethode ist ferner, daß nur die Randbedingungen für die Stab- und Laschenspannungen, nicht aber für die Nahtscherspannungen befriedigt werden können. Darauf hat schon Fillunger[10]) hingewiesen. Hertwig[11]) hat in diesem Zusammenhange darauf aufmerksam gemacht, daß aus Gleichgewichtsgründen die Scherspannungen des Nahtkehlschnittes an den Enden nicht, wie die Hovgaardsche Berechnung ergibt, Größtwerte erreichen können, sondern Null werden müssen. Auf Grund seiner Beobachtungen bei Versuchen mit Papiermodellen hat Hertwig den in Bild 1 f dargestellten Verlauf der Scherspannungen des Nahtkehlschnittes angenommen. Sehen wir von den Endkratern ab, und nehmen wir an, die Naht bilde ein gerades dreiseitiges Prisma, dann steht die Endfläche senkrecht zur Kehlschnittebene, und nach dem Satze von der Gleichheit zugeordneter Schubspannungen muß tatsächlich (wenn wir nach der Theorie 1. Ordnung rechnen) die am Ende des Kehlschnittes parallel zur Nahtachse wirkende Schubspannungskomponente verschwinden, da in der Stirnfläche keine äußere Scherkraft angreift. Das gilt allerdings nicht für den Wurzelpunkt, da dieser an einer geometrischen Kerbe liegt und sein Spannungszustand daher irregulär sein wird.

Nun haben die Messungen von H. Smith[4]), Höhn[9]) u. a. ergeben, daß gerade an den Nahtenden die größten gegenseitigen Stabverschiebungen auftreten. Hieraus ist nur zu schließen, daß das von Hovgaard verwendete Formänderungsgesetz im Bereiche der Nahtenden eben unbrauchbar ist. Zunächst einmal ist diese Verschiebungsgröße u nicht allein von der Nahtverformung (nämlich von der gegenseitigen Verschiebung gegenüberliegender Punkte der Nahtränder), sondern auch von den Dehnungsunterschieden längs den Stabbreiten abhängig; denn u wird ja aus gemittelten Stabspannungen berechnet. Im Bereich der Nahtenden aber kann auch der Beitrag der Nahtverformung zur Verschiebung u nicht mehr durch die Scherspannung des Nahtkehlschnittes ausgedrückt werden, da diese die Nahtverformung nicht mehr maßgeblich beeinflußt. Im übrigen ist der Spannungszustand der Schweißverbindung im Bereich der Nahtenden ein vorwiegend räumlicher, und die Verschiebung u kann daher nicht durch eine einzelne Spannungskomponente bestimmt sein.

Trotz der angeführten Mängel, die in der eindimensionalen Methode begründet sind, hat die Hovgaardsche Berechnung wichtige Aufschlüsse vermittelt bzw. zu bedeutsamen Versuchsergebnissen die theoretische Erklärung geliefert. Zwar waren gleichartige Ergebnisse aus der allgemeineren Theorie der Haftverbindungen längst bekannt; man hatte es aber unterlassen, diese Ergebnisse auf die Schweißverbindungen zu übertragen.

Die Untersuchung Hovgaards hat vor allem gezeigt, daß die mittleren Scherspannungen des Nahtkehlschnittes nicht gleichmäßig, sondern stark ungleichmäßig über die Nahtlänge verteilt sind. Ferner haben vergleichende Auswertungen der Hovgaardschen Formeln ergeben, daß das Verhältnis zwischen dem Größtwert der mittleren Scherspannungen des Kehlschnittes und dem über die ganze Nahtlänge genommenen Mittelwert dieser Spannungen wächst, wenn das Verhältnis zwischen Nahtlänge und Nahtdicke größer wird. Diesem Ergebnis, das schon aus amerikanischen Versuchen bekannt gewesen ist, kommt ebenfalls wesentliche Bedeutung zu, da ja nach diesen Mittelwerten der Scherspannungen die praktische Bemessung vorgenommen wird. Auch später durchgeführte Versuche, wie jene von Gaber[12]), haben gezeigt, daß die Nahtspannungen ungleichmäßig über die Länge der Flankennähte verteilt sind und daß diese Ungleichmäßigkeit um so stärker ausgeprägt ist, je schlanker die Nähte sind. Darauf ist auch zurückzuführen, daß die auf die Einheit der Nahtscherfläche bezogene statische Festigkeit mit zunehmender Nahtlänge abnimmt[13]). Auf dieses wichtige Ergebnis nimmt auch die DIN 4100 Bezug, indem festgelegt wird, daß die (anrechenbare) Nutzlänge der Naht nicht größer als die 40fache nutzbare Nahtdicke sein darf. Auf Grund obiger Erkenntnisse wären demnach gedrungene Nähte zu bevorzugen. Es ist aber zu berücksichtigen, daß das Verhältnis zwischen Nahtlänge und Stabbreite auch den Spannungszustand der Stäbe und Laschen beeinflußt, der ja durchaus kein eindimensionaler ist (vgl. Bild 9a). Kürzere Nähte verursachen höhere Spitzen in den Normalspannungen dieser Bauglieder und


Bild 6.

[8]) Spannungsverteilung in einer Flankenschweißnaht. Stahlbau 5 (1932), S. 92.

[9]) E. Höhn, ZAMM 12 (1932), S. 319.

[10]) ZAMM 12 (1932), S. 256.

[11]) Die Spannung in Schweißnähten. Stahlbau 6 (1933), S. 161.

[12]) Zusammenwirken von Nietung und Schweißung bei Zug und Druck. Bauing. 13 (1932), S. 290.

[13]) E. O. Patton u. W. W. Schewernitzky, Einfluß der Länge von Flankenkehlnähten auf ihre Festigkeit. Bericht von C. J. Hoppe. Elektroschweißung 4 (1933), S. 215.

führen zu geringeren Dauerfestigkeiten. Der Dauerbruch entsteht ja in der Regel nicht im Schweißgut, sondern im anschließenden Werkstoff, ausgehend von den Nahtenden[14]).

Mit Hilfe der eindimensionalen Untersuchungsmethode sind noch weitere Überlappungsschweißungen behandelt worden. So hat Kalina[15]) die Spannungsverteilung in einer axial beanspruchten Überlappungsschweißung mit unterbrochenen Flankennähten (Bild 6) ermittelt und hierbei von der Differenzenrechnung Gebrauch gemacht. Die Ergebnisse zeigen, daß solche Nähte ungünstiger wirken als durchlaufende Nähte gleicher, nutzbarer Scherfläche. Diese Erkenntnis steht im Einklang mit den Ergebnissen von Dauerversuchen.

In einem Aufsatz über die Festigkeit der Schweißverbindungen hat Jäger (Jezek)[16]) den Versuch unternommen, mit Hilfe idealisierter Spannungs-Dehnungslinien der Werkstoffe (Bild 7) die statische Festigkeit einer axial beanspruchten Überlappungsschweißung mit Flankennähten abzuschätzen. Hierbei wird die Schweißverbindung eigenspannungsfrei vorausgesetzt, die Änderung der Werkstoffeigenschaften in der Nahtzone bleibt unberücksichtigt, und es wird angenommen, daß der Eintritt des bildsamen Zustandes in den Stäben lediglich von der Größe der mittleren Querschnittspannung, in den Nähten bloß von der Größe der Scherspannung des Kehlschnittes abhängt. Bild 7b zeigt den Verlauf der Nahtspannungen ϱ für eine Laststufe, unter der die Gleitgrenze des Nahtwerkstoffes bereits überschritten und das Fließgebiet von beiden Nahtenden aus vorgedrungen ist.

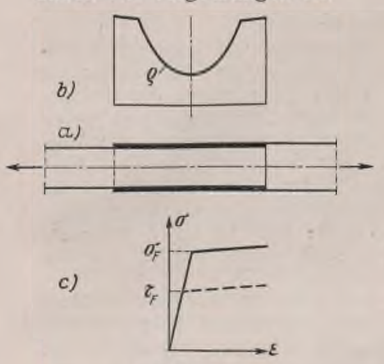


Bild 7.

a) Stabüberlappung.
b) Verlauf der mittleren Nahtscherspannungen.
c) Arbeitslinien $\sigma=f(\varepsilon)$ des Mutterwerkstoffes und $\tau=f(\gamma)$ des Nahtwerkstoffes.

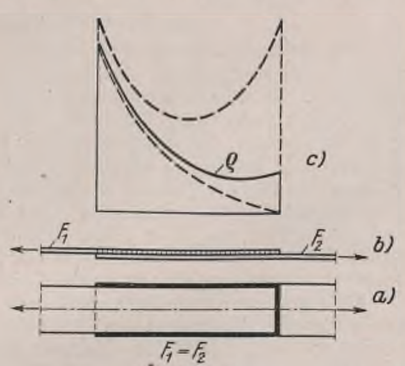


Bild 8.

b) Axiale Beanspruchung, Flanken- und Stirnkehlnähte. Das Zusammenwirken von Stirn- und Flankenkehlnähten in einer axial beanspruchten Laschenverbindung wurde experimentell und theoretisch bereits von H. Smith[4]) behandelt. Mit einfachsten Mitteln durchgeführte Untersuchungen veranlaßten ihn, der Stirnkehlnaht einen verhältnismäßig größeren Anteil der zu übertragenden Gesamtlast zuzuweisen, als ihr auf Grund der nutzbaren Schweißfläche zukommt, und zwar ermittelt er ihren Anteil so, daß er die Schweißfläche der Flankennähte nur mit ihrem halben Betrage in Rechnung stellt.

R. Kalina hat in seiner Abhandlung Zusammenwirken von Stirn- und Flankenkehlnähten[17]) eine theoretische Lösung des Problems, unter Zugrundelegung eindimensionaler Spannungszustände, gegeben (Bild 8). Die Art der Verteilung der zu übertragenden Kräfte auf die Flanken- und die Stirnkehlnaht hängt vom Verformungswiderstand dieser Nähte ab. Da über die Nachgiebigkeit von Kehlnähten in Richtung senkrecht zur Nahtachse noch keine experimentellen Ergebnisse vorlagen, mußte der Verformungswiderstand der Stirnkehlnaht geschätzt werden. Von diesem Schätzwerte hängt sowohl die Kraftaufteilung als auch der Verlauf der Scherspannungen in den Flankennähten ab. Bild 8c zeigt die Verteilung der Spannungen in den Flankennähten für den Fall, daß beide Stäbe gleichen Querschnitt besitzen. Die strichlierten Verteilungslinien gehören zwei Grenzfällen zu, nämlich der Stirnnaht ohne Verformungswiderstand (gleichbedeutend mit nicht vorhandener Stirnnaht) und der vollkommen unnachgiebigen Stirnnaht. Die Verteilungslinie bei nachgiebiger Stirnnaht liegt dazwischen.

Teilt man die Kraft, entsprechend der üblichen Berechnungsweise, gleichmäßig auf die gesamte vorhandene nutzbare Nahtscherfläche auf, so wird, nach den Untersuchungsergebnissen zu schließen, der so erhaltene Durchschnittswert der Nahtspannung sowohl in der Stirnnaht als auch in den Flankennähten überschritten: in der Stirnnaht deshalb, weil diese einen größeren Kraftanteil übernimmt, als ihr nach der Größe ihrer Scherfläche zugedacht wird; in den Flankenkehlnähten aber ergeben sich örtliche Überschreitungen des Durchschnittswertes zufolge der stark ungleichmäßigen Verteilung dieser Spannungen über die Nahtlänge. Hierbei liefert diese eindimensionale Methode über die ganze Länge der Stirnnaht gleichbleibende Zugspannungen. Die Ergebnisse von Spannungsmessungen hingegen lassen darauf schließen[18]), [20]), daß diese Spannungen nicht gleichmäßig verteilt, sondern in Nahtmitte größer sind. Auch bei statischen Versuchen mit Prüfkörpern, bei welchen der Bruch in der Naht eintrat, entstand er häufiger in der Nahtmitte[18]).

Aus der Betrachtung der statischen Einzelfestigkeiten von Flanken- und Stirnkehlnähten hat Dustin[18]) gefolgert, daß es bei Flachstabanschlüssen zur vollen Erreichung der statischen Festigkeit des Mutterwerkstoffes genüge, den Flankennähten eine Länge gleich der 0,35-fachen Stabbreite zu geben, sofern am Stabende eine über Stabdicke reichende, durchgehende Stirnnaht vorgesehen wird. Versuche zeigten, daß diese Länge mit 0,37 der Stabbreite zu wählen ist. Im Falle dynamischer Beanspruchung aber ist auch auf den Spannungszustand der Stäbe und Laschen zu achten[19]). Dieser wird günstiger, wenn man die Länge der Flankennähte noch größer wählt.

Wie sehr im übrigen die gleichzeitig angeordnete Stirnnaht eine Verbesserung des Spannungszustandes gegenüber der Verschweißung mit Flankenkehlnähten allein ergibt, zeigen die folgenden Bilder 9a u. b, in welchen der experimentell ermittelte Spannungsverlauf für zwei axial beanspruchte Laschenverbindungen wiedergegeben ist. Diese Spannungsermittlungen wurden von Hollister und Gelman[20]) auf Grund von Dehnungsmessungen durchgeführt. Über diese Versuchsergebnisse hat auch Hertwig[11]) berichtet. Bild 9a stellt eine Laschenverbindung mit Flankenkehlnähten, Bild 9b eine solche mit Flanken- und Stirnkehlnähten dar. In Bild 9a ist der Verlauf der Normalspannungen für einen Stabquerschnitt vor Laschenbeginn und sodann auch für den Querschnitt in Laschenmitte dargestellt. In diesen Schnitten sind die Normalspannungen stark ungleichmäßig verteilt, mit großen Spannungsspitzen an den Stab- und Laschenrändern. In Bild 9b ist der Verlauf dieser Normalspannungen für die gleichen Schnitte zu sehen. Er ist viel gleichmäßiger, und diese Schweißverbindung wird daher auch eine höhere Dauerfestigkeit aufweisen als die Verlaschung mit Flankenkehlnähten allein.

Allerdings dürfen wir die günstige Wirkung der Stirnkehlnaht nicht überschätzen. Ein erschöpfendes Bild der Spannungsverhältnisse in einer solchen Laschenverbindung vermag uns auch diese Spannungsermittlung, die auf Grund von Dehnungsmessungen an den Staboberflächen durchgeführt wurde, noch nicht zu geben. Wichtige Punkte sind ja unzugänglich, außerdem besitzen die Dehnungsmesser zu große Meßlängen, um bei der starken Veränderlichkeit des Spannungszustandes wirklich die größten Dehnungen feststellen zu können. Im übrigen ist der Spannungszustand örtlich ein vorwiegend räumlicher. Hollister und Gelman haben auch die ermittelten Scherspannungen der Flankennähte abgetragen; bei den vorgenommenen Extrapolationen wurde auf das theoretische Ergebnis der kettenlinienförmigen Verteilung Rücksicht genommen.

c) Beanspruchung auf Biegung. Unter der Annahme linearer Verteilung der Biegespannungen hat Jäger auf Biegung beanspruchte Laschenverbindungen untersucht, und zwar sowohl für den Fall, daß nur Flankenkehlnähte vorgesehen werden (Bild 10b)[21]), als auch im Falle der Verschweißung mit Flanken- und Stirnkehlnähten (Bild 10a)[22]). In jeder Naht entstehen zur Nahtrichtung parallele als auch senkrechte Scherspannungskomponenten, die in Bild 10 mit ϱ bzw. $\bar{\varrho}$ bezeichnet wurden. Bei baupraktischen Ausführungen von Laschenverbindungen sind die Flankennähte zumeist wesentlich kürzer als die Stirnnähte, weshalb die ersteren dann hauptsächlich in der Längsrichtung, die letzteren aber vorwiegend in der Querrichtung beansprucht werden. Beide Untersuchungen setzen voraus, daß die Stabfuge unverschweißt bleibt. Wird zwischen

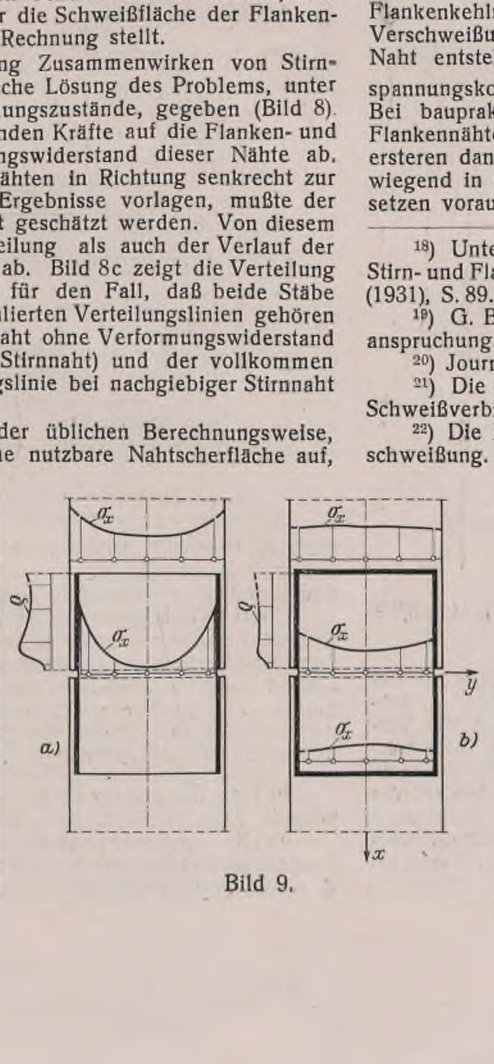


Bild 9.

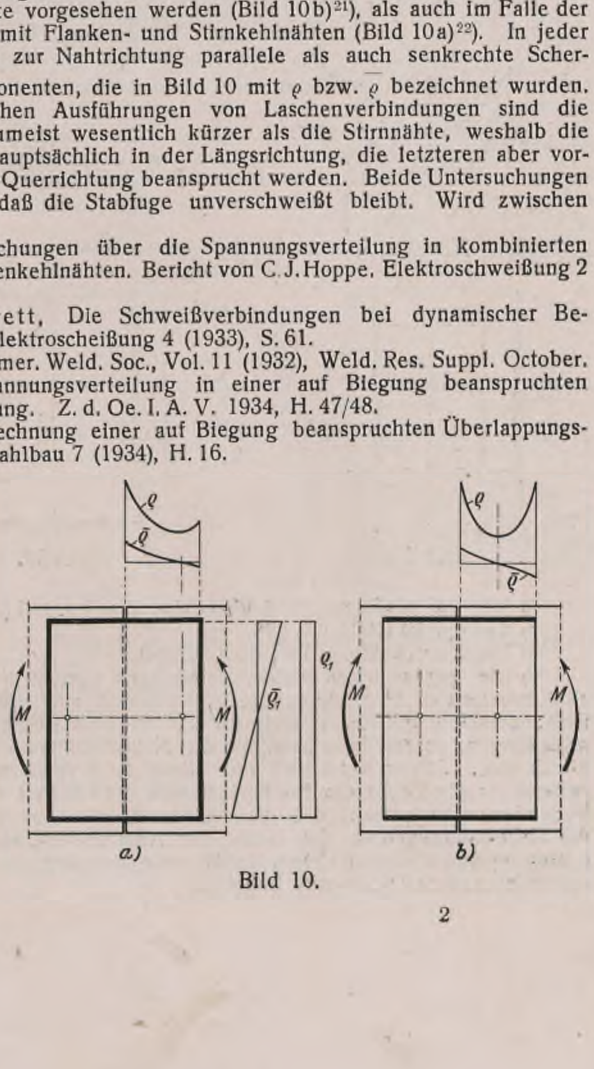


Bild 10.

[14]) Bericht des Kuratoriums für Dauerfestigkeit im Fachausschuß für Schweißtechnik, S. 25. VDI-Verlag 1935.

[15]) Die Spannungsverteilung in unterbrochenen Schweißnähten. Wasserwirtschaft 1932, Heft 30/31.

[16]) Wasserwirtsch. 1933, Heft 7/8.

[17]) Stahlbau 7 (1934), H. 13.

[18]) Untersuchungen über die Spannungsverteilung in kombinierten Stirn- und Flankenkehlnähten. Bericht von C. J. Hoppe. Elektroschweißung 2 (1931), S. 89.

[19]) G. Bierett, Die Schweißverbindungen bei dynamischer Beanspruchung. Elektroscheißung 4 (1933), S. 61.

[20]) Journ. Amer. Weld. Soc., Vol. 11 (1932), Weld. Res. Suppl. October.

[21]) Die Spannungsverteilung in einer auf Biegung beanspruchten Schweißverbindung. Z. d. Oe. I. A. V. 1934, H. 47/48.

[22]) Die Berechnung einer auf Biegung beanspruchten Überlappungsschweißung. Stahlbau 7 (1934), H. 16.

die Stabenden eine Stumpfnaht eingelegt, so ändert sich das Spannungsbild. Dieser Fall ist bisher noch nicht untersucht worden, obwohl er im Rahmen der hier zugezogenen Näherungen unschwer zu erledigen wäre.

Damit sind die bemerkenswerteren, unter Zugrundelegung eindimensionaler Spannungszustände bzw. linearer Spannungsverteilungen durchgeführten rechnerischen Untersuchungen von Überlappungs- und Laschenverbindungen besprochen worden. Soweit es sich hierbei um Laschenverbindungen handelt, sind immer über die Stabbreite reichende Rechtecklaschen vorausgesetzt.

Diese mit den einfachsten Mitteln durchgeführten Untersuchungen stellen nur einen ersten Schritt zur schärferen Erfassung der Lastspannungen in Kehlnahtverbindungen dar und können zur vergleichenden Abschätzung der größten Nahtspannungen herangezogen werden.

2. Schärfere Untersuchungen.

Jäger hat axial beanspruchte Stabüberlappungen unter Zugrundelegung ebener Spannungszustände untersucht. In der Abhandlung Der Spannungszustand in einer Überlappungsschweißung mit Stirn- und Flankenkehlnähten[23]) wird eine Überlappung, verschweißt durch zwei Flankennähte und eine Stirnnaht, behandelt (Bild 11). Zur Beschreibung des ebenen Spannungszustandes der Stäbe innerhalb der Überlappung werden Näherungsansätze mit einer beschränkten Zahl von Freiwerten herangezogen. Die Nachgiebigkeit der Flankennähte in Nahtrichtung wird wie bei der eindimensionalen Untersuchung berücksichtigt; die größten Scherspannungen des Nahtkehlschnittes ergeben sich demgemäß an den Nahtenden. Die geometrischen Bedingungen, die längs der Nähte zwischen den Formänderungen der dort zusammengeschlossenen Teile bestehen müssen, können mit den gewählten einfachen Ansätzen lediglich in den vier Eckpunkten befriedigt werden. Bild 11 b zeigt den Verlauf der Spannungen längs *A—A*.

In einer zweiten Abhandlung, Der Spannungszustand in Flankenkehlnahtverbindungen[24]), wird ein Sonderfall der eben besprochenen Aufgabe, nämlich die Überlappung mit Flankenkehlnähten allein, behandelt. Der Lösungsgang ist ein ganz ähnlicher wie bei der ersten Arbeit. Durch den Fortfall der Stirnnaht können die Randbedingungen längs der Flankennähte schon besser erfüllt werden.

In einer dritten Abhandlung, Die durch eine Axsialkraft beanspruchte Flankenschweißung als ebenes Problem[25]), wird die zuletzt besprochene Aufgabe (Bild 12) nochmals, und zwar mit erweiterten Näherungsansätzen bearbeitet. Es ist dies die erste Untersuchung einer Flankenkehlnahtverbindung, bei der die Randbedingungen für die Scherspannungen des Kehlschnittes — Scherspannung an den Nahtenden Null — erfüllt werden. Allerdings ergibt sich dieser Nullwert nicht aus einer schärferen Erfassung des Verzerrungszustandes, sondern er wurde durch eine geänderte Auslegung des funktionellen Zusammenhanges zwischen Nahtspannungen und gegenseitigen Blechverschiebungen[26]), bei entsprechender Änderung des Verlaufes der letzteren, erzwungen. Bild 12b zeigt die Verteilung der Normalspannungen längs *A—A* sowie den Verlauf der Nahtscherspannungen, der mit dem von Hertwig vorausgesagten (Bild 1f) gut übereinstimmt.

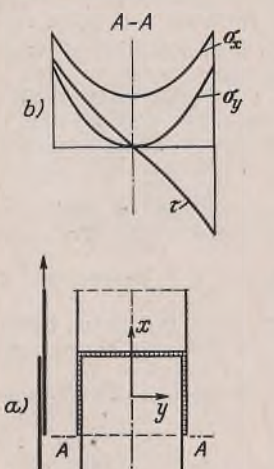


Bild 11.

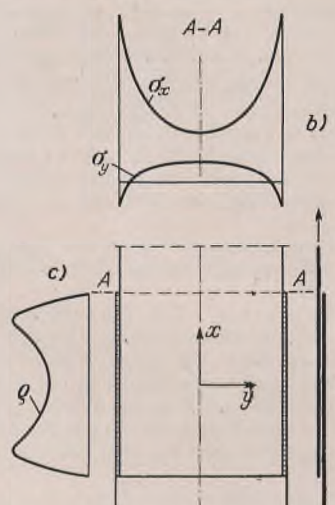


Bild 12.

[23]) Sitz.-Ber. d. Wiener Ak. d. Wiss., Abt. IIa, Bd. 146 (1937), Heft 9/10.

[24]) Bauing. 19 (1938), S. 228.

[25]) Elektroschweißung 10 (1939), Heft 9.

[26]) Die gegenseitigen Stabverschiebungen werden wieder nach der eindimensionalen Methode bestimmt, verlaufen also nach einer Kettenlinie; dasselbe gilt dann auch für die zweiten Ableitungen der Verschiebungen, so daß diese ebenfalls den Nahtscherspannungen verhältnisgleich sind. Jäger betrachtet nun diese letztere Beziehung als maßgebend für die Größe der Nahtspannungen und ändert den Verlauf der Verschiebungen so ab, daß die zweiten Ableitungen und damit auch die Nahtspannungen an den Nahtenden Null werden, während die Verschiebungen an diesen Orten, in Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen, ihre Größtwerte behalten.

Die vorliegende Lösung stellt bereits einen bedeutsamen Fortschritt in der schwierigen Untersuchung von Überlappungsschweißungen mit Flankennähten dar, ist aber noch immer als Näherungslösung anzusprechen. Nicht bloß wegen der Vereinfachungen beim Ansatz der längs der Schweißnähte geltenden Formänderungsbedingungen, sondern auch deshalb, weil der Spannungs- und Verzerrungszustand der Stäbe (so wie bei den beiden vorgenannten Arbeiten) nur innerhalb der Überlappung, ohne Rücksicht auf den bestehenden Zusammenhang mit den außerhalb der Überlappung liegenden Stabteilen ermittelt wurde. Damit konnte aber die Wirkung der geometrischen Kerbe der Stäbe an den Nahtenden noch nicht voll erfaßt werden. Eine weitere Näherung bedeutet die in allen drei Abhandlungen vorgenommene Übertragung der Ergebnisse auf eine Laschenverbindung; denn damit erhält man für die Laschen keinen zur Mitte symmetrischen Spannungszustand.

Vom rein wissenschaftlichen Standpunkte aus wäre zu wünschen, daß die Ermittlung der Lastspannungen in Überlappungsverbindungen und in verlaschten Stößen im Falle der Idealisierung auf ebene Spannungszustände noch weiter vervollkommnet und einer elastizitätstheoretisch strengen Lösung zugeführt werden könnte. Da die Voraussetzungen für ebene Spannungszustände ohnehin nur gegeben sind, wenn die Dicken der Stäbe und Laschen als sehr gering vorausgesetzt werden, könnte auch auf die besondere Berücksichtigung der Formänderung der Nähte verzichtet werden, womit sich die Zuziehung mehr oder minder willkürlicher Annahmen erübrigen würde.

II. Geschweißte Blechträger.

Die Verbundwirkung geschweißter Blechträger ist eine verhältnismäßig vollkommene, da die Schweißnähte nur geringe Nachgiebigkeit aufweisen. In der Praxis werden diese Träger auch immer wie einheitliche Träger berechnet. Im Falle eingehenderer Untersuchungen ist es aber notwendig, die Minderung der Verbundwirkung zufolge der Verformung der Nähte zu berücksichtigen. Wir erhalten dann eine Verteilungslinie für die Biegespannungen, die Rücksprünge in der Höhe der Schweißnähte besitzt (Bild 13 b). Die Randspannungen des Stegbleches sind also größer als beim einheitlichen Träger, und im Falle weicherer Nähte können diese Spannungen örtlich noch größer werden als die Biegespannungen an den äußeren Gurträndern.

Den geschweißten Blechträger mit durchlaufenden Kehlnähten hat erstmalig Kalina[27]) im Rahmen der technischen Biegungslehre behandelt. Bild 13 zeigt den errechneten Verlauf der Nahtscherspannungen ϱ, der Randspannungen σ_{St} des Stegbleches und σ_R des Gurtes für den mittleren Teil eines Blechträgers mit konstantem Querschnitt, belastet durch eine Einzellast in Feldmitte. Die Linie der Nahtscherspannungen ist wegen der Nachgiebigkeit der Schweißnähte nicht gleichlaufend mit der Querkraftslinie; sie weist am Lastorte keinen Sprung, sondern einen stetigen Übergang auf. Die Linie der Randspannungen des Stegbleches besitzt aus demselben Grunde im Bereiche des Lastortes eine vorspringende Spitze. Trotzdem sich die Untersuchung auf die vereinfachenden Annahmen der technischen Biegungslehre stützt, entsprechen die Ergebnisse im allgemeinen auch strengeren Anforderungen. Da die Schweißnähte durchlaufen, entstehen nämlich in Stabrichtung keine Unstetigkeiten im Kraftfluß, und die Spannungsverhältnisse im Träger können hinreichend genau durch die elementare Berechnungsweise erfaßt werden. Man hat zwar befürchtet, daß bei breiteren Gurtplatten schon ein wesentlicher Abfall der Biegespannungen gegen die seitlichen Gurtränder hin eintreten könne, und die übliche Berechnungsweise daher zu kleine Spannungsgrößtwerte liefern würde. Nun ist wohl die Verteilung der Biegespannungen in der Querrichtung eine ungleichmäßige, aber, wie später noch näher begründet wird, sind die damit zusammenhängenden Spannungserhöhungen in Gurtmitte bei den üblichen Bauformen der Blechträger verhältnismäßig unbedeutend.

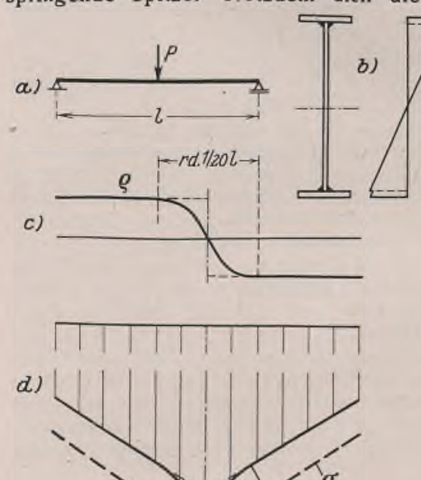


Bild 13.

Über die Berechnung von Blechträgern mit unterbrochenen Schweißnähten liegen mehrere Untersuchungen vor, die alle unter den vereinfachenden Annahmen der technischen Biegungslehre durchgeführt wurden. Als erster hat sich A. Sokolow[28]) mit diesem Problem befaßt. Zur Ermittlung der Nahtspannungen teilt er jedes Nahtstück in drei Gebiete ein. Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten führen zur Lösung der Aufgabe.

[27]) Der Blechträger mit durchlaufenden Schweißnähten. Wasserwirtsch. 1933, Heft 7/8.

[28]) Die Spannungsverteilung in Schweißstellen beim Biegen und Spannungsverteilung in einer punktförmigen Schweißstelle beim Biegen. Z. techn. Physik, Leningrad, Bd. 3 (1933), S. 145 bzw. 1091.

R. Kalina[29]) hat ebenfalls die Differenzenrechnung angewendet. In seiner Untersuchung wird die Nachgiebigkeit der Schweißnähte berücksichtigt. Es ist ihm im Rahmen der obigen Voraussetzungen gelungen, die vollständige Lösung des Problems in geschlossener Form zu entwickeln. Er erhält für jedes Nahtstück einen kettenlinienförmigen Verlauf der Nahtscherspannungen mit Spannungsspitzen an beiden Enden; die Linie der Randspannungen des Stegbleches zeigt sägeförmigen Verlauf. In Bild 14 sind Teile der Linie der Nahtscherspannungen ϱ sowie der Randspannungen σ_{St} des Stegbleches dargestellt, und man erkennt bereits die ungünstige Wirkung der unterbrochenen Schweißnähte. Die wirklichen Spannungsverhältnisse sind noch ungünstiger; hier liegt wieder ein Fall vor, in welchem mit der Idealisierung auf stabförmige Körper die wirklichen Spannungszustände nicht mehr genügend genau erfaßt werden können. Versuche von Hochheim[30]) haben gezeigt, daß die Dauerfestigkeit von Trägern mit unterbrochenen Schweißnähten wesentlich geringer ist als die von Trägern mit durchlaufenden Nähten, und nach unseren Vorschriften dürfen bekanntlich im Brückenbau auch keine unterbrochenen Nähte ausgeführt werden. Da bei den Versuchen von Hochheim verhältnismäßig hohe Träger verwendet worden sind, hat Bierett[31]) weitere Versuche durchgeführt, und zwar mit mehrfach geschlitzten Walzträgern. Hierbei wurden große Spitzenwerte der Hauptschubspannungen festgestellt, und Bierett weist darauf hin, daß die unter diesen Beanspruchungen bereits örtlich auftretenden bleibenden Formänderungen die Dauerfestigkeit im Falle wechselnder Beanspruchung sehr ungünstig beeinflussen müssen.

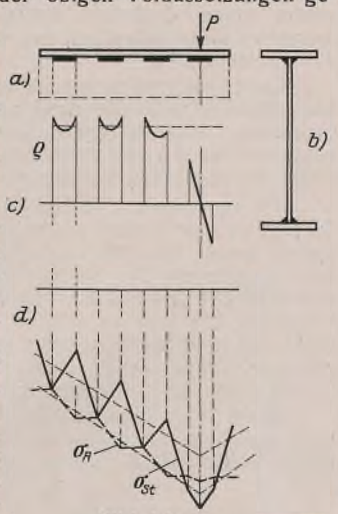


Bild 14.

Die Bedingungen für die möglichst gleichmäßige Verteilung der Gurtspannungen über die Gurtbreite sind bei geschweißten Trägern ungünstigere als bei genieteten Trägern. Bei den ersteren werden ja die in die Gurtplatte gelangenden inneren Kräfte durch die Halsnähte in Gurtmitte übertragen, während bei den genieteten Trägern die Krafteintragung durch die günstiger im Gurt liegenden Kopfniete erfolgt. Es schien daher wichtig, Aufschluß über die Verteilung der Spannungen in den Gurten geschweißter Träger zu erlangen. Diese Aufgabe hat der Verfasser für Träger mit durchlaufenden Schweißnähten auf elastizitätstheoretischem Wege streng gelöst[32]). Die Nachgiebigkeit der Schweißnähte wurde berücksichtigt, die Ergebnisse wurden aber vergleichsweise auch unter Vernachlässigung der Nahtverformung ausgewertet. Bei nachgiebigen Nähten ergeben sich wieder Rücksprünge in den zur Stabachse parallelen Normalspannungskomponenten. Bild 15 zeigt den Verlauf der in Stabrichtung wirkenden Normalspannungen längs des lotrechten Mittelschnittes sowie längs der äußeren Gurtränder. Der Spannungsabfall von der Mitte gegen die seitlichen Gurtränder hin ist für das gewählte Beispiel ein bedeutender. Diese Spannungslinien betreffen aber einen sehr ungünstigen Fall, nämlich einen Balkenträger mit verhältnismäßig breiten Gurtplatten ($^1/_{10}$ der Stützweite), der in Feldmitte durch eine Einzelkraft belastet ist. Gegenüber der üblichen Berechnungsweise ergibt sich eine um 26% höhere Größtspannung. Die Auswertung der Untersuchungsergebnisse für Träger mit schmaleren Gurtplatten und für andere Belastungsweisen führt zu wesentlich günstigeren Ergebnissen. Im allgemeinen besteht daher kein zwingender Grund, von der üblichen Berechnungsweise abzugehen.

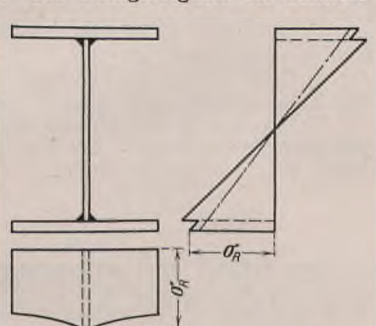


Bild 15.

Es sei noch bemerkt, daß auch Anhärtungen der Nahtzone Anlaß zu einer Erhöhung der Spannungen in Gurtmitte geben, allerdings erst dann, wenn der außerhalb der Härtungszone liegende Werkstoff die Fließgrenze erreicht.

III. Stabanschluß an ein Knotenblech.

Mit dem gegenständlichen Problem hat sich erstmalig Pilgram befaßt, und zwar versuchte er auf elastizitätstheoretischem Wege, unter Zugrundelegung ebener Spannungszustände, zu einer Lösung zu gelangen. Er behandelte zunächst den Anschluß eines axial beanspruchten Flachstabes mittels Flankenkehlnähten allein[33]). In dieser Untersuchung wurden sehr weitgehende Vereinfachungen zu Hilfe genommen, wie z. B. die Annahme starrer Knotenbleche und starrer Schweißnähte. Auf die Mängel dieser Arbeit hat Kohl[34]) in einer Zuschrift verwiesen, in der er auch über die Ergebnisse seiner Untersuchungen berichtet.

Kohl hat diese Ergebnisse auch in einer eigenen Abhandlung[35]) veröffentlicht. Es handelt sich wieder um eine Näherungslösung, und der erhaltene parabolische Verlauf der Nahtscherspannungen dürfte kaum der Wirklichkeit nahekommen. Auf Grund allgemeiner Betrachtungen schließt er, daß die Spannungsverhältnisse im Stabanschluß mit wachsendem Öffnungswinkel des Knotenbleches ungünstiger werden; Versuchsergebnisse haben diese Auffassung bestätigt.

In einer zweiten Arbeit[36]) hat Pilgram den axial beanspruchten Stabanschluß unter der Voraussetzung untersucht, daß zwei Flankenkehlnähte und eine Stirnnaht (Stabende) ausgeführt werden. Auch hier sind die zugezogenen Vereinfachungen zu weitgehend.

Pilgram hat das Problem des Stabanschlusses mit Flankenkehlnähten später nochmals aufgegriffen[37]). Er behandelt zunächst in schärferer Weise wieder den Stabanschluß an ein starr gedachtes Knotenblech. Zur Eingrenzung der Wirklichkeit zieht er sodann jene Spannungsverteilung heran, die sich ergibt, wenn das Knotenblech einen Stab bildet, dessen Abmessungen und elastische Eigenschaften mit denen des anzuschließenden Stabes übereinstimmen.

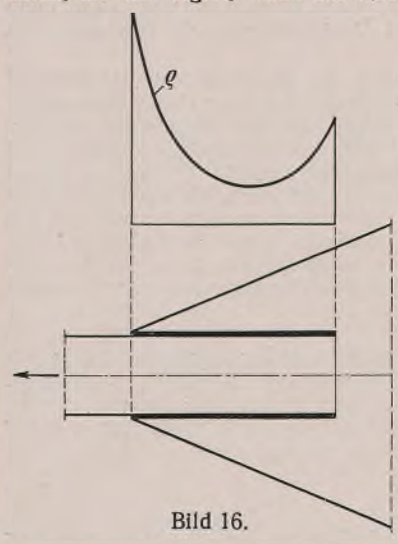


Bild 16.

Jäger[38]) hat den axial beanspruchten Stabanschluß mit Flankenkehlnähten unter Zugrundelegung eindimensionaler Spannungszustände untersucht. Das Knotenblech wurde hierbei als Stab mit linear veränderlicher Breite aufgefaßt. Die Verteilung der Nahtscherspannungen ist in Bild 16 dargestellt. Die Rechnung zeigt, daß die am Stabende auftretende Spitze der Nahtscherspannungen mit zunehmendem Öffnungswinkel des Knotenbleches größer wird.

Im Falle der Idealisierung auf ebene Spannungszustände konnte eine befriedigende Lösung bisher noch nicht gegeben werden.

IV. Stirnkehlnaht-Verbindungen.

Goelzer[39]), der wohl die erste Untersuchung einer Stirnkehlnahtverbindung veröffentlichte, hat als Nahtquerschnitt ein beliebiges Dreieck angenommen und den Spannungszustand der Naht als einen ebenen vorausgesetzt. Zur Beschreibung desselben hat er verschiedene Ansätze, die der Scheibengleichung $\Delta\Delta F = 0$ genügen, in Betracht gezogen, und schließlich lineare Ansätze für die Spannungskomponenten beibehalten. Sie sind so gewählt, daß die Randbedingungen des freien Nahtrandes (AB in Bild 17a) bereits erfüllt werden. Die Freiwerte der Ansätze werden dann so ermittelt, daß auch den Gleichgewichtsbedingungen an den belasteten Nahträndern AC und BC entsprochen wird. Wie bei allen späteren Untersuchungen, die sich auf die alleinige Betrachtung des Nahtkörpers beschränken und auf die Formänderungsbedingungen längs AC und BC keine Rücksicht nehmen, sind die Ergebnisse unbefriedigend.

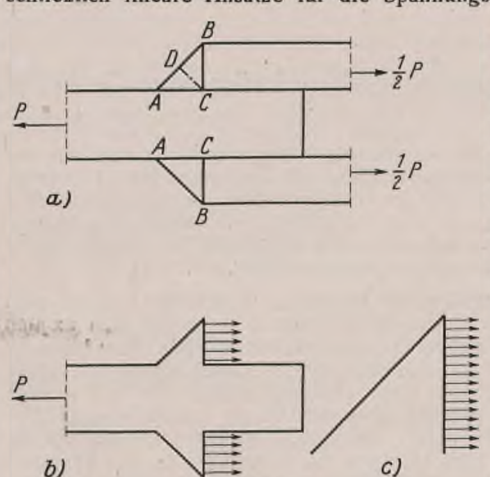


Bild 17.

[29]) Die Berechnung der Spannungsverteilung in Blechträgern mit unterbrochenen Schweißnähten. Sitz.-Ber. d. Wiener Akad. d. Wiss., Abt. II a, Bd. 143 (1934), Heft 3/4; Stahlbau 7 (1934), Heft 5.

[30]) Mitt. a. d. Forsch.-Anst. d. G.H.H., 1930 bis 32, S. 225.

[31]) Die Schweißverbindung bei dynamischer Beanspruchung. Elektroschweißung 4 (1933), S. 61.

[32]) Spannungsverteilung in geschweißten Blechträgern. Stahlbau 6 (1933), S. 98.

[33]) Beitrag zur Berechnung von Schweißverbindungen. Bauing. 11 (1930), S. 689.

[34]) Bauing. 11 (1930), Heft 52.

[35]) Über die Kraftverteilung in Flankenkehlnähten. Elektroschweißung 2 (1931), Heft 8.

[36]) Bauing. 12 (1931), S. 128.

[37]) Elektroschweißung 3 (1932), S. 231.

[38]) Die Spannungsverteilung in einem geschweißten Stabanschluß. Wasserwirtsch. 1932, Heft 30/31.

[39]) La résistance élastique des joints soudés. Le Génie Civil 93 (1928/2), S. 610.

Für die Laschenverbindung nach Bild 17 ergibt diese Rechnung beispielsweise linearen Verlauf der Schubspannungen längs AC, mit dem Spannungsnullwert im Wurzelpunkte C.

Hammond Smith[4]) und später O. Mies[40]) haben einachsige Spannungszustände angenommen und vorausgesetzt, daß die Spannungen im Nahtquerschnitt parallel zur freien Nahtkante AB verlaufen; sie haben damit dem Kraftstrom einen zweimaligen schroffen Richtungswechsel zugemutet. Die Ergebnisse dieser mit den einfachsten Mitteln durchgeführten Berechnungen weichen von der Wirklichkeit zum Teil stark ab.

N. Streletzky u. G. Nikolajeff[41]) haben den Spannungszustand im Nahtdreieck wieder als eben vorausgesetzt und die Naht als Konsole des Stabes (Bild 17b) betrachtet. Die Nahtränder BC werden als freiliegend aufgefaßt, und es wird angenommen, daß sie durch gleichmäßig verteilte, parallel zur Stabachse wirkende Kräfte belastet sind. Längs BC wird also auf die feste Verbindung mit der Lasche keine Rücksicht genommen; die längs BC wirkenden Schubspannungen bleiben außer Betracht. Die zur Beschreibung des Spannungszustandes entwickelten Spannungskomponenten beziehen sich aber tatsächlich auf einen Keil, belastet gemäß Bild 17c, und die Spannungsfunktion für diesen Fall war bereits bekannt[42]). Die vereinfachende Annahme hinsichtlich der Nahtbelastung längs BC, die Unmöglichkeit der Befriedigung der Formänderungsbedingungen längs dieses Nahtrandes und schließlich die bloße Betrachtung des Keiles, ohne Rücksicht auf die Kerben bei A und C, führen zu wenig befriedigenden Ergebnissen.

Auch Gran Olsson[43]) hat versucht, das gegenständliche Problem auf elastizitätstheoretischem Wege, unter Zugrundelegung ebener Spannungszustände, zu lösen. Er betrachtet wieder nur den Nahtkörper für sich. Zur Beschreibung des Spannungszustandes (gleichschenkliges Nahtdreieck) wird ein Potenzansatz mit verhältnismäßig wenigen Freiwerten herangezogen. Die Untersuchung führt zu einem bezüglich der Kehlschnittlinie CD (Bild 17a) symmetrischen Spannungszustand, unter welchem die Werkstoffanstrengungen in A und B Größtwerte, und zwar gleicher Höhe, erreichen. Nun bildet aber B eine ausspringende Ecke der Laschenverbindung und ist im vorliegenden Falle daher spannungsfrei; die größte Anstrengung tritt in Wirklichkeit, wie schon H. Smith[4]) erkannt hat, im Wurzelpunkte C auf.

Olsson[44]) hat dasselbe Problem später nochmals aufgegriffen und den Ansatz für die Airysche Spannungsfunktion, die den ebenen Spannungszustand der Stirnkehlnaht beschreiben soll, allgemeiner gehalten. Wären die Verschiebungen der Stab- und Laschenpunkte längs AC und BC bekannt, dann könnten auch die Formänderungsbedingungen längs dieser Ränder erfüllt werden.

[40]) Über die Spannungsverteilung in Stirnkehlnähten. Elektroschweißung 5 (1932), S. 141.
[41]) Calcul des soudures prismatiques à section triangulaire. Erste Mitt. d. Neuen Int. Verb. f. Mat.-Prüf., Zürich 1930, Gruppe D, S. 237.
[42]) Akira Miura, Spannungskurven in rechteckigen und keilförmigen Trägern. Berlin 1928.
[43]) Der ebene Spannungszustand der Schweißnaht. Bauing. 13 (1932), S. 294.
[44]) Elektroschweißung 4 (1933), Heft 7.

Eine befriedigende elastizitätstheoretische Lösung des gegenständlichen Problems konnte bisher nicht gefunden werden, und ohne gleichzeitige Erfassung des Spannungszustandes in Nähten, Stab und Laschen ist eine solche kaum denkbar. Zutreffendere Ergebnisse als die bisherigen strengeren Untersuchungen liefert die einfache Näherungsberechnung von Schaechterle[45]).

Wollen wir genaueren Aufschluß über die Spannungsverhältnisse in einer Stirnkehlnahtverbindung nach Bild 17a erhalten, so müssen wir die Ergebnisse experimenteller Spannungsermittlungen betrachten. Diesbezüglich sei auf die Veröffentlichungen von Bierett und Grüning[46]) sowie von Coker[47]) verwiesen.

Wie zu erwarten war, ergaben sich auf Grund der experimentellen Spannungsermittlungen die ungünstigsten Beanspruchungen bei C und sodann bei A. Aus Dauerversuchen ist ja auch bekannt[48]), daß (bei fehlerfreier Ausführung der Nahtübergänge) Anbrüche zuerst bei C und späterhin auch bei A auftreten. Im Hinblick auf die Härtungserscheinungen, besonders bei festeren Stählen, ist hervorzuheben, daß hier die Orte größter Werkstoffanstrengung zugleich auch Orte größter Härtung sind[49]); zufolge der Erhöhung der Fließgrenze in diesen Gebieten liegen ungünstige Bedingungen für einen plastischen Abbau der Spannungsspitzen vor.

Es sei noch kurz auf ein Verfahren von N. C. Kist[50]) hingewiesen, nach welchem die statische Festigkeit von Stirnkehlnahtverbindungen rechnerisch ermittelt werden kann. Hierbei wird die Hypothese der unveränderlichen Gestaltänderungsenergie als Bruchhypothese verwendet; als Bruchfläche wird die Kehlschnittsebene angesehen. Es kommt jetzt darauf an, welchen Winkel die Richtungslinie der Spannungsresultante S (Bild 18) des Kehlschnittes mit dieser Ebene einschließt, denn die Bruchfestigkeit der Naht hängt von diesem Winkel ab. Derselbe wird im Sinne der Plastizitätstheorie nun so bestimmt, daß die zu übertragende Kraft P ihren Größtwert erreicht. Unter Berücksichtigung der Reibung zwischen Stab und Laschen (Reibungsziffer 0,2) erhält Kist als Traglast der Verbindung $P = 0{,}91\,(2 f_s)\,\sigma_B$, worin f_s die Fläche des Kehlschnittes einer Stirnnaht und σ_B die am Probestabe ermittelte Bruchfestigkeit des Schweißgutes bedeutet.

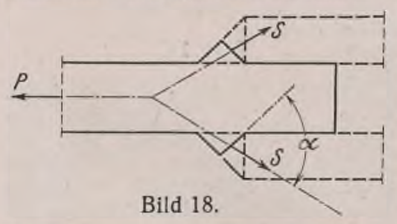


Bild 18.

(Schluß folgt.)

[45]) Die zulässigen Spannungen bei genieteten und geschweißten Stahlbrücken. Bautechn. 10 (1932), S. 604.
[46]) Spannungszustand und Festigkeit von Stirnkehlnahtverbindungen. Stahlbau 6 (1933), S. 169.
[47]) The Stress Analysis of Fusion Joints. Symposium on the Welding (London, May 1935). Group IV.
[48]) O. Graf, Über die Dauerfestigkeit von Schweißverbindungen. Stahlbau 6 (1933), S. 89.
[49]) G. Bierett, Zur Festigkeitsfrage bei der Schweißung festerer Baustähle. Elektroschweißung 9 (1938), S. 121.
[50]) Berechnung der Schweißnähte unter Berücksichtigung konstanter Gestaltänderungsenergie. Int. Ver. f. Brückenb. u. Hochbau, II. Kongreß (Berlin 1936), Vorbericht S. 521.

Die Festigkeit leichtgekrümmter Druckstäbe aus Stahl bei schwingender Belastung.

Von Dozent Dr.-Ing. habil. Karl Jäger, Wien.

Übersicht: Die nachfolgende Untersuchung zeigt die Ermittlung der kritischen Belastung (Tragfähigkeit) leichtgekrümmter, stählerner Druckstäbe bei schwellender und wechselnder Beanspruchung. Man erhält als Ergebnis, daß die durch zeitlich rasch veränderliche Normalkräfte bewirkte Herabsetzung der Stabilitätsgrenze bei schlanken Druckstäben ein recht erhebliches Ausmaß erreicht.

Das Problem der Tragfähigkeit stählerner Druckstäbe wurde vom Verfasser für den Fall einer unendlich langsam anwachsenden axialen Druckbelastung (statische Festigkeit) eingehend behandelt[1]). Zum besseren Verständnis der nachfolgenden Ausführungen werden die grundsätzlichen Ergebnisse dieser Untersuchung kurz wiedergegeben. Ein auf axialen Druck und Biegung beanspruchter Stab aus einem elastisch-plastischen Werkstoff (Stahl) besitzt für kleine Normalkräfte zwei mögliche Gleichgewichtslagen, wobei der Stab im Zuge der Belastung die der kleineren Ausbiegung entsprechende primäre Gleichgewichtslage einnimmt. Mit zunehmender Belastung nähern sich diese beiden möglichen Gleichgewichtslagen und fallen unter der kritischen Last zusammen. Die kritische Last ist demnach dadurch gekennzeichnet, daß gerade noch Gleichgewicht zwischen äußeren und inneren Kräften vorhanden ist und stellt also die obere Grenze des Tragvermögens für den Stab dar. In meinem Buche[1]) wurden die wichtigsten, praktisch vorkommenden Fälle axial gedrückter und auf Biegung beanspruchter Stahlstäbe eingehend untersucht und die entsprechenden kritischen Lasten P_{kr} bzw. die kritischen Axialspannungen $\sigma_{kr} = P_{kr}/F$ in Abhängigkeit vom Ausmittigkeitsmaß $m = a/k$ — hier bedeuten $a = M_{kr}/P_{kr}$ (M_{kr} . . . kritisches Biegemoment) die Ausmitte und k die dem Angriffspunkt der Druckkraft gegenüberliegende („verschränkt gemessene") Kernweite des Querschnitts — und von der Stabschlankheit λ für die zur Anwendung gelangenden Querschnittsformen in Zahlentafeln und Schaubildern für die Stahlsorten St 37 und St 52 dargestellt. Es ist ferner zu beachten, daß der Stab beim Eintritt des kritischen Gleichgewichtszustandes bereits bleibend verformt ist, wobei die Ausdehnung des Fließgebiets mit abnehmender Schlankheit und wachsender Ausmitte a zunimmt. Als untere Grenze für die kritische Spannung ist daher jene Axialspannung σ_n anzusehen (ich habe diesen Wert in meinem Buche als nutzbare Axialspannung des elastischen Bereiches bezeichnet), unter welcher am Biegedruckrand bzw. bei unsymmetrischen Querschnitten u. U. auch am Biegezugrand des Querschnitts gerade die Fließgrenze σ_F erreicht wird, wobei die Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes bis zur Fließgrenze vorausgesetzt wird (Ideal-Stahl). Bei schwach gekrümmten Druckstäben ist nun die Ausmitte a des Kraftangriffs sehr klein, und man darf dann insbesondere bei schlanken Stäben (s. mein Buch) die kritische Spannung durch die etwas tiefer gelegene Axialspannung σ_n ersetzen; man bleibt damit auf der sicheren Seite der Ergebnisse und vermeidet außerdem die ziemlich verwickelten Rechnungen innerhalb des elastisch-plastischen Bereichs.

Bei zeitlich rasch veränderlicher Belastung tritt nun bekanntlich eine besonders bei schlanken Stäben merkliche Erhöhung der Ausbiegung des Stabes ein, so daß hier die Beanspruchung bei Vorhandensein einer axialen Druckkraft weitaus ungünstiger sein kann als bei der statischen Beanspruchung. Hierdurch wird eine Herabsetzung der kritischen Last (Stabilitätsgrenze) bedingt, deren Größe für die beiden Sonderfälle „reine Schwellbeanspruchung" und „reine Wechselbeanspruchung" in den beiden nachfolgenden Abschnitten bestimmt werden soll.

[1]) K. Jäger (Ježek), Die Festigkeit von Druckstäben aus Stahl. Wien 1937, Jul. Springer.

1. Reine Schwellbeanspruchung.

In Bild 1 ist ein leichtgekrümmter Stab dargestellt, dessen Achse im unverformten Zustande durch die Gleichung

$$u = u_0 \cdot \sin \frac{\pi x}{l} \tag{1}$$

festgelegt ist, wobei voraussetzungsgemäß der mittlere Krümmungspfeil u_0 nur einen kleinen Bruchteil der Stablänge betragen soll. Die Querschnittsform des Stabes sei vorläufig noch beliebig, jedoch entspricht die Bildebene einer Hauptträgheitsebene. Die Belastung erfolgt gemäß Bild 1 durch eine in den beiden Endquerschnitten mittig angreifende Normalkraft N, deren zeitliche Änderung durch das Gesetz

$$N = P\,(1 + \cos \omega t) \tag{2}$$

gegeben ist, was einer reinen Schwellbeanspruchung entspricht ($N_{\min} = 0$, $N_{\max} = 2P$). In Gl. (2) bedeutet ferner t die Zeit und ω die Kreisfrequenz der Schwingung.

Der Stab wird zufolge dieser äußeren Belastung auf axialen Druck und Biegung beansprucht. Seine Ausbiegung an irgendeiner Stelle im Abstande x vom oberen Ende wird mit y bezeichnet. Infolge der zeitlich veränderlichen Normalkraft treten Schwingungen sowohl in der Längsrichtung des Stabes (Längsschwingungen) als auch quer zur Stabachse (Querschwingungen) auf. Wegen des Trägheitswiderstandes eines Stabteilchens gegen Verschiebung und Drehung treten zusätzliche Trägheitskräfte in Richtung und quer zur Stabachse als auch ein Drehmoment auf. Durch die Längsbewegung des Teilchens ändert sich nun die Normalkraft längs der Stabachse, doch kann man — auf die Rechnung selbst soll hier nicht eingegangen werden — leicht zeigen, daß die Zunahme der Normalkraft von den Stabenden gegen die Stabmitte zu bei den hier betrachteten, baupraktischen Erwägungen entsprechenden Frequenzen von höchstens fünf Schwingungen je Sekunde so geringfügig ist (die Normalkraft ändert sich um höchstens 1% ihres Endwertes), daß sie ohne weiteres vernachlässigt werden kann; hiermit wird auf die zwar zwangläufig vorhandene, aber äußerst schwache Kopplung zwischen Längs- und Querschwingungen bewußt verzichtet[2]). Da ferner die nachfolgende Untersuchung im Bereiche der niedrigsten Eigenfrequenz durchgeführt wird, kann auch der Einfluß der Rotationsträgheit als unbedeutend vernachlässigt werden.

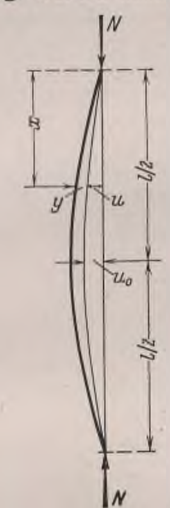


Bild 1.

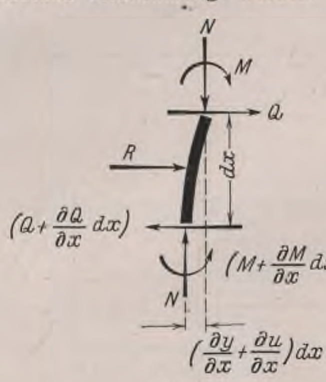


Bild 2.

Auf ein Stabelement von der Länge dx wirkt dann gemäß Bild 2 ein veränderliches Biegemoment M, eine veränderliche Querkraft Q, eine unveränderliche Normalkraft N und eine quer zur Stabachse gerichtete Rückstellkraft $R = \mu \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, nachdem die Trägheitswiderstände in Richtung der Stabachse und gegen Drehung des Teilchens nach den obigen Ausführungen vernachlässigt werden können.

In den nachfolgenden Rechnungen bedeuten ferner:

$F =$ die Querschnittsfläche des Stabes,
$J =$ das Trägheitsmoment des Stabquerschnitts für die zur Momentenebene senkrechte Hauptträgheitsachse,
$W_d =$ das Widerstandsmoment des Querschnitts für den Biegedruckrand,
$\gamma =$ das Einheitsgewicht des Werkstoffs,
$g =$ die Schwerebeschleunigung,
$\mu = \frac{\gamma}{g} \cdot F =$ die Stabmasse je Längeneinheit,
$E =$ das Elastizitätsmaß des Werkstoffs,
$\sigma_F =$ die Fließgrenze des Werkstoffs,
$\nu =$ die Anzahl der Schwingungen je Sekunde,
$\omega = 2\pi\nu =$ die Kreisfrequenz der Schwingung.

Die Gleichgewichtsbedingungen sind für das verformte Stabelement aufzustellen (Theorie II. Ordnung). Nachdem die Normalkraft N längs der Stabachse unveränderlich angenommen wird, ist die Gleichgewichtsbedingung in dieser Richtung identisch erfüllt. Aus der Gleichgewichtsbedingung der Kräfte quer zur Stabachse ergibt sich gemäß Bild 2

$$Q - \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx\right) + R = 0, \tag{3}$$

woraus

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \mu \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{4}$$

folgt. Aus der Momentenbedingung für das Stabelement erhält man

$$M - \left(M + \frac{\partial M}{\partial x} \cdot dx\right) + Q\,dx + N\left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx = 0. \tag{5}$$

Aus der einmaligen Differentiation dieser Gleichung folgt

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial Q}{\partial x} + N\left(\frac{\partial y^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0. \tag{6}$$

Nachdem die Krümmung des Stabes durch den Ausdruck

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{M}{EJ} \tag{7}$$

gegeben ist, nimmt Gl. (6) unter Verwendung der Gl. (1), (2), (4) u. (7) die nachstehende Form an:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{P(1 + \cos \omega t)}{EJ} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\mu}{EJ} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{P(1 + \cos \omega t)}{EJ\,l^2} \cdot u_0 \pi^2 \cdot \sin \frac{\pi x}{l}. \tag{8}$$

Die obige lineare, nichthomogene, partielle Differentialgleichung 4. Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten stellt die Differentialgleichung für die Querschwingungen eines schwach gekrümmten Druckstabes dar und kann unter Verwendung der Partikularlösung

$$y = \frac{P u_0}{(P_e - P)}\,(1 + T) \sin \frac{\pi x}{l}, \tag{9}$$

wobei T eine noch unbekannte Funktion der Zeit t und $P_e = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$ die Eulersche Knicklast des geraden Stabes gleicher Querschnittsabmessungen bedeutet, in die nachfolgende, gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung übergeführt werden:

$$\frac{d^2 T}{d t^2} + \frac{P_e^2}{\mu EJ}\left[1 - \frac{P}{P_e}\,(1 + \cos \omega t)\right] T = \frac{P_e^2}{\mu EJ} \cdot \cos \omega t. \tag{10}$$

Gemäß Gl. (9) ist die Stabachse in jedem Zeitpunkt der Bewegung nach einer Sinuslinie gekrümmt, deren Amplituden entsprechend der zeitlichen Veränderlichkeit der eingeleiteten Normalkraft [laut Gl. (2) schwingt nur ein Teil der Belastung] durch den noch unbekannten Multiplikator $(1 + T)$ bestimmt sind. Die zur Ermittlung der Funktion T abgeleitete Differentialgleichung (10) läßt sich in geschlossener Form nicht integrieren. Die Bestimmung von T kann z. B. rechnerisch mit Hilfe eines geeigneten Potenzreihenansatzes oder auch zeichnerisch nach bekannten Verfahren vorgenommen werden. Nachfolgend soll Gl. (10) näherungsweise nach folgender Überlegung gelöst werden: Denkt man sich das Glied mit T auf die rechte Seite der Gl. (10) geschafft, so kann die entstandene Beziehung als Differentialgleichung der Biegelinie eines Stabes mit den Abszissen t und den „Ausbiegungen" T aufgefaßt werden. Man erkennt nun sofort, daß man etwas zu ungünstig rechnet, wenn das die Größe T enthaltende Belastungsglied mit dem Größtwert der Normalkraft $2P$ für $\cos \omega t = 1$ genommen wird[3]). Man erhält dann an Stelle von Gl. (10) die innerhalb des Intervalls $0 \leqq \cos \omega t \leqq 1$ gültige und ohne weiteres integrierbare Differentialbeziehung

$$\frac{d^2 T}{d t^2} + \frac{P_e^2}{\mu EJ}\left(1 - \frac{2P}{P_e}\right) T = \frac{P_e^2}{\mu EJ} \cdot \cos \omega t. \tag{11}$$

Mit Einführung der Randbedingungen ($t = 0 \ldots T' = 0$ und $2\omega t = \pi \ldots T = 0$) ergibt sich die vollständige Lösung in der Form

$$T = \frac{\cos \omega t}{\left(1 - \frac{2P}{P_e}\right)\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)}. \tag{12}$$

In der obigen Gleichung wurde zur Abkürzung

$$\omega_1^2 = \frac{P_e^2}{\mu EJ}\left(1 - \frac{2P}{P_e}\right) \tag{13}$$

gesetzt, und es entspricht ω_1 der niedrigsten Eigenfrequenz eines mit der statischen Normalkraft $2P$ auf mittigen Druck belasteten geraden Stabes gleicher Querschnittsabmessungen[4]). Der Größtwert von T tritt gleichzeitig mit der größten Normalkraft auf ($\cos \omega t = 1$) und ergibt sich zu

$$T_{\max} = \frac{1}{\left(1 - \frac{2P}{P_e}\right)\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)}. \tag{14}$$

[2]) K. Hohenemser u. W. Prager, Dynamik der Stabwerke, S. 123 ff. Berlin 1933, Jul. Springer.

[3]) Eine zahlenmäßig genaue Lösung der Differentialgleichung (10) soll an anderer Stelle gegeben werden. Es sei jedoch schon hier bemerkt, daß die obige Näherungslösung zu kritischen Lasten führt, die für die weiterhin betrachteten Belastungsfälle nur wenig unter den wahren Werten liegen.

[4]) K. Hohenemser u. W. Prager, Dynamik der Stabwerke, S. 230.

Die größtmögliche Durchbiegung in Stabmitte erhält man zur Zeit $t = 0$, und sie beträgt laut Gl. (9) u. (14)

$$(15) \qquad y_{\max} = \frac{P\,u_0}{(P_e - P)} \left[1 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2P}{P_e}\right)\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)} \right].$$

Im Grenzfalle $\omega = 0$ erhält man aus Gl. (15) die bekannte Formel für die statische Durchbiegung eines durch die axiale Druckkraft $2P$ belasteten leichtgekrümmten Stabes. Das in Stabmitte auftretende größte Biegemoment ergibt sich aus

$$(16) \qquad M_{\max} = N_{\max}(u_0 + y_{\max}) = 2P(u_0 + y_{\max}).$$

Im mittleren Querschnitt des Stabes $\left(x = \frac{l}{2}\right)$ beträgt daher die größte Spannung am Biegedruckrand

$$(17) \qquad \sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{F} + \frac{M_{\max}}{W_d},$$

und dieser Wert entspricht bei doppeltsymmetrischen Querschnitten auch gleichzeitig der größten Randspannung. Setzt man weiterhin der Einfachheit halber einen I-Querschnitt mit unendlich dünnem, aber schubsicherem Steg und zwei sehr dünnen Lamellen entsprechend Bild 3 voraus, so tritt bei diesem Profil mit dem Erreichen der Fließgrenze σ_F am Biegedruckrand bereits der kritische Gleichgewichtszustand auf, das heißt, die Grenze des Tragvermögens ist erreicht, weil eine weitere Plastizierung nicht möglich ist. Die der entsprechenden kritischen Normalkraft $N_{kr} = N_{\max} = 2\,P_{kr}$ zugeordnete kritische Axialspannung $\sigma_{kr} = N_{kr}/F$ entspricht der Stabilitätsgrenze des Stabes. Die Kernweite k und der Trägheitshalbmesser i des angenommenen Querschnitts sind praktisch gleich groß

$$(18) \qquad k = \frac{W_d}{F} \doteq \frac{h}{2} \qquad i = \sqrt{\frac{J}{F}} \doteq \frac{h}{2}.$$

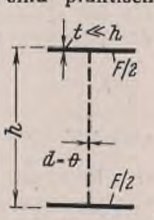


Bild 3.

Man erhält daher für den Beginn des Fließens am Biegedruckrand (kritischer Gleichgewichtszustand) die folgende Bedingung

$$(19) \qquad \sigma_{\max} = \sigma_F = \sigma_{kr}\left(1 + \frac{M_{kr}\,F}{N_{kr}\,W_d}\right).$$

Bezeichnet man mit $\lambda = \frac{l}{i}$ die Schlankheit des Stabes, so erhält man aus Gl. (19) unter Verwendung aller bisher abgeleiteten Beziehungen die nachfolgende Gleichung

$$(20) \qquad \left(1 - \frac{\sigma_{kr}\,\lambda^2}{2\pi^2 E}\right)\left[1 - \frac{\lambda^2}{\pi^2 E}\left(\sigma_{kr} + \frac{\gamma\, l^2\, \omega^2}{g\,\pi^2}\right)\right] - \frac{\sigma_{kr}\,\lambda}{(\sigma_F - \sigma_{kr})}\left[1 - \frac{\lambda^2}{\pi^2 E}\left(\frac{\sigma_{kr}}{2} + \frac{\gamma\, l^2\, \omega^2}{g\,\pi^2}\right)\right]\frac{u_0}{l} = 0.$$

Aus der obigen Bedingung kann die kritische Axialspannung σ_{kr} in Abhängigkeit von den Stababmessungen (Länge l und Schlankheit λ) und der Kreisfrequenz ω bestimmt werden.

Schließlich seien noch zwei wichtige Sonderfälle kurz besprochen. Für statische Belastung ($\omega = 0$) ergibt sich aus Gl. (20) die in meinem Buche[1]) abgeleitete Formel

$$(21) \qquad \lambda_s^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{kr}}\left[1 - \left(\frac{u_0}{l}\right)\frac{\sigma_{kr}\,\lambda_s}{(\sigma_F - \sigma_{kr})}\right].$$

Für den geraden Stab ($u_0 = 0$) läßt sich die einer vorgegebenen Axialspannung σ_{kr} zugeordnete kritische Schlankheit λ_0 aus Gl. (20) explizit ermitteln, und man erhält

$$(22) \qquad \lambda_0^2 = \frac{\pi^2 E}{\left(\sigma_{kr} - \frac{\gamma\, l^2\, \omega^2}{g\,\pi^2}\right)}.$$

Die Größe λ_0 stellt dann auch gleichzeitig die obere Grenze für die einem gekrümmten Druckstab entsprechende Gleichgewichtsschlankheit laut Gl. (20) dar.

Über den zahlenmäßigen Einfluß einer zeitlich veränderlichen Belastung auf die Tragfähigkeit eines leichtgekrümmten Druckstabes geben die nachfolgenden Rechnungen Aufschluß. Gehört z. B. der betrachtete Druckstab dem Tragwerk einer Fachwerksbrücke an, so wäre entsprechend der Umdrehungszahl der Triebräder einer Lokomotive oder der Triebachse eines Lastkraftwagens die Frequenz mit $\nu = 5$ Schwingungen je Sekunde anzunehmen. Ich habe bereits in meinem Buche darauf hingewiesen, daß kleine Krümmungen der Stabachse praktisch unvermeidlich sind, und daß derartige Außermittigkeiten des Kraftangriffs besonders bei mittleren Schlankheitsgraden $\lambda = 80$ bis 120 eine nicht unbeträchtliche Herabsetzung der Tragfähigkeit zur Folge haben[5]). Es soll daher ein „unbeabsichtigter" Krümmungspfeil $u_0 = 0{,}001\,l$ angenommen und die kritische Spannung für $\sigma_F = 2400$ kg/cm², $E = 2100$ t/cm² (St 37) und $l = 500$ cm bei verschiedenen Schlankheitsgraden ermittelt werden.

Das Ergebnis dieser Rechnung ist in Bild 4 zeichnerisch dargestellt. Die Knickspannungslinie des „Idealstahls" (das Hookesche Gesetz gilt bis zur Fließgrenze, der Fließbereich ist unbegrenzt) wird bei statischer Beanspruchung aus der Euler-Hyperbel und der in Höhe der Quetschgrenze σ_F parallel zur Abszissenachse laufenden Geraden gebildet. Die Knickspannungslinie für reine Schwellbeanspruchung ist durch Gl. (22) festgelegt und in Bild 4 ebenfalls eingetragen. Die stark voll gezeichnete Linie stellt den Verlauf der kritischen Axialspannungen σ_{kr} gemäß Gl (20) für das gewählte Krümmungsverhältnis $u_0/l = 0{,}001$ und $\nu = 5$ Schwingungen je Sekunde $(\omega = 30\ \text{sek}^{-1})$ dar. Vergleicht man diese Linie mit der Linie der kritischen Spannungen für statische Belastung (gestrichelte Linie, $\omega = 0$), so erkennt man, daß die schwingende Beanspruchung erst für Stäbe größerer Schlankheit eine merkliche Verminderung der Tragfähigkeit zur Folge hat; bei $\lambda = 200$ sinkt die Tragfähigkeit bei reiner Schwellbeanspruchung auf etwa 60% des Tragvermögens bei statischer Beanspruchung ab.

Es muß nun weiterhin untersucht werden, in welchem Ausmaße diese Herabsetzung der Stabilitätsgrenze durch die Vorschriften gedeckt wird. Bei reiner Schwellbeanspruchung ist zunächst der die zeitlich veränderliche Belastung berücksichtigende Beiwert $\gamma = 0$. Nimmt man z. B. die Stoßzahl mit $\varphi = 1{,}4$ an, so ist an Stelle der Last N (statische Belastung) der Wert $\frac{N}{2}(1 + \varphi) = 1{,}2\,N$ (reine Schwellbelastung) beim Spannungsnachweis einzusetzen, d. h. man darf nur mit 83% der bei ruhender Belastung zulässigen Spannung rechnen. Die Traglast bei reiner Schwellbeanspruchung muß also mindestens 83% der statischen Festigkeit betragen, und diese Forderung ist laut Bild 4 bei Stäben mit $\lambda \leqq 150$ und damit für die überwiegende Mehrzahl aller praktisch vorkommenden Fälle erfüllt. Bei noch schlankeren Stäben mit $\lambda > 150$ ist mit Rücksicht auf Bild 4 eine nicht allzu knappe Querschnittsbemessung zu empfehlen.

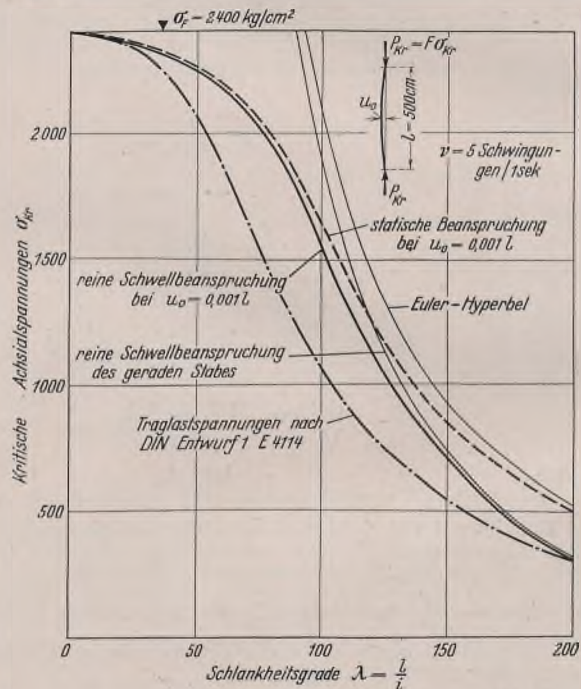


Bild 4.

In diesem Zusammenhange soll ferner darauf hingewiesen werden, daß der bereits im Druck vorliegende neue Entwurf 1 einer Knicknorm DIN 4114 eine unvermeidliche Krümmung der Achse eines entwurfsgemäß geraden, mittig gedrückten Stabes im Sinne meiner seinerzeitigen Vorschläge berücksichtigt. Man ersieht aus dem Verlauf der künftigen „Knickspannungslinie" (Traglastspannungen), die in Bild 4 strichpunktiert eingezeichnet ist, daß sie auch die durch schwingende Belastung bewirkte zusätzliche Abminderung der Tragfähigkeit für alle praktisch vorkommenden Schlankheitsgrade in ausreichendem Ausmaße deckt. Der neue Knickspannungsentwurf fußt bekanntlich auf der Voraussetzung, daß die unvermeidliche Krümmung der Stabachse bzw. die Außermittigkeit des Kraftangriffs mit zunehmender Schlankheit wächst, wobei der Sicherheitsgrad sinngemäß für alle Schlankheitsgrade gleich groß gewählt wird; die Berechtigung dieser Annahme wird durch die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung grundsätzlich bestätigt.

2. Reine Wechselbeanspruchung.

Die Ermittlung der kritischen Belastung eines leichtgekrümmten Druckstabes, dessen Achse nach einer Sinuslinie laut Gl. (1) geformt ist, verläuft für reine Wechselbeanspruchung ($N_{\max} = P$, $N_{\min} = -P$) ganz

[5]) K. Jäger (Ježek), Die Festigkeit von Druckstäben aus Stahl. — Das Schaubild 41, S. 69, zeigt deutlich den schädlichen Einfluß kleiner unbeabsichtigter Krümmungen der Stabachse auf das durch σ_{kr} gekennzeichnete Tragvermögen von „entwurfsgemäß" geraden Druckstäben. Bei waagerecht gelagerten Druckstäben ruft übrigens das Eigengewicht praktisch dieselbe Wirkung hervor wie eine ursprünglich krumme Stabachse; hierüber gibt das Schaubild 39, S. 67, zahlenmäßig Aufschluß.

analog dem in Abschnitt 1 durchgeführten Rechnungsgang. Die in den beiden Endquerschnitten eingeleitete Normalkraft ist durch das Gesetz

$$N = P \cdot \cos \omega t \tag{23}$$

festgelegt. Unter Verwendung der in Abschnitt 1 gebrauchten Bezeichnungen erhält man aus den Gleichgewichtsbedingungen (3) und (6) die Differentialgleichung für die Querschwingungen des Stabes in der Form

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{P \cdot \cos \omega t}{E J} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\mu}{E J} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{P u_0 \pi^2 \cdot \cos \omega t}{E J l^2} \cdot \sin \frac{\pi x}{l}. \tag{24}$$

Die obige lineare, nichthomogene, partielle Differentialgleichung 4. Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten wird durch die Partikularlösung

$$y = \frac{P u_0}{(P_e - P)} \cdot T \cdot \sin \frac{\pi x}{l}, \tag{25}$$

in welcher T eine noch zu bestimmende Funktion der Zeit t und P_e die Eulersche Knicklast des geraden Stabes gleicher Abmessungen bedeutet, in die nachstehende gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung übergeleitet:

$$\frac{d^2 T}{d t^2} + \frac{P_e^2}{\mu E J} \left(1 - \frac{P}{P_e} \cdot \cos \omega t\right) T = \frac{P_e^2}{\mu E J} \left(1 - \frac{P}{P_e}\right) \cos \omega t. \tag{26}$$

Hinsichtlich der Integration der Gl. (26) gelten die in Abschnitt 1 auf die analoge Gl. (10) bezüglichen Ausführungen. Es wird auch hier zwecks Ermittlung des Größtwertes der Funktion T Gl. (26) näherungsweise innerhalb des Gültigkeitsbereichs $0 \leqq \cos \omega t \leqq 1$ durch die Differentialbeziehung

$$\frac{d^2 T}{d t^2} + \omega_1^2 T = \omega_1^2 \cdot \cos \omega t \tag{27}$$

ersetzt, wobei zur Abkürzung

$$\omega_1^2 = \frac{P_e^2}{\mu E J} \left(1 - \frac{P}{P_e}\right) \tag{28}$$

eingeführt wurde. Gl. (27) läßt sich ohne weiteres integrieren, und man erhält mit den entsprechenden Randbedingungen ($t = 0 \ldots T' = 0$ und $2 \omega t = \pi \ldots T = 0$) den Größtwert der Funktion für $t = 0$ zu

$$T_{\max} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)}. \tag{29}$$

Die größtmögliche Durchbiegung tritt zur gleichen Zeit in Stabmitte auf und ergibt sich laut Gl. (29) aus Gl. (25) zu

$$y_{\max} = \frac{P u_0}{(P_e - P)\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)}. \tag{30}$$

Im Grenzfalle der ruhenden Belastung ($\omega = 0$) führt Gl. (30) zu der bekannten Formel für die statische Durchbiegung eines durch die axiale Druckkraft P belasteten schwachgekrümmten Stabes.

Das größte Biegemoment zur Zeit $t = 0$ tritt im mittleren Querschnitt auf und beträgt

$$M_{\max} = N_{\max}(u_0 + y_{\max}) = P(u_0 + y_{\max}). \tag{31}$$

Unter der Annahme des in Bild 3 dargestellten Querschnitts tritt die größte Randspannung gemäß Gl. (17) am Biegedruckrand in Stabmitte auf; der kritische Gleichgewichtszustand wird erreicht, wenn diese größte Randspannung gleich der Fließgrenze σ_F gesetzt wird. Aus dieser Bedingung erhält man schließlich die nachfolgende Beziehung, aus welcher die kritische Axialspannung σ_{kr} in Abhängigkeit von den Stababmessungen und der Kreisfrequenz ω ermittelt werden kann:

$$\left[1 - \frac{\lambda^2}{\pi^2 E}\left(\sigma_{kr} + \frac{\gamma l^2 \omega^2}{g \pi^2}\right)\right] - \frac{\sigma_{kr} \lambda}{(\sigma_F - \sigma_{kr})}\left(1 - \frac{\gamma l^2 \omega^2 \lambda^2}{g \pi^4 E}\right) = 0. \tag{32}$$

Für den Grenzfall der ruhenden Belastung ($\omega = 0$) führt Gl. (32) zu der bereits in Abschnitt 1 angegebenen Formel (21), und für den geraden Stab ($u_0 = 0$) erhält man Gl. (22), aus welcher die obere Grenze λ_0 für die einem gekrümmten Stab laut Gl. (32) zugeordnete Gleichgewichtsschlankheit λ bestimmt werden kann.

Wertet man zum Vergleich mit den in Abschnitt 1 gewonnenen zahlenmäßigen Ergebnissen Gl. (32) unter der Voraussetzung $\nu = 5$ Schwingungen je Sekunde, $u_0 = 0{,}001\, l$, $l = 500$ cm, $\sigma_F = 2400$ kg/cm² und $E = 2100$ t/cm² für die Schlankheitsgrade $\lambda = 0$ bis 200 aus, so erhält man kritische Spannungen σ_{kr}, die nur **unmerklich kleiner** sind als die für **reine Schwellbeanspruchung** gefundenen Werte.

Die Vorschriften decken nun bei reiner Wechselbeanspruchung die durch die zeitlich veränderliche Belastung bewirkte Herabsetzung der Stabilitätsgrenze in weit größerem Umfange als bei reiner Schwellbeanspruchung. Nimmt man nämlich z. B. die Stoßzahl wieder mit $\varphi = 1{,}4$ an, so ist außerdem der die Schwingungsbeanspruchung berücksichtigende Beiwert bei Eisenbahnbrücken und Stahl St 37 mit $\gamma = 1{,}3$ einzuführen; beim Spannungsnachweis darf daher nur mit 55% der für ruhende Belastung zulässigen Inanspruchnahme gerechnet werden. Man erkennt aus dem Verlauf der in Bild 4 voll gezeichneten Linie der kritischen Spannungen, die nach den obigen Ausführungen praktisch sowohl für reine Schwell- als auch für reine Wechselbeanspruchung gilt, daß die Tragfähigkeit selbst für sehr schlanke Stäbe mindestens 60% der für ruhende Belastung geltenden Werte erreicht.

Näherungsformeln zur Berechnung der Winkelgewichte für biegungssteife Träger sowie die Bestimmung ihrer Fehler.

Von Fritz Chmelka, Wien.

1. Einleitung und Problemstellung.

In der Baustatik benötigt man zu verschiedenen Zwecken die Biegelinie von Tragwerken. Wir wollen uns hier mit der Ermittlung der Biegelinien von ebenen, biegungssteifen Systemen befassen. Die Träger können beliebige Gestalt haben, nur sollen ihre Querschnittsabmessungen klein sein gegenüber ihrer Länge. Wir können unsere Betrachtungen auf statisch bestimmte Systeme beschränken, wenn wir die etwa vorhandenen statisch unbestimmten Größen zu den äußeren Kräften hinzuzählen.

Denken wir uns also etwa den in Bild 1 dargestellten Träger, dessen Querschnittsträgheitsmoment eine beliebige Funktion des Ortes sein soll, und auf den eine ruhende Belastung P wirken möge, die sowohl aus Einzellasten als auch aus verteilten Lasten bestehen kann. Wir legen die einzelnen Punkte der Trägerachse durch ihre Abszisse ξ fest. Wir wollen nun die Durchbiegung des Trägers in lotrechter Richtung betrachten und bezeichnen die lotrechte Verschiebungskomponente des Trägerpunktes mit der Abszisse $\xi = x$ infolge der Belastung P mit δ_{xP} (erster Index = Ort, zweiter Index = Ursache). δ_{xP}, als Funktion von x aufgefaßt, ist dann die Gleichung der Biegelinie des Trägers in lotrechter Richtung.

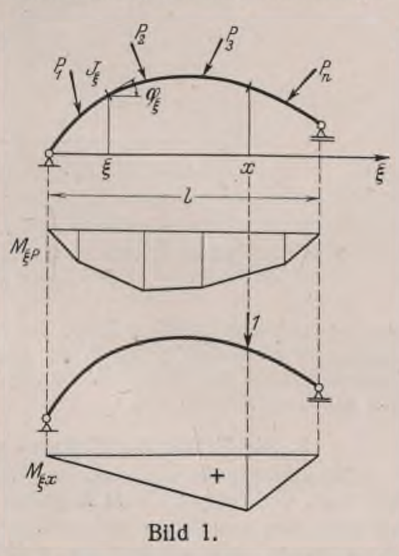


Bild 1.

Für δ_{xP} gilt nun bei Vernachlässigung der Quer- und Normalkräfte folgende Gleichung (Prinzip der virtuellen Verschiebungen):

$$E J_0 \delta_{xP} = \int_0^l M_{\xi P} M_{\xi x} \cdot \frac{J_0}{J_\xi \cdot \cos \varphi_\xi} \cdot d\xi. \tag{1}$$

Darin bedeutet:

$M_{\xi P}$ = das Moment an der Stelle ξ des Trägers infolge der gegebenen Belastung P,

$M_{\xi x}$ = das Moment an der Stelle ξ des Trägers infolge der lotrecht gerichteten Last 1 in x (Hilfsangriff 1 in x),

J_ξ, φ_ξ = Trägheitsmoment und Neigungswinkel des Trägers an der Stelle ξ,

J_0 = ein beliebiges, passend gewähltes Vergleichsträgheitsmoment,

E = den Elastizitätsmodul des verwendeten Werkstoffes,

l = die Spannweite des Trägers.

Der Integrand von (1) ist nur in den seltensten Fällen so gebaut, daß man das Integral in geschlossener Form auswerten kann. Es kommen, neben Ecken der Momentenlinie unter den Einzellasten, noch Unstetigkeiten des Integranden dadurch zustande, daß sich J_ξ etwa durch Aufnieten einer Lamelle sprunghaft ändert, oder daß, falls ein Rahmen vorliegt, φ_ξ Unstetigkeitsstellen aufweist. Dazwischen verläuft der Integrand nach einer Kurve, deren Gleichung aufzustellen allein schon häufig viel Mühe machen würde, von ihrer Integration gar nicht zu reden. Praktisch wird also meist nur eine diskrete Anzahl von Werten der Funktion $M_{\xi P} \cdot \frac{J_0}{J_\xi \cdot \cos \varphi_\xi}$, die wir im folgenden kurz mit $y(\xi)$ bezeichnen wollen, bekannt sein.

Diese Schwierigkeit wird bekanntlich durch Einführung der Winkelgewichte (oft kurz w-Gewichte oder elastische Gewichte genannt) behoben, einer Folge von gedachten Einzellasten, deren Seileck das der Biegelinie eingeschriebene Sehnenpolygon ist. Die Winkelgewichte sind sämtlich parallel und haben die Richtung der gesuchten Verschiebungskomponente, also bei uns die lotrechte. Die Punkte des Trägers, in denen Winkelgewichte wirken sollen, numerieren wir auf der ξ-Achse mit 0, 1, 2, ... k, ... n. Der Punkt 0 falle mit $\xi = 0$, der Punkt n mit $\xi = l$ zusammen. Die Abstände der einzelnen Punkte auf der ξ-Achse, die zunächst nicht gleich zu sein brauchen, bezeichnen wir der Reihe nach mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$. Der Punkt $\xi = x$ soll die Nummer k haben. Dann hat der Punkt $k - 1$ die Abszisse $x - \lambda_k$, der Punkt $k + 1$ die Abszisse

$x+\lambda_{k+1}$. Die Gleichung für das Winkelgewicht im Punkt k infolge der Belastung P lautet:

$$(2)\qquad w_{kP}=\int\limits_{\xi=x-\lambda_k}^{\xi=x+\lambda_{k+1}} M_{\xi P}\cdot\frac{J_0}{J_\xi\cdot\cos\varphi_\xi}\cdot\varDelta M_{\xi x}\,d\xi.$$

$\varDelta M_{\xi x}$ ist jene Momentenkurve, die entsteht, wenn man den Träger mit der in Bild 2 dargestellten Belastung versieht: eine einfache Dreieckskurve, im Punkt $k-1$ beginnend, im Punkt $k+1$ endend, mit der Spitze in der Höhe 1 über k.

Wenn wir zur Abkürzung für $\varDelta M_{\xi x}=u(\xi)$ schreiben, ferner $x-\lambda_k=x_{k-1}$, $x+\lambda_{k+1}=x_{k+1}$ setzen (der Gleichförmigkeit halber werden wir von nun an statt x immer x_k schreiben), so lautet (2):

$$(2^*)\qquad w_{kP}=\int\limits_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} y(\xi)\,u(\xi)\,d\xi.$$

Bezüglich der Auswertung dieses Integrals gilt dasselbe, was wir über das Integral (1) gesagt haben. Wir müssen daher im allgemeinen zu Näherungslösungen greifen. Es sind deren mehrere möglich, die zum Teil längst bekannt sind. Eine neue, sehr einfache und gut verwendbare Näherungsformel soll hier angegeben werden. Aufgabe dieser Arbeit soll sein, die Fehler dieser Näherungsformeln abzuschätzen und dadurch ihre Vor- und Nachteile unter verschiedenen, praktisch vorkommenden Bedingungen zu erörtern.

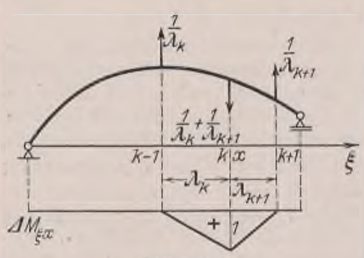


Bild 2.

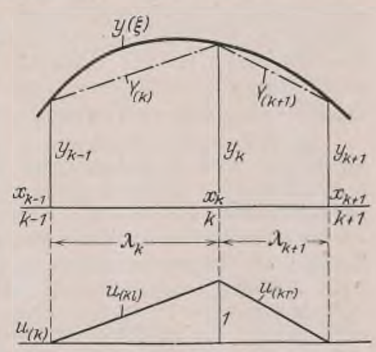


Bild 3.

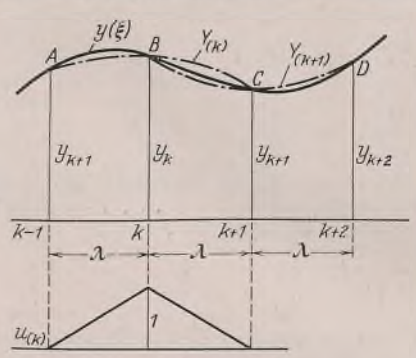


Bild 4.

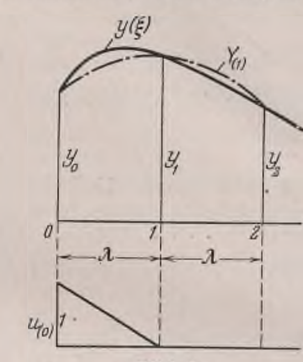


Bild 5.

2. Die Trapezformel und die Formel von Wanke.

Das einfachste Verfahren, das Integral (2*) näherungsweise zu berechnen, beruht auf der Ersetzung der y-Kurve durch ihr Sehnenpolygon mit den Ecken in den Teilungspunkten (Bild 3)[1]). Bezeichnen wir mit y_{k-1}, y_k, y_{k+1} die Werte von y in den Punkten $k-1$, k, $k+1$, so lautet die Näherungsformel, die wir als Trapezformel bezeichnen wollen, für ungleiche Teilintervalle:

$$(\mathrm{Ib})\qquad w_{kP}\doteq\frac{1}{6}\left[\lambda_k y_{k-1}+2(\lambda_k+\lambda_{k+1})y_k+\lambda_{k+1}y_{k+1}\right].$$

Haben alle Intervalle die gleiche Länge λ, so vereinfacht sich der obige Ausdruck zu:

$$(\mathrm{Ia})\qquad w_{kP}\doteq\frac{\lambda}{6}\left[y_{k-1}+4y_k+y_{k+1}\right].$$

Falls y im Punkt k eine Unstetigkeit aufweist, bezeichnen wir seinen Grenzwert bei Annäherung an k von links her mit y_{kl}, bei Annäherung von rechts mit y_{kr}. Es gilt dann:

$$(\mathrm{Ic})\qquad w_{kP}\doteq\frac{1}{6}\left[\lambda_k(y_{k-1}+2y_{kl})+\lambda_{k+1}(2y_{kr}+y_{k+1})\right].$$

Ist y auch in den Punkten $k-1$ und $k+1$ unstetig, so ist für y_{k-1} der rechtseitige, für y_{k+1} der linkseitige Grenzwert einzusetzen.

Für die Punkte 0 und n lauten die Formeln etwas anders:

$$w_{0P}\doteq\frac{\lambda_1}{6}(2y_0+y_1)\qquad w_{nP}\doteq\frac{\lambda_n}{6}(y_{n-1}+2y_n).$$

Man erhält eine im allgemeinen bessere Näherung für das Integral (2*), wenn man die Kurve $y(\xi)$ stückweise durch einen Parabelbogen ersetzt. Und zwar legen wir, wenn wir w_{kP} berechnen, die Näherungsparabel $Y_{(k)}$[2]) durch die drei Punkte ABC (Bild 4). Für die Berechnung von $w_{k+1\,P}$ wird eine neue Näherungsparabel $Y_{(k+1)}$ durch die drei Punkte BCD gelegt und so weiter.

Wenn man also die Gleichung für $Y_{(k)}$ aufstellt und an Stelle von $y(\xi)$ in das Integral (2*) einsetzt, erhält man unter Voraussetzung gleicher Teilintervalle λ die folgende Näherungsformel:

$$(\mathrm{II\,a})\qquad w_{kP}\doteq\frac{\lambda}{12}(y_{k-1}+10y_k+y_{k+1}).$$

Sie wurde zuerst von Wanke aufgestellt[3]).

Für die Gewichte in den Punkten 0 und n ergeben sich die Formeln:

$$(\mathrm{II\,a'})\qquad \begin{cases} w_{0P}\doteq\dfrac{\lambda}{24}(7y_0+6y_1-y_2)\\[1ex] w_{nP}\doteq\dfrac{\lambda}{24}(-y_{n-2}+6y_{n-1}+7y_n).\end{cases}$$

Sie werden aus der Näherungsparabel durch die den Punkten 0, 1, 2, bzw. $n-2$, $n-1$, n entsprechenden Kurvenpunkte gewonnen (Bild 5). Die Kurve $u_{(0)}$ reduziert sich auf die Hälfte des Dreiecks Bild 4.

Im Falle einer Unstetigkeit im Punkt k (Bild 6) ist die Formel (IIa) nicht verwendbar. Doch kann man hier nach den Formeln für die Endgewichte

$$w_{kP}^{(l)}\doteq\frac{\lambda}{24}\left(-y_{k-2}+6y_{k-1}+7y_{kl}\right)$$

$$w_{kP}^{(r)}\doteq\frac{\lambda}{24}\left(7y_{kr}+6y_{k+1}-y_{k+2}\right)$$

bilden und w_{kP} aus

$$(\mathrm{II\,c})\qquad w_{kP}=w_{kP}^{(l)}+w_{kP}^{(r)}$$

gewinnen.

Ein großer Nachteil der Formel (IIa) ist, daß sie nur für gleich lange Teilintervalle gilt. Nun kann man natürlich unschwer, wenn auch nach längerer Rechenarbeit, einen der Formel (IIa) entsprechenden Ausdruck für verschieden lange Teilintervalle herleiten. Es ergibt sich:

$$(\mathrm{II\,b})\qquad w_{kP}\doteq\frac{1}{12}\left(\frac{\lambda_k^2+\lambda_k\lambda_{k+1}-\lambda_{k+1}^2}{\lambda_k}\cdot y_{k-1}+\frac{(\lambda_k+\lambda_{k+1})(\lambda_k^2+3\lambda_k\lambda_{k+1}+\lambda_{k+1}^2)}{\lambda_k\lambda_{k+1}}\cdot y_k+\frac{-\lambda_k^2+\lambda_k\lambda_{k+1}+\lambda_{k+1}^2}{\lambda_{k+1}}\cdot y_{k+1}\right),$$

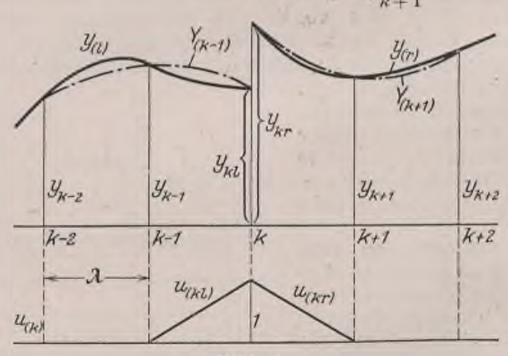


Bild 6.

ein reichlich unhandliches Ding, das in die Praxis kaum Eingang finden dürfte. Wir werden später in der Lage sein, für diesen Fall eine einfachere Formel zu bieten. Vorläufig bleibt uns bei ungleicher Teilung nur die Trapezformel (Ib).

3. Die Fehler der Trapez- und der Wanke-Formel.

Wird allgemein $y(\xi)$ durch ein Polynom $Y(\xi)$ vom Grad $m-1$ angenähert, das mit $y(\xi)$ in m Punkten: $\xi=x_1, x_2, \ldots x_m$ übereinstimmt, so kann man den Fehler an der Stelle $\xi_0: y(\xi_0)-Y(\xi_0)$ auf folgende Art abschätzen[4]). Wir nehmen an, $y(\xi)$ sei m mal stetig differentiierbar.

[1]) Wir werden im folgenden, wie in der Mathematik, die positiven Ordinaten nach aufwärts ziehen.

[2]) Eingeklammerte untere Indizes sollen immer eine ganze Kurve bedeuten, y_k dagegen bedeutet die Ordinate von y im Punkt k.

[3]) J. Wanke, Die günstigste Form des eingespannten Gewölbes und die Bestimmung seiner Eigengewichtsspannungen. Technische Blätter 1920, Nr. 42/43 und 44/45.

[4]) Ich folge hier wie auch später den Ausführungen L. v. Schrutkas in seinem Buch: Elemente der höheren Mathematik, dessen Autor ich auch sonst Anregungen verdanke.

Dann setzen wir

$$\frac{y(\xi_0)-Y(\xi_0)}{(\xi_0-x_1)(\xi_0-x_2)\dots(\xi_0-x_m)}=K \tag{3}$$

und bilden die Funktion

$$\psi(\xi)=y(\xi)-Y(\xi)-K(\xi-x_1)(\xi-x_2)\dots(\xi-x_m).$$

Wie man leicht sieht, hat $\psi(\xi)$ die Nullstellen $x_1, x_2, \dots x_m, \xi_0$. Nach dem Satz von Rolle liegen dann in dem durch diese $m+1$ Punkte gegebenen Intervall mindestens m Nullstellen von $\psi'(\xi)$; zwischen diesen dann abermals mindestens $m-1$ Nullstellen von $\psi''(\xi)$ usw. Wir stellen so schließlich fest, daß zwischen der größten und kleinsten der obigen Nullstellen von $\psi(\xi)$ mindestens eine Nullstelle von $\psi^{(m)}(\xi)$ liegt. Sie sei mit $\bar{\xi}$ bezeichnet.

Bilden wir $\psi^{(m)}(\xi)$, so bleibt, weil $Y(\xi)$ ein Polynom vom Grad $m-1$ ist, bloß übrig:

$$\psi^{(m)}(\xi)=y^{(m)}(\xi)-K\,m!$$

Für $\xi=\bar{\xi}$ ergibt sich:

$$K=\frac{y^{(m)}(\bar{\xi})}{m!}.$$

Wir dürfen nur nicht vergessen, daß $\bar{\xi}$ im allgemeinen von ξ_0, der Stelle, wo der Fehler bestimmt werden sollte, abhängig sein wird: $\bar{\xi}=\bar{\xi}(\xi_0)$.

Der Fehler an einer beliebigen Stelle ξ ergibt sich aus (3), wenn wir ξ_0 durch ξ ersetzen:

$$y(\xi)-Y(\xi)=\frac{y^{(m)}(\bar{\xi})}{m!}(\xi-x_1)(\xi-x_2)\dots(\xi-x_m), \qquad \bar{\xi}=\bar{\xi}(\xi). \tag{4}$$

a) Der Fehler der Trapezformel.

Wir wollen den Fehler der Formel (Ib) berechnen, nehmen also ungleiche Teilintervalle an, setzen aber voraus, daß y im Intervall $[x_{k-1}, x_{k+1}]$ stetig sei. Zur Berechnung von w_{kP} wurde y in $[x_{k-1}, x_k]$ oder kurz in λ_k durch die Gerade $Y_{(k)}(\xi)$ ersetzt, in λ_{k+1} durch die Gerade $Y_{(k+1)}(\xi)$ (Bild 3). Wir wollen bloß voraussetzen, daß y in λ_k und in λ_{k+1} überall zweimal stetig differentiierbar sei, dagegen kann es in den Punkten $k-1$, k, $k+1$ ohne weiteres Ecken haben. Den linken Ast der Kurve $u_{(k)}(\xi)$ bezeichnen wir mit $u_{(kl)}$, den rechten mit $u_{(kr)}$. Dann ergibt sich aus (4):

$$\text{in } \lambda_k \quad y(\xi)=Y_{(k)}(\xi)+\frac{y''(\bar{\xi})}{2}(\xi-x_{k-1})(\xi-x_k), \qquad x_{k-1}\leqq\xi\leqq x_k, \quad \bar{\xi}=\bar{\xi}(\xi),$$

$$\text{in } \lambda_{k+1} \quad y(\xi)=Y_{(k+1)}(\xi)+\frac{y''(\bar{\bar{\xi}})}{2}(\xi-x_k)(\xi-x_{k+1}), \qquad x_k\leqq\xi\leqq x_{k+1}, \quad \bar{\bar{\xi}}=\bar{\bar{\xi}}(\xi).$$

Wir bilden nun das Integral (2*):

$$w_{kP}=\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} y\,u\,d\xi=\int_{x_{k-1}}^{x_k} Y_{(k)}\,u_{(kl)}\,d\xi+\int_{x_k}^{x_{k+1}} Y_{(k+1)}\,u_{(kr)}\,d\xi$$
$$+\frac{1}{2}\int_{x_{k-1}}^{x_k} y''(\bar{\xi})(\xi-x_{k-1})(\xi-x_k)\,u_{(kl)}\,d\xi$$
$$+\frac{1}{2}\int_{x_k}^{x_{k+1}} y''(\bar{\bar{\xi}})(\xi-x_k)(\xi-x_{k+1})\,u_{(kr)}\,d\xi.$$

Die ersten beiden Integrale rechts ergeben den Näherungswert für w_{kP} nach Formel (Ib). Wir wollen ihn mit W_{kP} bezeichnen. Auf die beiden folgenden Integrale wenden wir den zweiten Mittelwertsatz der Integralrechnung an, denn beidemale hat der Faktor von y'' im ganzen Integrationsintervall konstantes Vorzeichen. Wegen unserer Voraussetzungen über y können wir also schreiben:

$$w_{kP}=W_{kP}+\frac{y''(\xi_k)}{2}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(\xi-x_{k-1})(\xi-x_k)\,u_{(kl)}\,d\xi$$
$$+\frac{y''(\xi_{k+1})}{2}\int_{x_k}^{x_{k+1}}(\xi-x_k)(\xi-x_{k+1})\,u_{(kr)}\,d\xi,$$
$$x_{k-1}\leqq\xi_k\leqq x_{k+1}, \qquad x_k\leqq\xi_{k+1}\leqq x_{k+1}.$$

Nun lassen sich die beiden Integrale leicht ausrechnen, und wir erhalten:

$$w_{kP}=W_{kP}-\frac{1}{24}\left[y''(\xi_k)\,\lambda_k^3+y''(\xi_{k+1})\,\lambda_{k+1}^3\right]. \tag{5}$$

ξ_k und ξ_{k+1} sind Punkte aus λ_k bzw. λ_{k+1}, über deren Lage nichts Genaueres ausgesagt werden kann.

Diese Gleichung gilt für die Formel (Ib), daher selbstverständlich auch für (Ia). Ja, man sieht leicht ein, daß sie auch dann gilt, wenn y in den Punkten $k-1$, k, $k+1$ unstetig ist.

Es dient uns als Kontrolle, festzustellen, daß der Fehler dann verschwindet, wenn y eine Gerade ist oder aus Geradenstücken besteht.

b) Die Fehler der Parabelformeln.

Wir wollen nun Ausdrücke für die Fehler der Formeln (IIa) und (IIb) gewinnen. Wir nehmen zunächst an, daß y in $[x_{k-1}, x_{k+1}]$ viermal stetig differentiierbar sei. Die Parabel, durch die y in $[x_{k-1}, x_{k+1}]$ ersetzt wird, sei $Y_{(k)}$. Dann gilt $y(x_{k-1})=Y_{(k)}(x_{k-1})$, $y(x_k)=Y_{(k)}(x_k)$, $y(x_{k+1})=Y_{(k)}(x_{k+1})$ (Bild 4).

Hier gilt natürlich wieder Gl. (4), und zwar ist $m=3$ zu setzen. Aber wir können, wenn wir das Integral (2*) bilden, nicht mehr den Mittelwertsatz anwenden, da in dem Faktor von y''' das Glied $(\xi-x_k)$ beim Durchlaufen des Integrationsintervalls sein Zeichen ändert. Wir müssen diesen Störenfried als Quadrat einzuführen trachten, indem wir an Stelle der Gl. (3) für K jetzt folgenden Ausdruck einführen:

$$\frac{y(\xi_0)-Y_{(k)}(\xi_0)-L(\xi_0-x_{k-1})(\xi_0-x_k)(\xi_0-x_{k+1})}{(\xi_0-x_{k-1})(\xi_0-x_k)^2(\xi_0-x_{k+1})}=K. \tag{6}$$

Dann bilden wir

$$\psi(\xi)=y(\xi)-Y_{(k)}(\xi)-K(\xi-x_{k-1})(\xi-x_k)^2(\xi-x_{k-1})$$
$$-L(\xi-x_{k-1})(\xi-x_k)(\xi-x_{k+1})$$

und bestimmen L so, daß $\psi'(x_k)=0$ ist. Es ergibt sich für gleiche Intervalle:

$$L=\frac{Y'_{(k)}(x_k)-y'(x_k)}{\lambda^2} \tag{7a}$$

und für ungleiche Intervalle:

$$L=\frac{Y'_{(k)}(x_k)-y'(x_k)}{\lambda_k\,\lambda_{k+1}}. \tag{7b}$$

Da $\psi(\xi)$ die vier Nullstellen x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, ξ_0 hat, so müssen zwischen ihnen mindestens drei Nullstellen von $\psi'(\xi)$ liegen. Außerdem ist aber $\psi'(\xi)$ noch im Punkt x_k gleich Null, hat also im ganzen mindestens vier Nullstellen. Daraus folgt, daß $\psi^{IV}(\xi)$ in dem durch die vier Punkte x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, ξ_0 gegebenen Intervall mindestens eine Nullstelle hat, die wir mit $\bar{\xi}$ bezeichnen wollen, und deren Lage von ξ_0 abhängig ist. Bilden wir $\psi^{IV}(\xi)$:

$$\psi^{IV}(\xi)=y^{IV}(\xi)-K\cdot 4!$$

und setzen $\xi=\bar{\xi}$, so ergibt sich

$$K=\frac{y^{IV}(\bar{\xi})}{4!}.$$

Den Fehler der Ersetzung von $y(\xi)$ durch $Y_{(k)}$ an einer beliebigen Stelle ξ erhalten wir aus (6), wenn wir ξ_0 durch ξ ersetzen:

$$y(\xi)-Y_{(k)}(\xi)=\frac{y^{IV}(\bar{\xi})}{4!}(\xi-x_{k-1})(\xi-x_k)^2(\xi-x_{k+1})$$
$$+L(\xi-x_{k-1})(\xi-x_k)(\xi-x_{k+1}).$$

Mit dieser Gleichung bilden wir nun genau wie früher das Integral (2*):

$$w_{kP}=\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} y\,u_{(k)}\,d\xi=\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} Y_{(k)}\,u_{(k)}\,d\xi \tag{8}$$
$$+\frac{1}{4!}\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} y^{IV}(\bar{\xi})(\xi-x_{k-1})(\xi-x_k)^2(\xi-x_{k+1})\,u_{(k)}\,d\xi$$
$$+L\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}}(\xi-x_{k-1})(\xi-x_k)(\xi-x_{k+1})\,u_{(k)}\,d\xi.$$

Nun setzen wir zunächst gleiche Teilintervalle voraus. Dann ist das erste Integral rechts der Näherungswert von w_{kP} gemäß Formel (IIa): W_{kP}. Das zweite Integral kann nach dem Mittelwertsatz leicht ausgewertet werden. Das dritte Integral ergibt den Wert Null. Damit erhalten wir den Fehler der Wanke-Formel:

$$w_{kP}=W_{kP}+\frac{y^{IV}(\xi^*)}{240}\cdot\lambda^5 \qquad x_{k-1}\leqq\xi^*\leqq x_{k+1}. \tag{9}$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, daß der Wanke-Formel eine sehr große Genauigkeit zukommt. Zunächst erscheint $\lambda=\frac{l}{n}$ in der fünften Potenz. Das bedeutet, daß der Fehler der fünften Potenz der Anzahl der Teilintervalle verkehrt proportional ist. Ferner sehen wir, daß (IIa) den Wert von w_{kP}[5]) vollkommen genau liefert, falls y ein Polynom von

[5]) Wir müßten eigentlich sagen: den Wert des Integrals (2*), denn wegen der Vernachlässigung der Quer- und Normalkräfte ist ja dieses Integral auch nur eine Näherung von w_{kP}. Der Kürze halber wollen wir aber im folgenden öfter diese Ausdrucksweise verwenden.

höchstens drittem Grad ist. Überhaupt wird ja die Höhe der Ableitung von y in dem Ausdruck für den Fehler, mit der übrigens Hand in Hand eine Steigerung der Potenz von λ geht, nach der Art: $y^{(m)}\,\lambda^{m+1}$, ein Maß für die Güte der betrachteten Näherungsformel sein.

Diese große Genauigkeit kommt unserer Näherung allerdings nur dann zu, wenn die erwähnten Voraussetzungen erfüllt sind, nämlich gleiche Intervallänge und viermalige stetige Differentiierbarkeit des y. Letzteres muß, sollen alle w_{kP} von der gleichen Güte sein, von 0 bis l erfüllt sein, da ja die aufeinanderfolgenden Näherungsparabeln einander übergreifen (s. Bild 4).

Lassen wir zunächst einmal die Voraussetzung der gleichen Intervalllänge fallen, dann verschwindet das dritte Integral der Gl. (8) nicht mehr. L [Gl. (7b)] verschwindet nur dann, wenn y und $Y_{(k)}$ im Punkt k gleiche Neigung haben. Das ist sicher der Fall, wenn y konstant, linear oder ein Polynom zweiten Grades ist, denn dann stimmt es mit $Y_{(k)}$ vollkommen überein. Für Polynome dritten Grades wird L im allgemeinen nicht mehr verschwinden, so daß die Formel (IIb) hier schon ungenau wird, im Gegensatz zu (IIa). Weiter wollen wir uns bei (IIb) nicht aufhalten, da ihr kaum praktischer Wert zukommt.

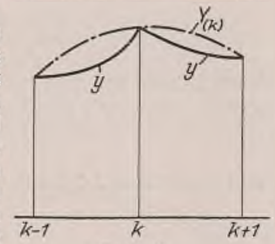


Bild 7.

Betrachten wir nun den Fall, daß y im Punkt k wohl stetig ist, aber eine Ecke hat, was unter jeder Einzellast zutrifft. Hier braucht man gar nicht erst zu rechnen, um einzusehen, daß, falls die Krümmungsverhältnisse so sind wie in Bild 7, die Formeln (IIa) bzw. (IIb) noch ungenauer sind als die Trapezformel. Wenn gleiche Intervalle vorliegen, ist es in diesem Fall besser, nach Formel (IIc) zu rechnen, der wir noch einen Blick zuwerfen wollen. Hier war in k sogar eine Unstetigkeit angenommen (Bild 6). Links von dieser Stelle war y durch die Parabel $Y_{(k-1)}$, rechts davon durch die Parabel $Y_{(k+1)}$ angenähert worden. Der Fehler von w_{kP} setzt sich zusammen aus dem Fehler von $w_{kP}^{(l)}$ und dem Fehler von $w_{kP}^{(r)}$. Wollen wir etwa den Fehler von $w_{kP}^{(l)}$ bestimmen, so können wir direkt an Gl. (4) anknüpfen, in der wir $m = 3$ zu setzen haben:

$$y_{(l)}(\xi) = Y_{(k-1)}(\xi) + \frac{y_{(l)}'''(\bar{\xi})}{3!}(\xi - x_{k-2})(\xi - x_{k-1})(\xi - x_k)$$

$$x_{k-2} \leqq \bar{\xi} \leqq x_k.$$

Darin bedeutet $y_{(l)}$ die Gleichung der y-Kurve links von der Unstetigkeit. Sodann ist mit $u_{(kl)}$, der linken Hälfte der $u_{(k)}$-Kurve, zu multiplizieren und zu integrieren. Da $u_{(kl)}$ nur im Intervall von $k-1$ bis k von Null verschieden ist, erstreckt sich das Integral nur über dieses Stück der ξ-Achse, wo der Faktor von $y_{(l)}'''$ sein Zeichen nicht ändert. Wir können daher den Mittelwertsatz anwenden und erhalten einen Fehler, der von $y_{(l)}'''$ abhängt:

$$(10') \qquad f_l = -\frac{y_{(l)}'''(\bar{\xi}_l)}{45}\cdot\lambda^4 \qquad x_{k-2} \leqq \bar{\xi}_l \leqq x_k.$$

Ebenso findet man für

$$(10'') \qquad f_r = +\frac{y_{(r)}'''(\bar{\xi}_r)}{45}\cdot\lambda^4 \qquad x_k \leqq \bar{\xi}_r \leqq x_{k+2}.$$

Der Fehler der Formel (IIc) ist also gegeben durch

$$(11) \qquad f = -\frac{\lambda^4}{45}\left[y_{(l)}'''(\bar{\xi}_l) - y_{(r)}'''(\bar{\xi}_r)\right].$$

Er wird wegen der auftretenden Differenz im allgemeinen klein sein, wenn die beiden dritten Ableitungen dasselbe Zeichen haben.

Die Ausdrücke für f_l und f_r stellen, sinngemäß bezeichnet, die Fehler der nach (IIa') berechneten Endgewichte w_{nP} und w_{0P} dar. Diese werden demnach weniger genau erhalten als die nach (IIa) berechneten Gewichte.

Den Fall, daß y in einem Teilintervall Ecken oder Unstetigkeiten aufweist, wollen wir nicht behandeln, sondern denken uns dies immer durch entsprechende Wahl der Teilpunkte vermieden.

4. Die Formeln von Kriwoschein.

Kriwoschein[6]) versuchte bessere Näherungsformeln für w_{kP} dadurch zu gewinnen, daß er die y-Kurve stückweise durch eine kubische Parabel ersetzt, die mit ihr vier Punkte gemeinsam hat. Er setzt gleiche Intervalle voraus. Mit Ausnahme der Endgewichte kommt er wieder auf die Wanke-Formel (IIa), wie es ja nach unserer Fehlerabschätzung (9) zu erwarten ist. Die Näherungsformel für w_{0P} leitet er ähnlich wie Wanke aus der ersten kubischen Näherungsparabel her und erhält:

$$(12') \qquad w_{0P} \doteq \frac{\lambda}{360}(97\,y_0 + 114\,y_1 - 39\,y_2 + 8\,y_3).$$

Bei der Aufstellung der Formel für w_{nP} unterscheidet Kriwoschein drei Fälle, je nachdem n, die Anzahl der Teilintervalle, durch 3 geteilt den Rest 0, 1 oder 2 läßt. Im ersten Fall berechnet er w_{nP} analog wie w_{0P} aus der letzten kubischen Näherungsparabel, die durch die den Teilungspunkten $n-3$, $n-2$, $n-1$, n entsprechenden Kurvenpunkte gelegt wurde, und erhält:

$$(12'') \qquad w_{nP} \doteq \frac{\lambda}{360}(8\,y_{n-3} - 39\,y_{n-2} + 114\,y_{n-1} + 97\,y_n).$$

Im zweiten Fall legt er durch die Punkte $n-1$, n (wir meinen im folgenden immer die diesen Teilungspunkten entsprechenden Kurvenpunkte) eine gewöhnliche quadratische Parabel, die mit der durch die Punkte $n-4$ bis $n-1$ gelegten kubischen Parabel eine gemeinsame Tangente im Punkt $n-1$ hat (Bild 8), und erhält:

$$(13) \qquad w_{nP} \doteq \frac{\lambda}{72}(-2\,y_{n-4} + 9\,y_{n-3} - 18\,y_{n-2} + 29\,y_{n-1} + 18\,y_n).$$

Im dritten Fall legt er durch die Punkte $n-2$, $n-1$, n eine kubische Parabel, die mit der durch die Punkte $n-5$ bis $n-2$ gelegten kubischen Parabel eine gemeinsame Tangente im Punkt $n-2$ hat, und erhält:

$$(14) \qquad w_{nP} \doteq \frac{\lambda}{360}(8\,y_{n-5} - 36\,y_{n-4} + 72\,y_{n-3} - 95\,y_{n-2} + 138\,y_{n-1} + 93\,y_n).$$

Die Unterscheidung dieser drei Fälle ist nicht notwendig. Es kommt ja nur darauf an, die y-Kurve im Integrationsintervall, das ist hier das letzte Teilintervall, möglichst gut anzunähern. Was dadurch in den übrigen Intervallen hervorgerufen wird, ist ganz belanglos, denn für das nächste Gewicht wird die y-Kurve im neuen Integrationsintervall durch eine neue Näherungskurve ersetzt. Warum auch am rechten und linken Trägerende nach verschiedenen Formeln rechnen? Das gäbe bei Symmetrie der y-Kurve unter Umständen verschiedene Endgewichte. Es empfiehlt sich daher, unter den drei neuen Endformeln die geeignetste auszuwählen und bei ihr zu bleiben.

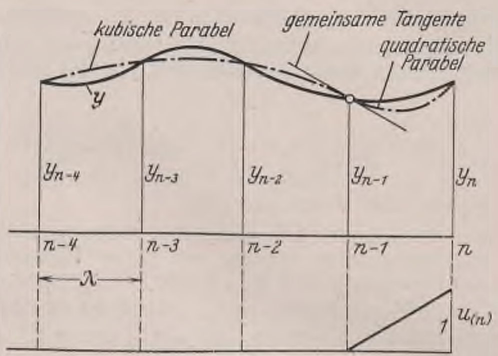


Bild 8.

Für die folgenden Fehlerabschätzungen wollen wir annehmen, daß y im Bereich sämtlicher für die Näherungsformel verwendeten Kurvenpunkte keinerlei Ecken oder Unstetigkeiten hat. Ferner sollen die in den Fehlern vorkommenden Differentialquotienten in den angegebenen Bereichen existieren und stetig sein.

Der Fehler der Formel (12'') ist nach unserer Methode leicht zu finden:

$$f = -\frac{7}{480}\cdot y^{\mathrm{IV}}(\xi^*)\,\lambda^5 \qquad x_{n-3} \leqq \xi^* \leqq x_n.$$

Um etwas über die Fehler der Formeln (13) und (14) zu erfahren, denken wir uns jene gemeinsame Tangente in den Punkten $n-1$ bzw. $n-2$ nicht als Tangente der vorletzten Näherungskurve, sondern als Tangente der y-Kurve selbst. Dann wird unser Verfahren anwendbar. Die so verursachten Fehler werden im allgemeinen kleiner sein als die tatsächlichen Fehler der Formeln (13) und (14), denn wenn die Dinge so lägen, wie wir sie betrachten, dann würde sich die letzte Näherungskurve meist besser an die y-Kurve anschmiegen, als wenn jene gemeinsame Tangente bloß der vorletzten Näherungskurve entstammt.

Wenn wir auf diese Art den Fehler der Formel (13) näherungsweise berechnen wollen, gehen wir von Gl. (4) aus. Die Näherungskurve $Y(\xi)$ ist in unserem Fall eine Parabel, die mit der y-Kurve folgende drei Punkte gemeinsam hat: zwei unendlich benachbarte Punkte für $\xi = x_{n-1}$ und einen Punkt für $\xi = x_n$. Demnach gilt:

$$y(\xi) = Y(\xi) + \frac{y'''(\bar{\xi})}{3!}(\xi - x_{n-1})^2(\xi - x_n) \qquad x_{n-1} \leqq \bar{\xi} \leqq x_n.$$

Durch Differentiation überzeugt man sich sofort, daß $y'(x_{n-1}) = Y'(x_{n-1})$ ist, wie es laut Annahme sein muß.

Diese Gleichung, mit $u_{(n)}$ multipliziert und von x_{n-1} bis x_n integriert, ergibt, daß der Fehler der Formel (13) ungefähr gleich ist:

$$f \doteq -\frac{1}{120}\cdot y'''(\xi^*)\,\lambda^4 \qquad x_{n-1} \leqq \xi^* \leqq x_n.$$

Ganz ähnlich ergibt sich der Fehler der Formel (14):

$$f \doteq -\frac{13}{1440}\cdot y^{\mathrm{IV}}(\xi^*)\,\lambda^5 \qquad x_{n-2} \leqq \xi^* \leqq x_n.$$

Der Vergleich der drei Fehler zeigt uns, daß Formel (13) am wenigsten genau und Formel (14) etwas genauer als (12'') ist. Da ja unsere Fehlerabschätzungen nur näherungsweise gelten, wird man wohl am besten nach der einfacheren Formel (12'') rechnen. (IIa) in Verbindung mit den beiden Formeln (12) ergibt dann eine ziemlich gleichmäßige Genauigkeit aller w_{kP}, im Gegensatz zu (IIa) in Verbindung mit (IIa').

Für den Fall der Ersetzung von y durch quadratische Parabeln, also des Verfahrens von Wanke, leitet Kriwoschein ebenfalls eine neue Endformel her, falls die Anzahl der Teilintervalle ungerade ist. Diese Formel ist aber weniger genau als (12).

[6]) G. Kriwoschein, Anwendung der Simpsonschen Regel zur Ermittlung der Biege- und Einflußlinien. Stahlbau 1940, (13. Jahrg.), Heft 5/7.

5. Herleitung einer neuen Näherungsformel.

Bisher stand bei ungleich langen Intervallen nur die Trapezformel (Ib) zur Verfügung, wenn man von der komplizierten Formel (IIa) absieht. Ferner wird bei einer größeren Anzahl von Ecken oder Unstetigkeiten der y-Kurve die Anwendung der Formel (IIc), die übrigens nur für gleiche Teilintervalle gilt, umständlich, so daß wieder nur die ungenaue Formel (Ic) zur Anwendung kommt. Wir werden daher, einer Anregung von Ernst Melan-Wien folgend, eine neue, sehr einfache und recht genaue Näherungsformel für die w_{kP} herleiten, die diese Schwierigkeiten meistert.

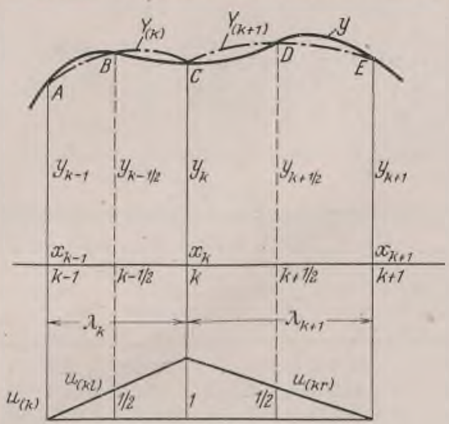


Bild 9.

Wir denken uns wieder alle Punkte, in denen wir Gewichte wünschen, auf der ξ-Achse markiert. Sie mögen wieder mit $0, 1, 2 \ldots n$ bezeichnet werden. Ihre Abstände können gleich oder verschieden groß gewählt werden, nur soll niemals eine Ecke oder Unstetigkeit des y in ein Teilintervall hineinfallen. Jetzt wählen wir außerdem noch in der Mitte jedes Intervalls einen neuen Teilpunkt, also z. B. in λ_k den Punkt $k-\frac{1}{2}$, in λ_{k+1} den Punkt $k+\frac{1}{2}$, so daß wir schließlich auf der ξ-Achse folgende Punkte markiert haben: $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2 \ldots k-1, k-\frac{1}{2}, k, k+\frac{1}{2}, k+1 \ldots n-\frac{1}{2}, n$. Den Wert von y im Punkt $\frac{1}{2}$ bezeichnen wir mit $y_{1/2}$, im Punkt $\frac{3}{2}$ mit $y_{3/2}$ usw. Zur Berechnung des Integrals (2*):

$$w_{kP}=\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} y\,u\,d\xi$$

ersetzen wir y in λ_k durch die Parabel $Y_{(k)}$, die durch die drei Punkte ABC gehen soll, in λ_{k+1} durch die Parabel $Y_{(k+1)}$ durch die Punkte CDE (Bild 9), so daß also gilt:

$$(15)\qquad w_{kP} \doteq \int_{x_{k-1}}^{x_k} Y_{(k)}\,u_{(kl)}\,d\xi+\int_{x_k}^{x_{k+1}} Y_{(k+1)}\,u_{(kr)}\,d\xi.$$

Die Integranden dieser beiden Integrale sind Polynome dritten Grades, daher liefert die Simpsonsche Formel den genauen Wert der Integrale:

$$w_{kP} \doteq \frac{\lambda_k}{6}\left(y_{k-1}\cdot 0+4\,y_{k-1/2}\cdot\frac{1}{2}+y_k\cdot 1\right)+\frac{\lambda_{k+1}}{6}\left(y_k\cdot 1+4\,y_{k+1/2}\cdot\frac{1}{2}+y_{k+1}\cdot 0\right).$$

So erhalten wir eine neue Näherungsformel für ungleiche Teilintervalle:

$$(\mathrm{IIIb})\quad w_{kP} \doteq \frac{1}{6}\left[2\,\lambda_k y_{k-1/2}+(\lambda_k+\lambda_{k+1})y_k+2\,\lambda_{k+1}y_{k+1/2}\right].$$

Für den ersten und letzten Teilpunkt gilt:

$$w_{0P} \doteq \frac{\lambda_1}{6}\left(y_0+2\,y_{1/2}\right)\qquad w_{nP} \doteq \frac{\lambda_n}{6}\left(2\,y_{n-1/2}+y_n\right).$$

Für gleiche Teilintervalle vereinfacht sich (IIIb) zu:

$$(\mathrm{IIIa})\qquad w_{kP} \doteq \frac{\lambda}{3}\left(y_{k-1/2}+y_k+y_{k+1/2}\right).$$

Ist y im Punkt k unstetig und hat es dort die beiden Werte y_{kl} und y_{kr}, so zerfällt das mittlere Glied von (IIIb) in zwei Teile:

$$(\mathrm{IIIc})\quad w_{kP} \doteq \frac{1}{6}\left[\lambda_k\left(2\,y_{k-1/2}+y_{kl}\right)+\lambda_{k+1}\left(y_{kr}+2\,y_{k+1/2}\right)\right].$$

Unstetigkeiten in den Punkten $k-1$ oder $k+1$ ändern an der Formel nichts.

6. Der Fehler der neuen Formel.

Der Fehler der neuen Näherungsformel, betrachten wir etwa (IIIb), wird sich additiv zusammensetzen aus den Fehlern f_1 und f_2 der beiden Integrale der Gl. (15). Setzen wir voraus, daß y sowohl in λ_k als auch in λ_{k+1} viermal stetig differentiierbar sei (in den Punkten $k-1, k, k+1$ braucht dies nicht erfüllt zu sein), so ist f_1, als Fehler der Simpsonschen Näherungsformel, gleich[7]):

$$f_1=-\frac{\lambda_k^5}{2880}\left[y(\xi_k)\,u_{(kl)}(\xi_k)\right]^{\mathrm{IV}}\qquad \xi_k \text{ Punkt aus } \lambda_k.$$

Da $u_{(kl)}$ linear ist, gilt:

$$\left[y(\xi_k)\,u_{(kl)}(\xi_k)\right]^{\mathrm{IV}}=y^{\mathrm{IV}}(\xi_k)\,u_{(kl)}(\xi_k)+4\,y'''(\xi_k)\,u'_{(kl)}(\xi_k).$$

$u_{(kl)}(\xi_k)$ ist eine Zahl zwischen 0 und 1, wir schreiben dafür ϑ_k, $0\leqq\vartheta_k\leqq 1$. $u'_{(kl)}$ ist konstant und hat den Wert $\frac{1}{\lambda_k}$. Es gilt also:

$$f_1=-\frac{\lambda_k^5}{2880}\left[y^{\mathrm{IV}}(\xi_k)\,\vartheta_k+4\,y'''(\xi_k)\,\frac{1}{\lambda_k}\right].$$

Genau so erhält man

$$f_2=-\frac{\lambda_{k+1}^5}{2880}\left[y^{\mathrm{IV}}(\xi_{k+1})\,\vartheta_{k+1}-4\,y'''(\xi_{k+1})\,\frac{1}{\lambda_{k+1}}\right],$$

wo ξ_{k+1} ein Punkt aus λ_{k+1} und $0\leqq\vartheta_{k+1}\leqq 1$ ist. Damit erhalten wir den Fehler der Näherungsformel (IIIb):

$$(16)\quad f=-\frac{1}{2880}\left[y^{\mathrm{IV}}(\xi_k)\,\vartheta_k\,\lambda_k^5+y^{\mathrm{IV}}(\xi_{k+1})\,\vartheta_{k+1}\,\lambda_{k+1}^5\right]-\frac{1}{720}\left[y'''(\xi_k)\,\lambda_k^4-y'''(\xi_{k+1})\,\lambda_{k+1}^4\right].$$

Dieser Ausdruck für den Fehler, der sinngemäß auch für die Formeln (IIIa) und (IIIc) gilt, zeigt, daß diese Formeln erst für Polynome dritten Grades ungenau werden. Ja noch mehr, für den Fall gleicher Intervallänge ist (IIIa) auch noch für Polynome dritten Grades genau, da hier y''' konstant ist. Sonst ist das Glied von f, das die dritten Ableitungen enthält, als Differenz im allgemeinen klein, woraus wir sehen, daß die neuen Formeln hinter den Formeln (II) an Genauigkeit kaum zurückstehen. Dabei sind sie noch weitaus robuster als diese. Ungleiche Teilintervalle, Ecken oder Unstetigkeiten des y ändern ihr Aussehen sowie ihre Genauigkeit nur wenig. Sie haben nur den Nachteil, daß man zu ihrer Anwendung bei der gleichen Anzahl von Gewichten rund doppelt soviele y-Werte braucht als bei den früheren Formeln.

Die Endformeln von (III) sind wieder etwas ungenauer. Ihre Fehler werden durch Ausdrücke wie die für f_1 und f_2 dargestellt.

Für lineares y müssen die neuen Formeln in die Formeln (I) überführbar sein, da in diesem Fall sowohl (I) als auch (III) den genauen Wert von w_{kP} liefern. Das gelingt sofort, wenn man bedenkt, daß hier gilt:

$$y_{k-1/2}=\frac{1}{2}\left(y_{k-1}+y_k\right)\quad\text{und}\quad y_{k+1/2}=\frac{1}{2}\left(y_k+y_{k+1}\right).$$

Dies in (IIIa) bzw. (IIIb) eingesetzt, ergibt (Ia) bzw. (Ib).

7. Ergebnis.

Wir wollen nun die Anwendungsgebiete der einzelnen Näherungsformeln für die Berechnung der w_{kP} bei verschiedener Gestalt der $y=M_{\xi P}\cdot\frac{J_0}{J_\xi\cdot\cos\varphi_\xi}$-Kurve abstecken. Wir haben systematisch folgende Bezeichnung durchgeführt:

Ia, b, c ... die Trapezformeln,
IIa, b, c ... die Wanke-Parabelformeln,
IIIa, b, c ... die neuen Formeln.

a bezog sich auf gleich lange, b auf ungleich lange Teilintervalle, c auf Unstetigkeit des y im Punkt k.

Zunächst ist die Intervallteilung so vorzunehmen, daß Ecken oder Unstetigkeiten des y immer mit Teilungspunkten zusammenfallen. Sodann wollen wir folgende Fälle unterscheiden und angeben, welche Formeln zur Berechnung der w_{kP} zu verwenden sind:

1. y setzt sich aus lauter Geradenstücken zusammen. Bei gleicher Teilung w_{kP} aus Ia, bei ungleicher aus Ib, in Unstetigkeitsstellen aus Ic. Die so gewonnenen Werte sind vollkommen genau.

2. y ist nicht linear, aber von 0 bis l stetig und ohne Ecken. Bei gleicher Teilung w_{kP} aus IIa [Endgewichte eventuell aus (12)], bei ungleicher aus IIIb oder, falls die y-Werte schwierig zu berechnen sind und keine große Genauigkeit erforderlich ist, aus Ib.

3. y ist nicht linear, besitzt aber einige wenige Ecken oder Unstetigkeitsstellen. Bei gleicher Teilung w_{kP} aus IIa, in den Ecken nur bei günstigen Krümmungsverhältnissen nach IIa, sonst ebenso wie in den Unstetigkeitsstellen nach IIc[8]). Bei ungleicher Teilung wie unter 4.

4. y ist nicht linear und besitzt viele Ecken oder Unstetigkeitsstellen. Bei gleicher Teilung w_{kP} aus IIIa bzw. IIIc, bei ungleicher aus IIIb bzw. IIIc. Sind die y-Werte mühsam zu berechnen und ist keine große Genauigkeit erforderlich, dann w_{kP} aus Ia, Ib, Ic.

Hier wurden die Wege gezeigt, wie man jeweils bei geringstem Rechenaufwand zu einem möglichst genauen Wert von w_{kP} kommt.

[7]) Die Herleitung dieses Ausdrucks befindet sich in dem obenerwähnten Buch von Schrutka, § 571.

[8]) Dabei wird man manchmal einen Ast der y-Kurve über seinen Gültigkeitsbereich hinaus verlängern müssen; siehe das folgende Beispiel.

Wer es aber nicht liebt, einmal nach dieser und dann wieder nach jener Formel zu rechnen, sondern eine Formel oder Formelgruppe wünscht, die in allen Fällen gilt, dem wird man am besten die neuen Formeln empfehlen.

8. Beispiel.

Um die Ergebnisse der einzelnen Formeln miteinander zu vergleichen, wollen wir ein einfaches Zahlenbeispiel behandeln. Gegeben sei der in Bild 10 dargestellte Träger von konstantem Trägheitsmoment J_0, versehen mit der gezeichneten Dreiecksbelastung. Wir wollen zunächst die Winkelgewichte in den Punkten $\xi = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16$ bestimmen, die wir mit $w_{0P}, w_{1P}, \ldots w_{8P}$ bezeichnen. Dann wollen wir, um zu sehen, wie sich die Fehler der w_{kP} auf die Durchbiegungen auswirken, was ja schließlich das Entscheidende ist, einige δ_{xP} aus den w_{kP} berechnen, und zwar: $\delta_{0P}, \delta_{8P}, \delta_{10P}, \delta_{16P}$.

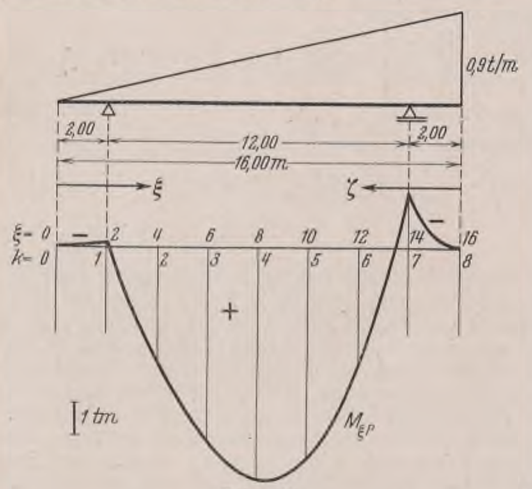


Bild 10.

Man kann leicht zeigen, daß w_{0P} und w_{8P} hier keinerlei Einfluß auf die Ordinaten der Biegelinie haben. Sie können lediglich dazu verwendet werden, die Tangente an die Biegelinie in ihrem Anfangs- und Endpunkt zu zeichnen. Diese Tangenten werden durch den ersten und letzten Seilstrahl des mit $w_{0P}, w_{1P}, \ldots w_{8P}$ gezeichneten Seilecks dargestellt. Wir haben die Endgewichte in die folgenden Tabellen deshalb aufgenommen, um zu zeigen, wie die Endformeln arbeiten. Ein Endgewicht ist nur bei Einspannung des betreffenden Trägerendes von Einfluß auf die Ordinaten der Biegelinie. Denn hier ist die Tangente an die Biegelinie im Einspannpunkt die Bezugslinie, von der aus die δ_{xP} zu messen sind. In diesem Fall wird man trachten, das Endgewicht möglichst genau zu bestimmen.

Die $M_{\xi P} = y$-Kurve zerfällt hier in drei Äste mit den Gleichungen:

$$y = -\frac{3}{320} \cdot \xi^3 \qquad 0 \leqq \xi \leqq 2.$$

$$y = 2(\xi - 2) - \frac{3}{320} \cdot \xi^3 \qquad 2 \leqq \xi \leqq 14.$$

$$y = \frac{1}{320}(3\,\zeta - 144)\,\zeta^2 \qquad 0 \leqq \zeta \leqq 2 \qquad (\zeta = 16 - \xi).$$

In Tabelle 1 sind die Ordinaten von y zusammengestellt, die wir zur Berechnung der w_{kP} nach den verschiedenen Näherungsformeln brauchen. In Tabelle 2 wurden die genauen Werte der w_{kP}, gewonnen aus dem Integral (2*), den Ergebnissen der Näherungsformeln gegenübergestellt. Wir sehen, daß die Gewichte w_{2P} bis w_{6P} sowohl mittels der Wanke- als auch mit der neuen Formel genau erhalten werden, wie es ja nach unseren Fehlerabschätzungen sein muß. Die Trapezformel dagegen liefert ungenaue Werte. Die neue Formel liefert sogar w_{1P} und w_{7P} genau, während hier die Wanke-Formel infolge der Ecken und der ungünstigen Krümmungsverhältnisse der y-Kurve zu grob falschen Werten führt. Die Trapezformel kommt an dieser Stelle den richtigen Werten näher. Um hier die Formel IIc anwenden zu können, muß man sich die y-Kurve beiderseits über die Trägerenden hinaus verlängert denken und die Ordinaten für $\xi = -2$ und $\zeta = -2$ berechnen. IIc ergibt dann die genauen Werte von w_{1P} und w_{7P}. Auch die beiden Endgewichte werden ganz verdorben, wenn man gedankenlos in die Formeln IIa' einsetzt. Hier müßte man wieder den ersten und letzten Ast der y-Kurve verlängern, und zwar bis $\xi = 4$ bzw. $\zeta = 4$. Bei der neuen Formel ist dies alles nicht notwendig.

Tabelle 1.

ξ m	$320\,y$ tm	ξ m	$320\,y$ tm
0	0	9	+ 2293
1	— 3	10	+ 2120
2	— 24	11	+ 1767
3	+ 559	12	+ 1216
4	+ 1088	13	+ 449
5	+ 1545	14	— 552
6	+ 1912	15	— 141
7	+ 2171	16	0
8	+ 2304		

In Tabelle 3 wurden die EJ_0-fachen Werte der Durchbiegungen in den genannten vier Punkten zusammengestellt, welche sich aus den nach den verschiedenen Formeln berechneten Gewichten ergeben. In der ersten Spalte stehen die genauen Werte, in den übrigen sind auch die absoluten Beträge der Fehler in Prozenten der genauen Werte angegeben.

Tabelle 2.

ξ	k	w_{kP} (tm²) berechnet nach Formel			
		(2*)	(Ia)	(IIa)	(IIIa)
m		1	2	3	4
0	0	— 0,007 50	— 0,025 00	— 0,320 83	— 0,006 25
2	1	+ 1,108 33	+ 1,033 33	+ 0,441 67	wie Spalte 1
4	2	+ 6 650 00	+ 6,500 00	wie Spalte 1	wie Spalte 1
6	3	+ 11,725 00	+ 11,500 00	wie Spalte 1	wie Spalte 1
8	4	+ 14,100 00	+ 13,800 00	wie Spalte 1	wie Spalte 1
10	5	+ 12,875 00	+ 12,500 00	wie Spalte 1	wie Spalte 1
12	6	+ 7,150 00	+ 6,700 00	wie Spalte 1	wie Spalte 1
14	7	— 0,508 33	— 1,033 33	— 2,241 67	wie Spalte 1
16	8	— 0,292 50	— 0,575 00	— 1,179 17	— 0,293 75

Tabelle 3.

ξ	$EJ_0\,\delta_{xP}$ (tm³) mittels w_{kP} nach Formel						
	(2*)	(Ia)	Fehler	(IIa)	Fehler	(IIIa)	Fehler
m	1	2	%	3	%	4	%
0	— 54,000	— 52 600	2,6	— 52,667	2,5	wie Spalte 1	0,0
8	+ 105,300	+ 102,600	2,6	wie Spalte 1	0,0	wie Spalte 1	0,0
10	+ 92,133	+ 89,533	2,8	wie Spalte 1	0,0	wie Spalte 1	0,0
16	— 52,200	— 49,400	5,4	— 48,733	6,6	wie Spalte 1	0,0

Die Ungenauigkeit der ersten und letzten Durchbiegung in Spalte 3 rührt von den ungenauen Gewichten w_{1P} und w_{7P} her. Diese Durchbiegungen werden mit Hilfe der nach der neuen Formel berechneten Gewichte trotz ungenauer Endgewichte fehlerlos erhalten, weil sie, wie wir festgestellt haben, von den Endgewichten unabhängig sind.

Um die Genauigkeit unserer Formeln auch im Falle ungleicher Teilung zu prüfen, versuchen wir die obigen vier Durchbiegungen dadurch zu bestimmen, daß wir nur in den Punkten $\xi = 0, 2, 8, 10, 14, 16$ Gewichte anbringen. Die Werte dieser Gewichte w'_{kP}, die jetzt natürlich andere sind als früher, sind in Tabelle 4 zusammengestellt. In Spalte 1 stehen wieder die genauen Werte. Wir sehen, daß die Werte der 3. Spalte von ihnen nur sehr wenig abweichen.

Tabelle 4.

ξ	w'_{kP} (tm²) berechnet nach Formel		
	(2*)	(Ib)	(IIb)
m	1	2	3
0	— 0,007 50	— 0,025 00	— 0,006 25
2	+ 9,450 00	+ 7,000 00	+ 9.550 00
8	+ 24,133 33	+ 21,333 33	+ 24.033 33
10	+ 16,450 00	+ 14,500 00	+ 16,468 75
14	+ 3,066 67	+ 0,966 67	+ 3,047 92
16	— 0,292 50	— 0,575 00	— 0,293 75

Tabelle 5.

ξ	$EJ_0\,\delta_{xP}$ (tm³) mittels w_{kP} nach Formel			
	(Ib)	Fehler	(IIIb)	Fehler
m	1	%	2	%
0	— 45,000	16,7	— 54,113	0,21
8	+ 93,000	11,7	+ 105,038	0,25
10	+ 81,333	11,7	+ 91 983	0,16
16	— 42,600	18,4	— 52,088	0,21

In Tabelle 5 finden wir die EJ_0-fachen Werte der Durchbiegungen, aus denen wir sehen, daß bei dieser Teilung in sehr stark voneinander verschiedene Intervalle die Trapezformel ganz unbrauchbare Ergebnisse liefert, woran hauptsächlich die große Länge einzelner Intervalle schuld ist. Dagegen schneidet die neue Formel überraschend gut ab. IIIb ist sogar genauer als die lange Formel IIb. So liefert diese z. B. für das Gewicht im Punkt $\xi = 8$ den Wert $24{,}8\dot{3}$ gegenüber $24{,}0\dot{3}$ nach IIIb, was dem genauen Wert $24{,}1\dot{3}$ viel näherkommt.

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt.
Verlag: Wilhelm Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W 9.
Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

DER STAHLBAU

Schriftleitung:
Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule
Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599
Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61
Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage zur Zeitschrift **DIE BAUTECHNIK** Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

13. Jahrgang | BERLIN, 6. Dezember 1940 | Heft 25/26

Zur Theorie der Schweißverbindungen.

Von Prof. Dr.-Ing. habil. Karl Girkmann, Wien.

(Schluß aus Heft 23/24.)

V. Stumpfnaht-Verbindungen.

Wenn zwei Stäbe gleichen Querschnittes durch eine Stumpfnaht verbunden werden, die vollkommen einwandfrei ausgeführt und auf Blechdicke genau abgearbeitet ist, so kann durch sie der Kraftfluß ungehindert und ohne Ablenkung hindurchgehen. Wir sind dann in der Lage, die von Normal- und Querkräften sowie von Biegungs- und Torsionsmomenten hervorgerufenen Lastspannungen nach den einfachen Regeln der technischen Festigkeitslehre hinreichend genau zu ermitteln.

Wenn jedoch die Naht nicht auf Blechdicke abgearbeitet ist, vielmehr die Schweißwülste belassen bleiben, dann ändern sich bereits die Festigkeitsverhältnisse. Die statische Festigkeit erfährt zwar keine Minderung, die Dauerfestigkeit jedoch wird herabgesetzt. Die Ursache dieser Erscheinung liegt in der Störung des gleichmäßigen Spannungsverlaufes und in den hierdurch bedingten örtlichen Erhöhungen der Werkstoffanstrengungen. Über die Art des Spannungszustandes geben uns die experimentellen Untersuchungen von E. G. Coker[51]) Aufschluß (in Bild 19 ist der Verlauf der Normalspannungen längs der Berandung sowie längs zweier Schnitte dargestellt).

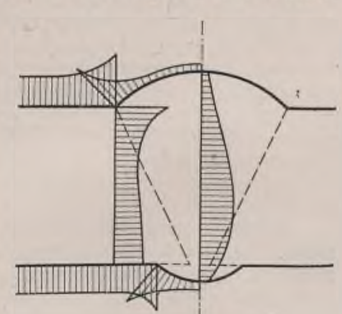


Bild 19.

Unter Zugrundelegung einer entsprechend genäherten, durchaus gerundeten Berandungsform ließe sich der Spannungszustand auch auf rein rechnerischem Wege ermitteln[52]).

Auch bei einwandfrei hergestellter und bearbeiteter Naht tritt im Stumpfstoß von Stäben gleichen Querschnittes eine Störung des gleichmäßigen Spannungsverlaufes auf, sobald Werkstoffinhomogenitäten vorhanden sind. Diese Störungen stellen sich aber erst ein, wenn die Fließgrenze im Mutterwerkstoff überschritten wird.

Wenn aber das elastische Verhalten des Mutterwerkstoffes und des Schweißgutes verschieden sind, dann treten schon unter rein elastischen Beanspruchungen ungleichmäßige Spannungszustände auf. Jäger[53]) hat

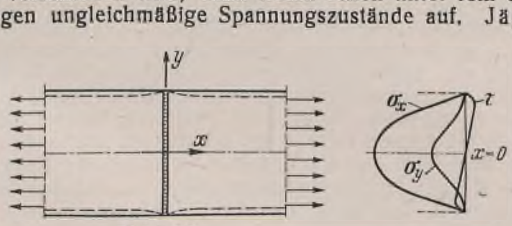


Bild 20.

eine axial beanspruchte Stumpfnahtverbindung für den Fall untersucht, daß Konstruktions- und Nahtwerkstoff verschieden große Elastizitätsmodule[54]) besitzen. In den Stäben entstehen dann ebene Spannungszustände; die Verteilung der Normalspannungen längs der Schweißnähte ist eine ungleichmäßige, und um so unterschiedlicher, je stärker das elastische Verhalten des Mutterwerkstoffes von dem des Nahtwerkstoffes abweicht. Die Untersuchung liefert für solche Fälle der Verschiedenheit der Elastizitätsmodule Nullwerte der Spannungen an den Nahtenden. Bild 20 zeigt den Verlauf der Spannungen längs der Naht im Falle vollkommen starren Nahtwerkstoffes. Bei der Beurteilung dieses Ergebnisses ist zu berücksichtigen, daß mit den gewählten einfachen Näherungsansätzen für die Spannungsfunktion der Stäbe nicht alle Randbedingungen voll zu befriedigen waren und auch die Bedingung für das Geradebleiben der Nahtachse nicht berücksichtigt werden konnte. Es sei darauf hingewiesen, daß die strenge Behandlung einer ähnlichen Aufgabe, nämlich die Untersuchung des Druckversuches als ebenes Problem[55]), zu einem anderen Ergebnis geführt hat.

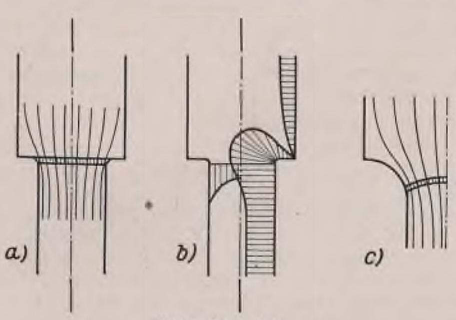


Bild 21a bis c.

Für den Stoß gleich dicker, aber verschieden breiter Stäbe (Bild 21a) ist eine rein rechnerische Ermittlung des Spannungszustandes auch unter der Annahme durchaus gleicher Werkstoffeigenschaften bisher noch nicht gelungen. Zur Beurteilung der Spannungsverhältnisse können aber die Ergebnisse spannungsoptischer Untersuchungen[56]) an Flachstäben abgesetzter Breite herangezogen werden. Bild 21b zeigt die Normalspannungen längs der Berandung sowie jene des Übergangsquerschnittes eines axial beanspruchten Stabes. An den Stabrändern entstehen Spannungsspitzen, deren Größe wächst, wenn der Breitenunterschied zunimmt oder der Halbmesser der Ausrundung an den einspringenden Ecken kleiner wird. In einer scharf einspringenden Ecke müßte sich rechnerisch ein irregulärer Spannungszustand ergeben. Ähnliche Verhältnisse bestehen nun auch beim Stumpfstoß verschieden breiter Stäbe. Eine Verbesserung der Spannungsverhältnisse kann herbeigeführt werden, indem man den Übergang möglichst allmählich vollzieht. Schaechterle[45]) hat hierfür verschiedene Lösungen (Bild 21c) angegeben. Beim Stumpfstoß verschieden dicker Stäbe kann durch entsprechende Formung der Stumpfnaht ein allmählicher Übergang erzielt werden[45]); theoretische Untersuchungen liegen hier nicht vor.

Abschließend soll noch die Abhängigkeit der Dauerfestigkeit von der Neigung des Stoßes zur Stabachse erörtert werden. Es ist bekannt[57])[58]), daß die Dauerfestigkeit eines axial beanspruchten Stumpfstoßes von Flachstäben gleichen Querschnittes ansteigt, wenn der Stoß nicht senkrecht, sondern schräg zur Stabachse angeordnet wird. Dieses Ergebnis ist nun so zu erklären: die Festigkeit der Naht im Falle einer Beanspruchung senkrecht zur Nahtrichtung ist kleiner als für die Beanspruchung parallel zur Naht, da sich im ersteren Falle die unvermeidlichen Herstellungsfehler (Schlackeneinschlüsse, Einbrandkerben, mangelnde

[51]) Journ. Amer. Weld. Soc. 13 (1934), Nr. 6.

[52]) H. Neuber, Kerbspannungslehre. (S. 65, Kerbwirkung durch Werkstoffanhäufung). Berlin 1937.

[53]) Die Spannungsverteilung in geschweißten Stumpfstößen. Stahlbau 11 (1938).

[54]) Vgl. die Versuchsergebnisse von O. Mies, Elektroschweißung 2 (1931), S. 61; R. Malisius, Elektroschweißung 3 (1932), S. 225, und C. F. Keel, Z. f. Schweißtechn. 1932, S. 214, nach welchen der Elastizitätsmodul des Schweißgutes i. a. etwas kleiner als der des Mutterwerkstoffes ist.

[55]) M. Knein, Zur Theorie des Druckversuches. ZAMM 6 (1926), S. 414.

[56]) s. z. B.: S. Timoshenko u. W. Dietz, Trans. of the ASMA. 47 (1925), S. 199.

[57]) K. Siems, Int. Ver. f. Brückenb. u. Hochbau, I. Kongr. (1932), Schlußber., S. 278.

[58]) O. Graf, Stahlbau 6 (1933), Heft 12.

Bindung, feine Spaltrisse usw.) ungünstiger auswirken. Roš[59]) betrachtet daher die Nahtzone als anisotrop. Zur Beurteilung der Anstrengung des Werkstoffes zieht er die Hypothese der unveränderlichen Gestaltänderungsenergie heran, von der erwiesen ist[60]), daß :e für den quasiisotropen Stahl bis unmittelbar vor dem Bruch in Geltung bleibt. Als Maß für die Anstrengung gilt die Größe der Vergleichsspannung. Den nach dieser Hypothese sich ergebenden Ausdruck für die Vergleichsspannung formt nun Roš unter Verwertung experimenteller Ergebnisse so um, daß der Anisotropie der Schweißverbindung Rechnung getragen wird. Die Vergleichsspannung wird hierdurch von der Nahtlage abhängig. Sie erreicht in einer axial beanspruchten Stumpfnahtverbindung einen Kleinstwert, wenn die Naht unter 45° gegen die Stabachse geneigt ist. Die Vergleichsspannung und damit auch die Anstrengung des Werkstoffs ergeben sich dann um 28% kleiner als bei senkrechter Nahtlage.

VI. Weitere elastizitätstheoretische Untersuchungen.

Gelegentlich der Planung eines größeren geschweißten Behälters, der in einer Zeit erstellt wurde, in der es noch an Erfahrungen im Schweißen derartiger Bauwerke mangelte, hat der Verfasser eine Untersuchung[61]) durchgeführt, um über die Querbiegespannungen in den Rundnähten sowie über die Spannungsverhältnisse im Fuße dieses zylindrischen Behälters Aufschluß zu erhalten. Diese Untersuchungen sollten auch zeigen, welchen Einfluß die zur Sicherung der Rundnähte in Vorschlag gebrachten, umlaufenden, bloß durch Heftschweißen befestigten Laschen auf den Spannungszustand ausüben. Die Berechnung des Behälters als biegungssteife Schale unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Verformung des steif angeschlossenen Bodens lieferte u. a. das zu erwarten gewesene Ergebnis, daß die umlaufenden Laschen den Spannungszustand der Wände und Rundnähte ungünstig beeinflussen.

Als weitere strenge Untersuchungen seien zwei Arbeiten von E. Melan[62]) genannt. Die erste behandelt die folgende Aufgabe: An den Rand eines Bleches ist zur Verstärkung ein Stab mit kleinem Querschnitt und vernachlässigbarem Biegewiderstand mittels durchlaufenden Nähten angeschweißt. An einer Stelle des Stabes greift eine Einzelkraft an, deren Richtungslinie in die Stabachse fällt (Bild 22a). Diese Untersuchung sollte vor allem zeigen, in welcher Weise der Stab die Kraft längs des Blechrandes verteilt. Die Nachgiebigkeit der Schweißnähte wurde hier außer Betracht gelassen. Die Stabspannungen wurden über den Querschnitt gleichmäßig verteilt angenommen, das Blech wurde als „Halbebene“ aufgefaßt. Die Untersuchung zeigt, daß der ebene Spannungszustand des Bleches in dem Randpunkte, der dem Kraftangriffspunkt gegenüber liegt, irregulär wird; die Schubspannung ergibt sich dort (unbeschränkt elastischen Werkstoff vorausgesetzt) unendlich groß, während die parallel zum Rande wirkende Normalspannungskomponente endlich bleibt und die senkrecht zum Rande gerichtete Normalspannung, wie an allen übrigen Randpunkten, verschwindet. Aus Bild 22b ist ferner zu ersehen, daß die Randscherspannungen der Halbebene beiderseits des Lastangriffsortes rasch abklingen, so daß die „wirksame Verteillänge“ des schwachen Stabes eine verhältnismäßig begrenzte ist.

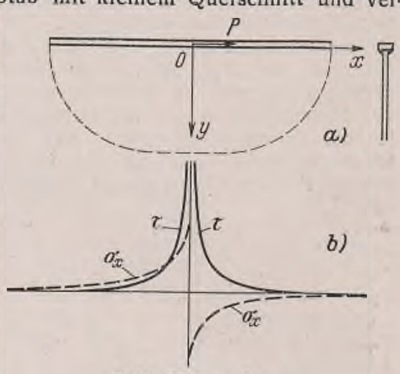


Bild 22a u. b.

Melan hat in dieser Abhandlung noch die folgende Aufgabe behandelt: Ein Stab wird auf ein Blech mittels durchlaufenden Nähten aufgeschweißt und wieder in einem Punkte von einer Einzelkraft ergriffen, deren Wirkungslinie mit der Stabachse zusammenfällt. Diese Aufgabe wurde in ähnlicher Weise wie die eben besprochene gelöst, das Blech wurde hierbei als unendlich ausgedehnte Scheibe aufgefaßt.

Als strenge Lösungen verdienen die Melanschen Ergebnisse besonderes Interesse und örtlich irreguläre Spannungszustände würde man in den Untersuchungen von Schweißverbindungen häufiger antreffen, wenn diese Untersuchungen eben elastizitätstheoretisch strenge gelöst werden könnten.

In einer Abhandlung An Investigation of the Stress in Longitudinal Welds berichtet W. Hovgaard[63]) über zwei elastizitätstheoretische Untersuchungen seiner Schüler. Diese Arbeiten betreffen eine in der Längsrichtung auf reinen Zug beanspruchte Platte, die in ihrem mittleren Teile durch eine aufgeschweißte Rippe verstärkt ist (Bild 23).

Bei der ersten Untersuchung wird angenommen, daß Platte und Rippe nur an den Rippenenden A und B, sowie in Mitte M durch punktförmige Schweißungen verbunden sind. Auch wird in dieser Arbeit nur der Spannungszustand der Platte untersucht. Dieselbe wird zunächst als unendlich ausgedehnte Scheibe angesehen, und es wird die bekannte Lösung für den Spannungszustand zufolge eines Zugpaares (Scherkräfte in A und B) herangezogen. Diese Kräfte werden mit dem experimentell bestimmten Wert von $^3/_8$ der äußeren Zugkraft in Rechnung gestellt. Durch Überlagerung von weiteren Spannungsfunktionen in Form partikulärer Integrale der Scheibengleichung $\Delta\Delta F = 0$ wird sodann versucht, die Randbedingungen für die wirklich vorhandenen Plattenränder zu erfüllen, was nur näherungsweise gelingt.

Die zweite Untersuchung behandelt dieselbe Aufgabe, aber unter der Voraussetzung, daß die Rippe mittels durchlaufenden Kehlnähten mit der Platte verschweißt ist[64]). Auch wird gleichzeitig der Spannungszustand der Rippe erfaßt. Zunächst werden Rippe und Platte als unendlich ausgedehnte Scheiben aufgefaßt, die längs der wirklichen Rippenlänge durch Schweißnähte verbunden sind; die äußeren Zugkräfte greifen hierbei an der Platte an. Die Lösung dieses Falles führt zu einer einfachen Formel für die Verteilung der Nahtscherspannungen (bzw. für die Scherkräfte, die zwischen Platte und Rippe wirksam sind); sie liefert für die Nahtenden unendlich große Scherspannungen. Dieses Verteilungsgesetz der Scherspannungen wird nun näherungsweise auch unter den vorgegebenen endlichen Platten- und Rippenabmessungen beibehalten, nur der Beiwert wird auf Grund der Ergebnisse ausgeführter Versuche berichtigt. Platten und Rippen können nun getrennt behandelt werden. Zunächst werden sie wieder als unendlich ausgedehnte Scheiben angesehen, die längs AB durch die nunmehr bekannten Scherkräfte belastet sind. Durch Überlagerung weiterer Spannungsfunktionen in Form partikulärer Integrale der Scheibengleichung wird schließlich versucht, die Bedingungen für die wirklich vorhandenen äußeren Ränder der Platte und der Rippe zu befriedigen, was näherungsweise gelungen ist. Bild 23d zeigt den errechneten Verlauf der Nahtscherspannungen.

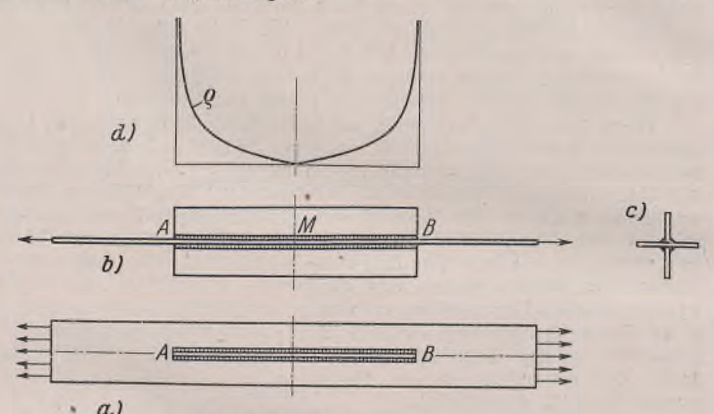


Bild 23a bis d.

Zugleich wird auch der Fall einer elliptisch geformten Rippe untersucht, die Platte wird hierbei als unendlich ausgedehnte Scheibe angesehen. Gegenüber der rechteckigen Rippe (die Halbachsen der Ellipse sind gleich den halben Rechteckseiten angenommen) ergibt sich eine wesentliche Verringerung der Nahtscherspannungen; für die Nahtenden aber werden rechnungsmäßig wieder unendlich große Werte der Scherspannungen erhalten.

VII. Theoretische Erfassung der Kerbwirkung von Herstellungsfehlern.

a) Randkerben. Rillenförmige Kerben zufolge Schweißfehlern und Oberflächenverletzungen des Mutterwerkstoffes rufen Störungen im Spannungsverlauf hervor, die näherungsweise erfaßt werden können. Zumeist handelt es sich um „flache Kerben“, bei welchen also die Kerbtiefe klein im Vergleich zur Dicke des Werkstückes ist. In solchen Fällen wird der Spannungszustand praktisch nur im Bereich der Kerbe gestört. Die Spannungserhöhungen an der Kerbe können wir abschätzen, wenn wir beispielsweise voraussetzen, die Kerbe besitze halbkreisförmigen Querschnitt. In diesem Falle steigt bei axialer, senkrecht zur Rillenachse wirkender Belastung des Werkstückes die maximale Spannung auf den dreifachen Wert[65]) der Normalspannung des fehlerfreien Werkstückes an. Für Biegungsbeanspruchung ist die Spannungserhöhung ebenso groß. Die Beanspruchung auf Schub (in Ebenen senkrecht zur Rillenachse) ist verhältnismäßig harmlos; zufolge der Kerbwirkung bildet sich ein sekundäres Maximum der Schubspannungen aus, das zumeist kleiner bleibt als das primäre, welches bereits im fehlerfreien Werkstück vorhanden ist[66]).

Auch im Falle anderer Querschnittsformen rillenförmiger Außenkerben können wir die Spannungserhöhungen abschätzen, indem wir uns der Berechnungsverfahren bedienen, die für flache Außenkerben entwickelt worden sind[66]).

Weist der Rand eines plattenförmigen Werkstückes einen beinahe starren Einschluß von halbkreisförmigem Querschnitt auf, so entstehen bei

[59]) Ermüdungsfestigkeit und Sicherheit geschweißter Konstruktionen. Int. Ver. f. Brückenb. u. Hochbau, II. Kongreß (1936), Vorbericht, S. 403. Berlin 1936, Wilh. Ernst & Sohn.

[60]) M. Roš u. A. Eichinger, Versuche zur Klärung der Bruchgefahr. III. Metalle, Bericht Nr. 34 d. EMPA., Zürich 1929.

[61]) Berechnung eines geschweißten Flüssigkeitsbehälters. Stahlbau 4 (1931), S. 25.

[62]) Ein Beitrag zur Theorie geschweißter Verbindungen. Ing.-Archiv, III (1932), S. 123.

[63]) Proc. Nation. Ac. Sci., USA., 20 (1934), S. 17; ausführlicher in Journ. of Math. a. Physics (Mass. Inst. of Techn.) XIII (1934), S. 195.

[64]) Diss. von Y. C. Yeh.

[65]) F. G. Maunsell, Stresses in a Notched Plate under Tension. Phil. Mag. 21 (1936), S. 765.

[66]) H. Neuber, Kerbspannungslehre. Berlin 1937.

reinem Zug, wirksam senkrecht zur Achse des Einschlusses, Spannungserhöhungen um 80 %[67]).

b) Hohlräume[47]),[68]). α) Die Spannungserhöhungen, die beispielsweise in plattenförmigen Schweißverbindungen von einem kleinen zylindrischen, senkrecht zur Mittelebene liegenden Hohlraum verursacht werden, lassen sich unschwer berechnen, wenn diese Löcher kreisförmigen oder elliptischen Querschnitt besitzen und genügend weit vom freien Rande entfernt sind, so daß es erlaubt ist, die Breite des Körpers gegenüber der Weite des Hohlraumes als sehr groß anzusehen. Besitzt der zylindrische Hohlraum kreisförmigen Querschnitt, so kann die größte auftretende Normalspannung im Falle reinen Zuges in Richtung senkrecht zur Achse des Hohlraumes nach G. Kirsch[69]) ermittelt werden. Sie ist bekanntlich gleich der dreifachen Zugspannung des Körpers ohne Hohlraum.

Aus der Zusammenlegung der Teilwirkungen für reinen Zug und reinen Druck läßt sich auch die Spannungserhöhung im Falle reinen Schubes ermitteln; man erhält eine größte Normalspannung gleich der vierfachen Hauptschubspannung des fehlerfreien Werkstückes.

Wenn das zylindrische Loch elliptischen Querschnitt besitzt, kann die Lösung von Inglis[70]) zur Ermittlung der Größtspannung herangezogen werden; bedeuten a und b die Halbachsen der Ellipse, so ergibt sich im Falle reinen Zuges, wirksam senkrecht zur Ellipsenhalbachse a, die größte Spannung zu $\sigma_{\max} = \sigma_0 \left(1 + 2\frac{a}{b}\right)$, worin σ_0 die Zugspannung des fehlerfreien Werkstückes bedeutet. Aus dieser Formel erhält man mit $a = b$ wieder den maßgebenden Spannungswert für das kreiszylindrische Loch. Mit $a = 0$ oder $b = 0$ hingegen geht die Ellipse in einen Spalt über, der senkrecht bzw. parallel zur Kraftrichtung liegt. Im ersteren Falle wird die Spannung an den Spaltenden rechnungsmäßig unendlich groß, im zweiten Falle tritt gar keine Kerbwirkung auf, und man erhält das bemerkenswerte Ergebnis[71]), daß eine spaltförmige Innenkerbe bei reinem Zug, Druck bzw. bei reiner Biegung belanglos ist, wenn sie in der Spannungsrichtung liegt.

Ein zylindrischer Einschluß mit kreisförmigem Querschnitt ruft bei reinem Zug und auch bei gleichmäßigem Zug nach allen Richtungen parallel zur Mittelebene des plattenförmigen Körpers Spannungserhöhungen um rd. 50 % (Spannungsteigerungen abhängig von der Poissonschen Konstanten) hervor[72]). β) Auch die Kerbwirkung von Gasblasen und Poren läßt sich erfassen, wenn diese Hohlräume annähernd die Gestalt einer Kugel oder eines Ellipsoides besitzen und wieder genügend weit von den freien Rändern des Werkstückes entfernt liegen, so daß diese keinen Einfluß auf den Spannungszustand in der Umgebung des Hohlraumes ausüben. Besitzt der Hohlraum beispielsweise kugelförmige Gestalt[73]), so ist im Falle reinen Zuges die größte Normalspannung rund doppelt so groß als die Zugspannung des fehlerfreien Werkstückes; bei gleichförmigem Zug nach zwei zueinander senkrechten Richtungen wird die Höchstspannung noch etwas größer (in beiden Fällen sind die maßgebenden Spannungswerte von der Größe der Poissonschen Konstanten abhängig). Bei reinem Schub[74]) erreicht die größte Normalspannung an der Wandung des Kugelhohlraumes ebenfalls den doppelten Wert der Hauptschubspannung des homogenen Baugliedes. Ist ein kugelförmiger Einschluß vorhanden[67]), so ergibt sich im Falle des reinen Zuges eine Spannungserhöhung um rund 50 %.

VIII. Bemerkungen hinsichtlich der Ergebnisse örtlich irregulärer Spannungszustände.

Die geometrischen Kerben vieler Schweißverbindungen, vor allem der Kehlnahtverbindungen, rufen örtlich irreguläre Spannungszustände hervor. Diese treten beispielsweise an allen scharf einspringenden ebenen und räumlichen Ecken auf. Die Elastizitätstheorie liefert dort für einzelne oder für alle Spannungskomponenten unendlich große Werte. Da die in Betracht stehenden Werkstoffe nicht unbeschränkt elastisch sind, sondern elastisch-plastisches Verhalten aufweisen, wäre somit zu folgern, daß an den fraglichen Orten schon unter kleinster Last der Fließzustand eintritt.

Wie groß die Spannungen aber an der Fließgrenze wirklich sind, hängt von der Art des Spannungszustandes ab. Nach der Hypothese der unveränderlichen Gestaltsänderungsenergie ist der Fließzustand erreicht, sobald die bezügliche Vergleichsspannung σ_v gleich wird der Fließspannung σ_F des Zugstabes. Bei ebenen Spannungszuständen kann hierbei, wie aus der Formel für σ_v hervorgeht, die algebraisch größere Hauptnormalspannung σ_1 die Fließspannung σ_F um höchstens 15 % überschreiten (und zwar tritt dieser Fall bei $\sigma_2 = +\frac{1}{2}\sigma_1$ ein). Die Fließverzögerung gegenüber $\sigma_1 = \sigma_F$ ist also gering. In vielen Schweißverbindungen entstehen aber — zumindest örtlich — überwiegend räumliche Spannungszustände. Wie aus der Betrachtung der bekannten Formel für σ_v hervorgeht, wäre es dann, wenn alle Hauptnormalspannungen Zugspannungen sind, denkbar, daß der Eintritt des bildsamen Zustandes solange hinausgezögert wird und die größte Hauptzugspannung die Fließspannung σ_F so hoch übersteigt, daß der Reißbruch eintritt, bevor noch wesentliche plastische Formänderungen entstehen. In der Regel sind aber derart ungünstige Spannungszustände, wenn nur Lastspannungen in Betracht gezogen werden, nicht zu befürchten. Immerhin kann bei räumlichen Spannungszuständen die Fließverzögerung den plastischen Abbau der Spannungsspitzen stark behindern.

Eine strenge rechnerische Erfassung der Spannungsverhältnisse unter Berücksichtigung des elastisch-plastischen Verhaltens der Werkstoffe wird selbst im Falle ebener Spannungszustände nur vereinzelt möglich sein. Gelingt jedoch die Lösung für unbeschränkt elastischen Werkstoff, dann kann ein grobes Berichtigungsverfahren zur Anwendung gelangen, das für manche Zwecke genügt. In der Regel fallen nämlich die Spannungen von den singulären Orten weg rasch ab, so daß die Überschreitung der Fließgrenze auf ein verhältnismäßig kleines Gebiet beschränkt bleibt. Andererseits begehen wir nach der klassischen Plastizitätstheorie keinen großen Fehler, wenn wir bei ebenen Spannungszuständen den möglichen Höchstwert einer Normalspannung mit σ_F, den einer Schubspannung mit τ_F annehmen. Hieraus ergibt sich folgende Berichtigung für eine Spannungslinie, die für unbeschränkt elastischen Werkstoff errechnet wurde, und die an einer Stelle eine unendlich große Ordinate besitzt; man nimmt dort die Spannungsgrößtwerte gleich σ_F bzw. τ_F an, und ändert nun die Spannungslinie so ab, daß die Gleichgewichtsbedingungen möglichst wenig gestört werden; i. a. wird es hierzu genügen, die Spannungsfläche beizubehalten und im übrigen die neue Linie so einzulegen, daß sie sich der errechneten mit zunehmender Entfernung von der singulären Stelle immer mehr nähert.

Brauchbare Grundlagen für die Abschätzung der Dauerfestigkeit einer solchen Schweißverbindung mit örtlich irregulären Spannungszuständen können wir aber auf diesem Wege kaum erhalten; hierzu sind schärfere Untersuchnngen notwendig, die zumindest über Teilgebiete der Schweißverbindung zu erstrecken sind; ob uns hierbei elastizitäts-theoretische Untersuchungen im Sinne der Theorie zweiter Ordnung, bei der die Gleichgewichtsbedingungen auf die bereits verformten Raumteilchen angesetzt werden, schon zum Ziele führen, ist fraglich. In diesem Zusammenhange sei auf die Entwicklung einer Theorie der Spitzkerben[66]) verwiesen, in der die Korngröße des Werkstoffes als neue Werkstoffkonstante in die Rechnung eingeht.

[67]) A. Leon, Über die Spannungsstörungen beim Verbund verschiedener Materialien. Int. Verb. f. Materialpr. d. Technik, V. Kongreß (Kopenhagen 1909).

[68]) H. Gerbeaux, Influence de la forme sur les proprietés mécaniques des assemblages soudés. Revue de la soud. autog. 27 (1935), Sept.-Heft, S. 2.

[69]) Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre. Z. d. VdI 42 (1898), S. 797.

[70]) Some Special Cases of Two-Dimensional Stress. Transact. of the Inst. of Nav. Arch. 69 (1922).

[71]) Dieses Ergebnis ist schon länger bekannt: siehe Fußnote [67]).

[72]) A. Leon, Über die Spannungsverteilung in Verbundkörpern. Österr. Wochenschr. f. d. öffentl. Baud. 1909, H. 9, 10.

[73]) A. Leon, Über die Störungen der Spannungsverteilung, die in elastischen Körpern durch Bohrungen und Bläschen entstehen. Österr. Wochenschr. f. d. öffentl. Baud. 1908, H. 9.

[74]) J. Larmor, Philos. Mag. Vol. 33 (1892).

Der Eigenspannungszustand in Stumpfschweißungen als ebenes Problem.

Von Dozent Dr. techn. habil. Karl Jäger, Wien.

Übersicht: Die nachfolgende Untersuchung bringt die elastizitätstheoretische Ermittlung der zufolge Temperaturwirkung in einer Stumpfschweißung auftretenden Schrumpfspannungen.

Wenn zwei Bleche stumpf aneinandergeschweißt werden, so tritt in ihnen zufolge der Einwirkung der Wärmezufuhr und der darauf folgenden Abkühlung ein Eigenspannungszustand auf, da die Bleche an der den Temperaturveränderungen entsprechenden Verzerrung durch den Verbund behindert werden. Beim Einschweißen der Naht werden die Bleche in einer verhältnismäßig schmalen Zone zunächst bis zur Schmelztemperatur erhitzt; bei der Betrachtung der Wirkung der darauf folgenden raschen Abkühlung ist nun zu bedenken, daß alle über 600° gelegenen Temperaturen in erster Linie zu plastischen Formänderungen führen und für die Ausbildung von merklichen Wärmespannungen praktisch bedeutungslos sind. Für das Auftreten von Schrumpfspannungen sind dann nur die unter 600° gelegenen Temperaturen und ihre Verteilung senkrecht und parallel zur Naht maßgebend. In Bild 1 ist ein derartiger, für den Schrumpfungsvorgang maßgebender Temperaturverlauf angegeben, der einen nahezu geradlinigen Wärmeabfall von der Naht gegen die Stirnseiten der Bleche zeigt, was einer mittleren Wärmezufuhr entspricht[1]). Bei nicht allzulangen Nähten und raschem Schweißvorgang kann ferner angenommen werden, daß die Temperatur in allen parallel zur Naht gelegenen Blechfasern unveränderlich ist, was z. B. bei der Widerstands-

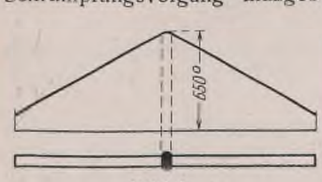


Bild 1.

[1]) K. Klöppel u. C. Stieler, Schweißtechnik im Stahlbau. 1. Bd., S. 133, Abb. 4. Berlin 1939, J. Springer.

abschmelzschweißung gut erfüllt ist. Bei der rechnerischen Untersuchung der einem bestimmten Temperaturfeld entsprechenden Eigenspannungen müßte allerdings, streng genommen, auch die Abhängigkeit des Elastizitätsmaßes von der Temperatur berücksichtigt werden. Da aber das Elastizitätsmaß innerhalb der in Frage kommenden Temperaturgrenzen von 600 bis 0° nur zwischen 1400 und 2100 t/cm² schwankt[2]), können die Formänderungen mit ausreichender Genauigkeit unter Zugrundelegung eines unveränderlichen und der unteren Grenze näher liegenden Wertes $E = 1600$ t/cm² ermittelt werden. Damit sind die Vorbedingungen für die nachfolgende analytische Untersuchung gegeben.

1. Die Grundgleichungen und ihre allgemeine Lösung.

Die rechnerische Untersuchung bezieht sich auf zwei durch eine Stumpfnaht verbundene Platten von der Breite $2b$, der Länge l und der Dicke d, die dem Einfluß eines Abkühlungsvorgangs unterliegen, wie er in Bild 2 schematisch dargestellt ist. Hierbei wird vorausgesetzt, daß die Temperatur in der Richtung y (parallel zur Naht) unveränderlich ist und die Platten längs ihrer Ränder frei beweglich, also weder festgehalten, noch eingespannt sind. Da die Bleche als dünn angenommen werden ($d \ll b, l$), führt der Abkühlungsvorgang zu einem ebenen Eigenspannungszustand mit den Normalspannungen σ_x, σ_y und der Schubspannung τ, die zunächst die Gleichgewichtsbedingungen

$$(1) \qquad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

erfüllen müssen. In dem Augenblick, da in den Blechen der in Bild 2 angedeutete Temperaturverlauf vorhanden ist, kann eine der fortschreitenden Abkühlung entsprechende Formänderung der beiden Scheiben nur im Verbund und damit nur mehr unter Auslösung von Zwängsspannungen zustande kommen. Wenn die in einem beliebigen Punkt einer Scheibe vorhandene Temperatur mit t, der Ausdehnungskoeffizient der Bleche mit ω und der mittlere Elastizitätsmodul mit E bezeichnet wird, so ist der Verzerrungszustand in diesem Punkte durch die Komponenten des Verschiebungsweges u und v gegeben, die mit den Längenänderungen und dem Schubwinkel durch die Beziehungen

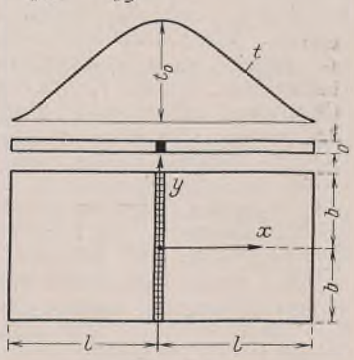


Bild 2.

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}(\sigma_x - \mu\,\sigma_y) - \omega\, t \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}(\sigma_y - \mu\,\sigma_x) - \omega\, t \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = \gamma = \dfrac{\tau}{G} = \dfrac{2(1+\mu)\,\tau}{E} \end{cases}$$

verknüpft sind, wenn unbeschränkte Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes vorausgesetzt wird. Gl. (2) entsprechen den elastischen und geometrischen Bedingungen des ebenen Spannungszustandes. Aus der letzten Gl. (2) erhält man durch Differentiation und unter Zuhilfenahme der beiden ersten Gl. (2) die sogenannte Verträglichkeitsbedingung der vorliegenden Aufgabe in der Form

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 \tau}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} = \omega E \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right).$$

Unter Einführung der Airyschen Spannungsfunktion F lautet die obige Beziehung in bekannter Schreibweise

$$(4) \qquad \Delta \Delta F = \omega E \Delta t.$$

Die nichthomogene Differentialgleichung (3) oder (4) bildet zusammen mit den Gleichgewichtsbedingungen (1) bei bekannter Temperaturfunktion $t = f(x, y)$ die Grundlage für die Ermittlung der Schrumpfspannungen.

Die Blechränder sind voraussetzungsgemäß spannungsfrei. Da ferner die Temperaturfunktion symmetrisch bezüglich der y-Achse verläuft, muß der Schweißquerschnitt ($x = 0$) eben und schubspannungsfrei bleiben. Somit gelten bei der vorliegenden Aufgabe die nachfolgenden Randbedingungen:

$$(5) \qquad \begin{cases} x = \;\;0 \;\ldots\; \tau = 0 & \\ x = \pm l \;\ldots\; \sigma_x = 0 & \tau = 0 \\ y = \pm b \;\ldots\; \sigma_y = 0 & \tau = 0. \end{cases}$$

Von den vorstehenden Bedingungen bereitet die Erfüllung der zweiten oder der dritten Forderung (Freihalten der Stirnseiten von Normalspannungen σ_x bzw. von Schubspannungen τ) und der vierten Forderung (Freihalten der Längsränder von Normalspannungen σ_y) einige Schwierigkeiten. Unter Verwendung der Lévyschen Ansätze und bei strenger Einhaltung aller Randbedingungen ergibt sich die Notwendigkeit, die Temperaturfunktion aus zwei Teilen zusammenzusetzen:

$$(6) \qquad t = f_1(x) + f_2(x).$$

Es wird sich später zeigen, daß die sekundäre Funktion $f_2(x)$ einen Zusatz darstellt, der das Gesamtbild des Temperaturfeldes nur unwesentlich beeinflußt, so daß die charakteristischen Merkmale des Wärmeabfalls bereits durch die Primärfunktion wiedergegeben werden können. Hierbei sind die beiden Funktionen miteinander derart verknüpft, daß ihre Summe im Schweißquerschnitt den Wert

$$(7) \qquad t_0 = [f_1(x) + f_2(x)]_{x=0}$$

ergibt. Die Primärfunktion $f_1(x)$ wird also zunächst so gewählt, daß sie in ihrem Verlaufe dem gegebenen Temperaturabfall zwar nicht ziffernmäßig, aber proportional entspricht, und kann dann ganz allgemein durch eine endliche oder unendliche Reihe dargestellt werden, deren Bildungsgesetz, d. h. deren Koeffizienten bekannt sind:

$$(8) \qquad f_1(x) = t_0' \sum_m a_m \cdot \cos \alpha x.$$

In der obigen Gleichung bedeutet t_0' einen vorläufig unbekannten Teil der Höchsttemperatur t_0 im Schweißquerschnitt, und es ist

$$(9) \qquad \alpha = \frac{m\pi}{2l} \qquad (m = 1, 3, 5, 7 \ldots).$$

Der primären Temperaturfunktion gemäß Gl. (8) entspricht der nachfolgende Ansatz für die primären Spannungen:

$$(10) \qquad \begin{cases} \sigma_{1x} = \;\;\sum\limits_m A_m \cdot \cos \alpha x \,[(\alpha b \cdot \mathfrak{Cos}\, \alpha b - \mathfrak{Sin}\, \alpha b)\, \mathfrak{Cos}\, \alpha y \\ \qquad\qquad - \alpha y \cdot \mathfrak{Sin}\, \alpha y \cdot \mathfrak{Sin}\, \alpha b] \\ \sigma_{1y} = -\sum\limits_m A_m \cdot \cos \alpha x \,[(\mathfrak{Sin}\, \alpha b + \alpha b \cdot \mathfrak{Cos}\, \alpha b)\, \mathfrak{Cos}\, \alpha y \\ \qquad\qquad - \alpha y \cdot \mathfrak{Sin}\, \alpha y \cdot \mathfrak{Sin}\, \alpha b - (\alpha b + \mathfrak{Sin}\, \alpha b \cdot \mathfrak{Cos}\, \alpha b)] \\ \tau_1 = \;\;\sum\limits_m A_m \cdot \sin \alpha x \,(\alpha b \cdot \mathfrak{Cos}\, \alpha b \cdot \mathfrak{Sin}\, \alpha y \\ \qquad\qquad - \alpha y \cdot \mathfrak{Cos}\, \alpha y \cdot \mathfrak{Sin}\, \alpha b). \end{cases}$$

Gl. (10) genügen den Gleichgewichtsbedingungen (1) und erfüllen sämtliche Randbedingungen mit Ausnahme der dritten Gl. (5), d. h. auf der Stirnseite der Bleche $x = \pm l$ verbleiben zunächst Schubspannungen. Der Festwert A_m ist aus der Verträglichkeitsbedingung (3) bzw. (4) zu bestimmen. Man erhält:

$$(11) \qquad \begin{cases} \Delta \Delta F_1 = -\sum\limits_m A_m \alpha^2 \cdot \cos \alpha x \,(\alpha b + \mathfrak{Sin}\, \alpha b \cdot \mathfrak{Cos}\, \alpha b) \\ \omega E \Delta f_1(x) = -\omega E t_0' \sum\limits_m a_m \alpha^2 \cdot \cos \alpha x. \end{cases}$$

Durch Gleichsetzung der beiden obigen Ausdrücke gemäß Gl. (4) ergibt sich der gesuchte Koeffizient zu

$$(12) \qquad A_m = \frac{\omega E a_m t_0'}{(\alpha b + \mathfrak{Sin}\, \alpha b \cdot \mathfrak{Cos}\, \alpha b)} \qquad (m = 1, 3, 5 \ldots).$$

Zur Erzielung spannungsfreier Stirnflächen in den Blechen muß die dort verbleibende primäre Schubspannung in eine Fouriersche Reihe entwickelt und damit ein sekundärer Spannungszustand überlagert werden, der außerdem die sonstigen Randbedingungen nicht verletzt. Man erhält:

$$(13) \qquad \begin{cases} \sigma_{2x} = -\sum\limits_m \sum\limits_n^{\infty} \dfrac{B_{mn}}{\varphi_n} [\beta x \cdot \mathfrak{Sin}\, \beta x \\ \qquad\qquad - \beta l \cdot \mathfrak{Tg}\, \beta l \cdot \mathfrak{Cos}\, \beta x] \cos \beta y \\ \sigma_{2y} = \;\;\sum\limits_m \sum\limits_n^{\infty} \dfrac{B_{mn}}{\varphi_n} [\beta x \cdot \mathfrak{Sin}\, \beta x \\ \qquad\qquad + (2 - \beta l \cdot \mathfrak{Tg}\, \beta l)\, \mathfrak{Cos}\, \beta x] (\cos \beta y - \cos \beta b) \\ \tau_2 = \;\;\sum\limits_m \sum\limits_n^{\infty} \dfrac{B_{mn}}{\varphi_n} [\beta x \cdot \mathfrak{Cos}\, \beta x \\ \qquad\qquad + (1 - \beta l \cdot \mathfrak{Tg}\, \beta l)\, \mathfrak{Sin}\, \beta x] \sin \beta y. \end{cases}$$

In den vorstehenden Gleichungen bedeuten

$$(14) \qquad \begin{cases} \beta = \dfrac{n\pi}{b} \qquad (n = 1, 2, 3, 4 \ldots) \\ \varphi_n = \mathfrak{Sin}\, \beta l + \dfrac{\beta l}{\mathfrak{Cos}\, \beta l}. \end{cases}$$

Nun muß zur Erzielung spannungsfreier Stirnflächen

$$(15) \qquad (\tau_1 + \tau_2)_{x = \pm l} = 0$$

sein, und aus dieser Bedingung erhält man die Koeffizienten der Doppelreihe zu

$$(16) \qquad B_{mn} = -\frac{2}{b} \int_0^b A_m \cdot \sin \alpha l \,(\alpha b \cdot \mathfrak{Cos}\, \alpha b \cdot \mathfrak{Sin}\, \alpha y - \alpha y \cdot \mathfrak{Cos}\, \alpha y \cdot \mathfrak{Sin}\, \alpha b) \sin \beta y \, dy$$
$$= \frac{4 A_m \cdot \sin \alpha l}{n\pi} \cdot \frac{\alpha^2 \beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \cdot \mathfrak{Sin}^2\, \alpha b \cdot \cos \beta b.$$

---

[2]) Grüning, Die Schrumpfspannungen beim Schweißen. Stahlbau 1934, Heft 14. — In dieser Arbeit wird das hier auf analytischem Wege untersuchte Problem mittels Differenzenrechnung behandelt. Der hierbei erforderliche Rechenaufwand bleibt aber natürlich nur dann innerhalb erträglicher Grenzen, wenn das Gewebenetz weitmaschig gewählt wird, was zu mehr oder weniger großen Ungenauigkeiten in der Höhe der Spannungsspitzen führt.

Es sei ausdrücklich bemerkt, daß der sekundäre Spannungszustand an den Längsrändern der Bleche weder Normalspannungen noch Schubspannungen und an den Stirnseiten auch keine Normalspannungen ergibt. Die Überlagerung der Gl. (10) u. (13) führt daher zum endgültigen Spannungszustand mit vollkommen spannungsfreien Rändern und entspricht somit einer strengen Erfüllung aller Randbedingungen (5). Die Erfüllung der Verträglichkeitsbedingung (3) bzw. (4) führt jedoch zu einer zusätzlichen Temperaturfunktion $f_2(x)$, zu deren Ermittlung die nachstehende Gleichung dient:

$$(17)\quad \Delta\Delta F_2 = \omega E \Delta f_2(x) = -\sum_m \sum_n^{\infty} \frac{B_{mn}\beta^2}{\varphi_n} [\beta x \cdot \mathfrak{Sin}\, \beta x + (4 - \beta l \cdot \mathfrak{Tg}\, \beta l)\, \mathfrak{Cof}\, \beta x] \cos \beta b.$$

Man erhält aus dieser Bedingung durch zweimalige Integration die sekundäre Temperaturfunktion zu

$$(18)\quad f_2(x) = -\sum_m \sum_n^{\infty} \frac{B_{mn}}{\omega E \varphi_n} [\beta x \cdot \mathfrak{Sin}\, \beta x + (2 - \beta l \cdot \mathfrak{Tg}\, \beta l)\, \mathfrak{Cof}\, \beta x - 2 \cdot \mathfrak{Cof}\, \beta l] \cos \beta b.$$

Hierbei wurde das letzte Glied in der eckigen Klammer als Integrationskonstante hinzugefügt, damit die Funktion für $x = \pm l$ ebenso wie $f_1(x)$ gleich Null wird. Die Bestimmung des in den Festwerten A_m und B_{mn} enthaltenen Beiwertes t_0' erfolgt gemäß Gl. (7) und führt zur nachstehenden Beziehung:

$$(19)\quad t_0 = t_0' \left\{ 1 + \frac{4}{\pi} \sum_m \sum_n^{\infty} \frac{a_m \cdot \sin \alpha l \cdot \mathfrak{Sin}^2\, \alpha b}{(\alpha b + \mathfrak{Sin}\, \alpha b \cdot \mathfrak{Cof}\, \alpha b)} \cdot \frac{\alpha^2 \beta^2}{n(\alpha^2 + \beta^2)^2 \varphi_n} [2(\mathfrak{Cof}\, \beta l - 1) + \beta l \cdot \mathfrak{Tg}\, \beta l] \right\}.$$

Zusammenfassend ergibt sich somit der einem Wärmeabfall gemäß Gl. (6), (8) u. (18) entsprechende Eigenspannungszustand in den verschweißten Blechen aus

$$(20)\quad \sigma_x = \sigma_{1x} + \sigma_{2x}, \quad \sigma_y = \sigma_{1y} + \sigma_{2y}, \quad \tau = \tau_1 + \tau_2,$$

wobei die Teilspannungen aus Gl. (10) u. (13) und die zugehörigen Konstanten aus Gl. (12), (16) u. (19) zu entnehmen sind. Der Eigenspannungszustand (20) erfüllt alle Randbedingungen (alle Blechränder sind spannungsfrei) und entspricht daher einer strengen Lösung.

2. Lösung für ein bestimmtes Temperaturgesetz.

Jeder beliebig geartete Wärmeabfall von der Schweißstelle gegen die Stirnränder kann analytisch ganz allgemein durch eine Fourierreihe in Form der Gl. (8) dargestellt werden, wobei es u. U. sogar möglich sein wird, mit einer endlichen Zahl von Gliedern das Auslangen zu finden, da es im Hinblick auf die näherungsweise Voraussetzung eines mittleren Elastizitätsmaßes E keineswegs erforderlich ist, den Temperaturverlauf ganz genau darzustellen; kleine Abweichungen vom tatsächlichen Verlauf entstehen übrigens schon durch die zusätzliche Temperaturfunktion $f_2(x)$ gemäß Gl. (18) und haben auf die endgültige Verteilung der Eigenspannungen einen sehr geringen Einfluß.

Nachfolgend wird ein Temperaturgesetz mit größerer Wärmezufuhr gewählt. Diese Bedingung ist bei der Gasschmelzschweißung gut erfüllt[2]) und ermöglicht außerdem eine verhältnismäßig einfache Berechnung der Schrumpfspannungen (Vermeidung der Auswertung einer Doppelreihe). Der Ansatz für die primäre Temperaturfunktion lautet dann in einfachster Form

$$(21)\quad f_1(x) = t_0' \cdot \cos \alpha x.$$

Die obige Gleichung enthält also sozusagen nur das erste Glied der Reihe (8) mit $m = 1$ und $a_1 = 1$, so daß sinngemäß

$$(22)\quad \alpha = \frac{\pi}{2l}$$

zu setzen ist. Die weitere Rechnung verläuft entsprechend den im ersten Abschnitt abgeleiteten Beziehungen. Man erhält die Schrumpfspannungen in der Form

$$(23)\quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= A \cdot \cos \alpha x\, [(\alpha b \cdot \mathfrak{Cof}\, \alpha b - \mathfrak{Sin}\, \alpha b)\, \mathfrak{Cof}\, \alpha y - \alpha y \cdot \mathfrak{Sin}\, \alpha y \cdot \mathfrak{Sin}\, \alpha b] - \sum_n^{\infty} \frac{B_n}{\varphi_n} (\beta x \cdot \mathfrak{Sin}\, \beta x - \beta l \cdot \mathfrak{Tg}\, \beta l \cdot \mathfrak{Cof}\, \beta x) \cos \beta y \\ \sigma_y &= -A \cdot \cos \alpha x\, [(\mathfrak{Sin}\, \alpha b + \alpha b \cdot \mathfrak{Cof}\, \alpha b)\, \mathfrak{Cof}\, \alpha y - \alpha y \cdot \mathfrak{Sin}\, \alpha y \cdot \mathfrak{Sin}\, \alpha b - \alpha b - \mathfrak{Sin}\, \alpha b \cdot \mathfrak{Cof}\, \alpha b] \\ &\quad + \sum_n^{\infty} \frac{B_n}{\varphi_n} [\beta x \cdot \mathfrak{Sin}\, \beta x + (2 - \beta l \cdot \mathfrak{Tg}\, \beta l)\, \mathfrak{Cof}\, \beta x] \cdot (\cos \beta y - \cos \beta b) \\ \tau &= A \cdot \sin \alpha x\, (\alpha b \cdot \mathfrak{Cof}\, \alpha b \cdot \mathfrak{Sin}\, \alpha y - \alpha y \cdot \mathfrak{Cof}\, \alpha y \cdot \mathfrak{Sin}\, \alpha b) \\ &\quad + \sum_n^{\infty} \frac{B_n}{\varphi_n} [\beta x \cdot \mathfrak{Cof}\, \beta x + (1 - \beta l \cdot \mathfrak{Tg}\, \beta l)\, \mathfrak{Sin}\, \beta x] \sin \beta y. \end{aligned} \right.$$

In den obigen Ansätzen ist β und φ_n aus Gl. (14) zu entnehmen, während A und B_n gemäß Gl. (12) u. (16) die nachfolgende Bedeutung haben:

$$(24)\quad \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{\omega E t_0'}{(\alpha b + \mathfrak{Sin}\, \alpha b \cdot \mathfrak{Cof}\, \alpha b)} \\ B_n &= \frac{A}{\pi} \cdot \frac{b^2}{n^3 l^2 \left(1 + \frac{b^2}{4 l^2 n^2}\right)^2} \cdot \mathfrak{Sin}^2\, \alpha b \cdot \cos \beta b. \end{aligned} \right.$$

Schließlich ist der Festwert t_0' aus Gl. (19) zu ermitteln, die hier die nachstehende Gestalt annimmt:

$$(25)\quad t_0 = t_0' \left\{ 1 + \frac{l^2 \cdot \mathfrak{Sin}^2\, \alpha b}{\pi b^2 (\alpha b + \mathfrak{Sin}\, \alpha b \cdot \mathfrak{Cof}\, \alpha b)} \cdot \sum_n^{\infty} \frac{\mathfrak{Cof}\, \beta l\, [2(\mathfrak{Cof}\, \beta l - 1) + \beta l \cdot \mathfrak{Tg}\, \beta l]}{n^3 \left(1 + \frac{b^2}{4 l^2 n^2}\right)^2 (\beta l + \mathfrak{Sin}\, \beta l \cdot \mathfrak{Cof}\, \beta l)} \right\}.$$

Die gesamte Temperaturfunktion, welcher der Eigenspannungszustand (23) zugeordnet ist, stellt sich daher wie folgt dar:

$$(26)\quad t = t_0' \cdot \cos \alpha x + \frac{1}{\omega E} \sum_n^{\infty} \frac{B_n}{\varphi_n} [2 \cdot \mathfrak{Cof}\, \beta l - (2 - \beta l \cdot \mathfrak{Tg}\, \beta l)\, \mathfrak{Cof}\, \beta x - \beta x \cdot \mathfrak{Sin}\, \beta x] \cos \beta b.$$

Aus Gl. (23) bis (26) ist zu ersehen, daß der Eigenspannungszustand vom Verhältnis der Blechlänge zur Blechbreite abhängig ist, so daß die entstehenden Schrumpfspannungen am besten an Hand der beiden Grenzfälle $l \leqq b$ (Bleche an der Breitseite verschweißt) und $l \geqq b$ (Bleche an der Schmalseite verschweißt) beurteilt werden. Bevor diese beiden Fälle zahlenmäßig behandelt werden, sei noch darauf hingewiesen, daß die Breite der Erhitzungszonen von der Länge der zu verbindenden Bleche unabhängig ist; man hat sich daher bei der Einschätzung der nachfolgenden Ergebnisse vor Augen zu halten, daß die Blechlänge l gerade der Einflußlänge des veränderlichen Wärmeabfalls entspricht und als feste Größe zu betrachten ist, während die Blechbreite b, also das Verhältnis l/b, als veränderlich angesehen werden soll.

Bleche an der Breitseite verschweißt.

Für die zahlenmäßige Auswertung der Schrumpfspannungen werden die nachstehenden Angaben gewählt: $t_0 = 600^0$, $\omega = 0{,}000\,011$, $E = 1600$ t/cm², $l/b = 1$; die Blechbreite 2b ist demnach doppelt so groß als der Einflußbereich des Wärmeabfalls. Zunächst ist der für die primäre Temperaturfunktion maßgebende Festwert t_0' aus Gl. (25) zu bestimmen; die in dieser Gleichung enthaltene Fouriersche Reihe konvergiert sehr gut, und man erhält $t_0' = 0{,}718\, t_0 = 431^0$. Nun können Gl. (24) ausgewertet werden und ergeben

$$A = 1{,}032 \text{ t/cm}^2, \quad B_n = \frac{1{,}74 \cdot \cos n\pi}{n^3 \left(1 + \frac{1}{4n^2}\right)^2} \text{ t/cm}^2 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

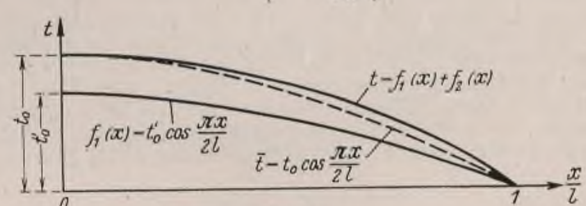


Bild 3.

Schließlich kann der Verlauf des Wärmeabfalls gemäß Gl. (26) ermittelt und in Bild 3 zeichnerisch eingetragen werden. Die untere Linie entspricht dem Verlauf der Primärfunktion $f_1(x)$ laut Gl. (21), die obere Linie stellt die Gesamtfunktion $t = f_1(x) + f_2(x)$ laut

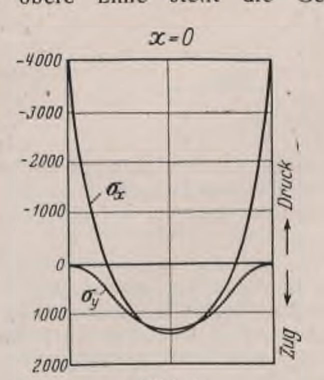


Bild 4.

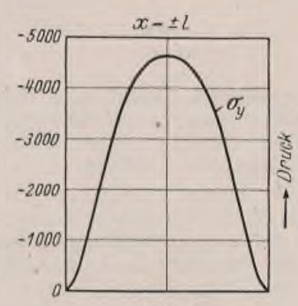


Bild 5.

Gl. (26) dar. Schließlich ist noch eine Funktion $\bar{t}$ eingetragen, die demselben Gesetz folgt wie die Primärfunktion. Der Vergleich zwischen der wirklichen Funktion t und dieser Funktion $\bar{t}$ (gestrichelte Linie) ergibt nur kleine Unterschiede und bestätigt die im ersten Abschnitt ent-

haltene Bemerkung, daß die Primärfunktion bereits alle charakteristischen Merkmale des gesamten Temperaturverlaufs aufweist. Abschließend können die Schrumpfspannungen nach Gl. (23) ermittelt werden. In Bild 4 ist der Verlauf der Normalspannungen im Schweißquerschnitt $x = 0$ dargestellt. Die Längsnormalspannungen σ_x ergeben in Querschnittsmitte $y = 0$ eine Zugbeanspruchung von $\sigma_{xo} = 1{,}40$ t/cm² und entsprechen an den Rändern $y = \pm b$ einer Druckbeanspruchung von $\sigma_{xb} = -4{,}03$ t/cm² $= \max |\sigma_x|$. Die Randspannungen liegen also bereits über der Quetschgrenze des Werkstoffs, so daß dort in Wirklichkeit innerhalb eines kleinen Gebiets plastische Formänderungen auftreten werden. Die parallel zur Naht gerichteten Querspannungen σ_y erreichen ihren Höchstwert in Blechmitte $\max \sigma_y = 1{,}33$ t/cm² (Zug). Im freien Stirnquerschnitt $x = \pm l$ verschwindet selbstverständlich die Längsspannung, während die Querspannung (Bild 5) mit ihrem Höchstwert von $\max |\sigma_y| = -4{,}62$ t/cm² (Druck) recht beträchtlich über der Quetschgrenze des Werkstoffs liegt und demnach im mittleren Teil des Querschnitts bleibende Querstauchungen hervorruft.

Zusammenfassend kann daher festgestellt werden, daß die beim Verschweißen von breiten Blechen auftretenden Schwindspannungen recht beträchtliche Werte erreichen und sowohl in der Umgebung des Schweißquerschnitts (Außenränder der Bleche) als auch in der Umgebung der freien Stirnquerschnitte (Blechmitte) plastische Formänderungen bewirken.

Bleche an der Schmalseite verschweißt.

Mit einer gegenüber dem Einflußbereich des Wärmeabfalls abnehmenden Blechbreite nehmen die Schwindspannungen ab, wie das nachfolgende Zahlenbeispiel zeigt. Die Werte für t_0, ω und E bleiben unverändert, während das Verhältnis $l/b = 10$ gewählt wird (die Länge eines Bleches und damit auch gleichzeitig der Einflußbereich der Temperaturänderung ist demnach fünfmal so groß als die Blechbreite). In diesem Falle kann in Gl. (25) $\mathfrak{Sin}\,\beta l \doteq \mathfrak{Cos}\,\beta l$, $\mathfrak{Sin}\,\alpha b \doteq \alpha b$ gesetzt werden, und die Bestimmungsgleichung für t_0' lautet dann

$$t_0 \doteq t_0' \left(1 + \frac{b^3}{2\,l^3} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^3}\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots\ldots).$$

Hieraus folgt, daß für $l/b > 10$ praktisch $t_0' \doteq t_0$ gesetzt werden darf. Der gesamte Temperaturverlauf wird also hier praktisch durch die Primärfunktion allein bestimmt: $t \doteq t_0 \cdot \cos \alpha x$, $f_2(x) = 0$. Für die Konstanten erhält man gemäß Gl. (24)

$$A \doteq \omega\, t_0\, E \cdot \frac{l}{\pi\, b} = 33{,}40 \text{ t/cm}^2$$

$$B_n = \omega\, t_0\, E \cdot \frac{b^3}{4\,l^3\,n^3} \cdot \cos n\pi = 0{,}000\,263 \cdot \frac{\cos n\pi}{n^3} \text{ t/cm}^2$$

$$\varphi_n \doteq \mathfrak{Sin}\, 10\, n\, \pi\,.$$

Bei der Berechnung der Spannungen zeigt es sich, daß die sekundären Glieder selbstverständlich so verschwindend klein sind, daß sie vernachlässigt werden können. Aber auch die der Primärfunktion zugeordneten Spannungsanteile sind außerordentlich klein. Im Schweißquerschnitt $x = 0$ beträgt z. B. die Längsnormalspannung in der Mitte $\sigma_{xo} = 0{,}0628$ t/cm² Zug und an den Rändern $\sigma_{xb} = -0{,}0628$ t/cm² Druck.

Aus dem Vergleich der beiden Zahlenbeispiele ist der überaus große Einfluß der Blechbreite auf die Höhe der Schrumpfspannungen zu erkennen. Abschließend sei nochmals hervorgehoben, daß zur Beurteilung der Schwindspannungen das Verhältnis l/b und damit vorerst die Länge des Einflußbereichs der Temperaturänderung bekannt sein muß, während nicht allzu starke Abweichungen von dem hier angenommenen Temperaturgesetz Bild 3 auf die Höhe der Schrumpfspannungen besonders im Schweißquerschnitt keinen wesentlichen Einfluß nehmen.

Einfaches Hilfsmittel zur Bemessung von Rahmenquerschnitten für zahlreiche Lastfälle.

Von Dr.-Ing. Georg Schmidt, Berlin.

Im Stahlbau sind beim Bemessen von Querschnitten oftmals mehrere Lastfälle zu berücksichtigen. Solange die einzelnen Konstruktionsteile nur durch Normalkräfte oder nur durch Momente beansprucht werden, bedeutet dieser Umstand keine Schwierigkeit, da zur Ermittlung der größten Spannung nur die Belastungen gleichen Vorzeichens addiert zu werden brauchen. Bei Rahmenquerschnitten, bei denen gleichzeitig Normalkräfte und Momente auftreten, wird manchmal schwer zu übersehen sein, welche Lastfälle zur Berechnung der größten Spannung zusammenzufassen sind, da innerhalb der einzelnen Lastfälle Moment und Normalkraft einmal eine Spannung gleichen, das andere Mal verschiedenen Vorzeichens erzeugen können.

Einen Ausweg aus dieser Schwierigkeit bietet natürlich immer die Errechnung der Spannung für jeden Lastfall gesondert, worauf die Werte gleichen Vorzeichens nur addiert zu werden brauchen. Mit dem Wachsen der Zahl der Lastfälle wird dieses Verfahren jedoch sehr zeitraubend werden. Für den Ungeübten, der nicht auf Anhieb den richtigen Querschnitt schätzen kann, vervielfältigt sich der Zeitaufwand weiterhin mit der Anzahl der falschen Schätzungen. Schließlich muß diese Arbeit für zwei äußerste Querschnittsfasern, wenn nicht gar, wie bei unsymmetrischen Querschnitten, für mehrere Querschnittspunkte durchgeführt werden. Die Anzahl der Lastfälle braucht also gar nicht so übermäßig groß zu werden;

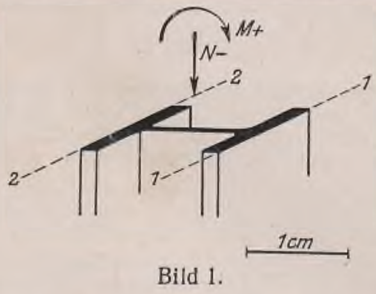


Bild 1.

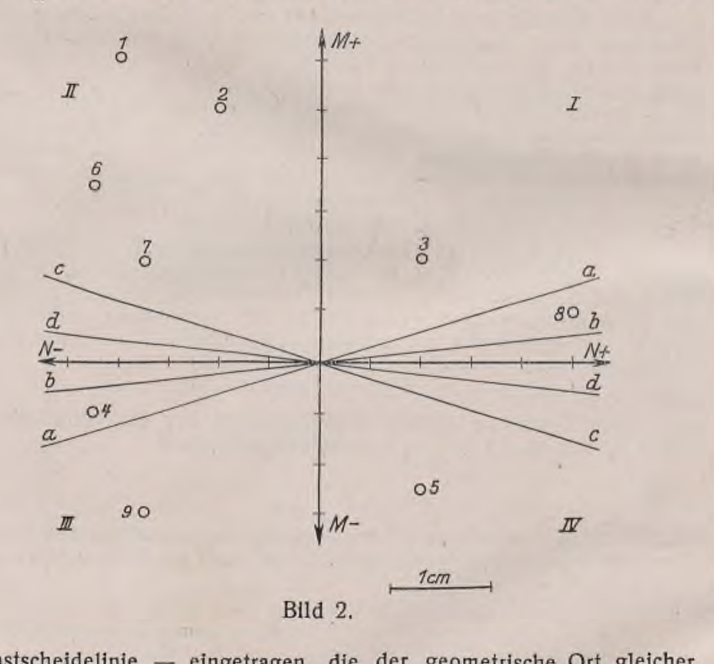


Bild 2.

es genügen vielleicht schon fünf oder sechs, um den Aufwand an Arbeit zur Bemessung eines einzigen Querschnitts unwirtschaftlich werden zu lassen. Durch ein ganz einfaches Hilfsmittel kann er auf ein geringes Maß beschränkt werden.

In einem Koordinatensystem werden auf der Abszisse die Normalkraft N, auf der Ordinate das Moment M abgetragen, so daß jeder Lastfall durch einen bestimmten Punkt der Koordinatenfläche dargestellt ist. In der Randfaser 1—1 des Querschnitts von Bild 1 erzeugt ein positives Moment wie auch eine negative Normalkraft eine Druckspannung. Werden auf der Ordinate positive Momente nach oben, auf der Abszisse positive Normalkräfte nach rechts abgetragen (Bild 2), so erscheint ein solcher Lastfall im Quadranten II. Alle Lastfälle dieses Quadranten erzeugen also eindeutig Druckspannung. Anders ist es im Quadranten I. Dort erzeugt das Moment Druck-, die Normalkraft jedoch Zugspannung. Das Vorzeichen der resultierenden Spannung kann hier somit positiv oder negativ sein und hängt von dem Verhältnis N zu M ab. Im Quadrantne III ist das gleiche der Fall, nur vertauschen hier N und M die Rollen bezüglich des Vorzeichens. Im Quadranten IV endlich ergibt jeder Lastfall eindeutige Zugspannung.

Wird nun in das Koordinatensystem die Gerade a—a: $N \cdot \frac{\omega}{F} = M \cdot \frac{100}{W}$ (N in t, M in mt, F in cm² und W in cm³) — sozusagen als Lastscheidelinie — eingetragen, die der geometrische Ort gleicher Spannung aus N und M ist, so trennt sie die Quadranten in die Flächen resultierender positiver oder negativer Spannungen. Lastfälle, die oberhalb der Lastscheidelinie liegen, erzeugen Druckspannung, Lastfälle unterhalb dieser Linie Zugspannung. Zur Abscheidung aller Zugspannung erzeugenden Lastfälle ist allerdings die Gerade b—b: $N \cdot \frac{1}{F_n} = M \cdot \frac{100}{W_n}$ maßgebend, deren Winkel zur Abszisse etwas von dem der Geraden a—a abweicht. Über die Punkte derjenigen Lastfälle, die zwischen die Lastscheidelinien a—a und b—b fallen, soll weiter unten an Hand des Beispiels gesprochen werden.

Für die Faser 2—2 des Querschnitts von Bild 1 werden die Geraden a—a und b—b spiegelbildlich als c—c und d—d in das Koordinatensystem eingezeichnet. Quadrant I gibt jetzt eindeutige Zugspannung, Quadrant III eindeutige Druckspannung an.

Wie schnell auf Grund des so entstandenen Bildes 2, also der aufgetragenen Lastpunkte und der Geraden *a—a* bis *c—c*, die Entscheidung über die maßgebende Zusammenstellung der Lastfälle und die zu berechnende Querschnittsfaser gefällt werden kann, wird am besten an einem Beispiel gezeigt. Folgende willkürlich angenommenen Lastfälle, die voneinander völlig unabhängig sein mögen, seien für einen Querschnitt vorhanden:

	N (t)	M (tm)		N (t)	M (tm)
1. Lastfall	$-4{,}0$	$+6{,}0$	6. Lastfall	$-4{,}5$	$+3{,}5$
2. „	$-2{,}0$	$+5{,}0$	7. „	$-3{,}5$	$+2{,}0$
3. „	$+2{,}0$	$+2{,}0$	8. „	$+5{,}0$	$+1{,}0$
4. „	$-4{,}5$	$-1{,}0$	9. „	$-3{,}5$	$-3{,}0$
5. „	$+2{,}0$	$-2{,}5$			

Die Knicklängen des zu dem Querschnitt gehörigen Stabes seien $s_{k_x} = 14{,}0$ m; $s_{k_y} = 7{,}0$ m. Als ausreichend wird I P 30 geschätzt. Dann lauten die Gleichungen der Lastscheidelinien mit $\lambda_{max} = \frac{1400}{12{,}9} = 108{,}5$; $\omega = 2{,}78$; $F = 154$ cm²; $F_n = 143{,}6$ cm²; $W = 1720$ cm³ und $W_n = 1580$ cm³

$$a\text{—}a:\ N \cdot \frac{2{,}78}{154} = M \cdot \frac{100}{1720} \quad \text{oder } N = \frac{15\,400}{2{,}78 \cdot 1720} \cdot M = 3{,}22\,M;$$

$$b\text{—}b:\ N \cdot \frac{1}{143{,}6} = M \cdot \frac{100}{1580} \quad \text{oder } N = \frac{14\,360}{1580} \cdot M = 9{,}10\,M.$$

Diese Lastfälle und Lastscheidelinien sind in Bild 2 eingetragen. Zu ihrer Auswertung muß noch folgendes bemerkt werden: Lastfälle, deren Punkte im Koordinatensystem auf einer Parallelen zur Lastscheidelinie liegen, erzeugen in der zu dieser Linie gehörigen Querschnittsfaser die gleiche Spannung. Je weiter der Lastpunkt von der Lastscheidelinie entfernt ist, desto größer wird die durch ihn hervorgerufene Spannung sein. Die Maximalspannung tritt also in der Querschnittsfaser auf, für die der Schwerpunkt der maßgebenden Lastpunkte die größte Entfernung von der zugehörigen Lastscheidelinie aufweist.

Hierbei ist zu beachten, daß in einem Falle, wo der Schwerpunkt einer Lastfallgruppe von einer Lastscheidelinie für Druckspannung genau so weit entfernt ist wie von einer Lastscheidelinie für Zugspannung, die absolute Größe der Druckspannung infolge eines hohen ω-Wertes gegebenenfalls größer sein wird als die absolute Größe der Zugspannung.

Nach diesen Bemerkungen ist in Bild 2 sofort zu ersehen, daß nur die Querschnittsfaser 1—1 auf Druckspannung nachzuweisen ist; denn die meisten Lastfälle liegen am weitesten von der zugehörigen Lastscheidelinie *a—a* entfernt. Zu addieren sind die Lastfälle 1, 2, 3, 4, 6 und 7. Die Summe ergibt $M = +17{,}5$ tm und $N = -16{,}5$ t, und hiermit ist die größte Spannung

$$\sigma = -2{,}78 \cdot \frac{16{,}5}{154} - \frac{1750}{1720} = -0{,}298 - 1{,}018 = -1{,}316 \text{ t/cm}^2.$$

Die durch die Lastscheidelinien abgegrenzten Flächen für positive und negative Spannungen überschneiden sich in den Quadranten II und III, d. h. die auf ihnen liegenden Lastpunkte sind bei der Zusammenstellung der maßgebenden Lastfälle für die Berechnung sowohl der positiven als auch der negativen Spannung zu berücksichtigen. Wäre also für Faser 1—1 die Zugspannung zu ermitteln gewesen, hätte Lastfall 4 wiederum zur maßgebenden Summe gehört. In den Quadranten I und IV dagegen bleibt die Fläche zwischen den Linien *a—a* und *b—b* (bzw. *c—c* und *d—d*) offen, und die auf ihr liegenden Lastfälle, hier Lastfall 8, brauchen weder bei der Ermittlung der Druckspannung, noch bei der Zugspannung in der Faser 1—1 eingesetzt zu werden.

Spannungslinien als Hilfsmittel bei Bemessung durch Biegedruck(zug) beanspruchter Tragglieder.

Von Dipl.-Ing. **Georg Lewenton**, Duisburg.

Zu den elementaren Hilfen bei Bemessung von Blechträgern gehört das einfache, geläufige Verfahren der zeichnerischen Ablängung der Gurtplatten bei abgesetzten Trägerquerschnitten. Dabei wird das rechnerische Tragvermögen eines jeden Querschnitts, ausgedrückt als „Tragmoment" $\overline{M} = W\sigma_{zul}$ oder $\overline{M} = W\sigma_{max}$, ermittelt und mit der festgestellten Momentenkurve bzw. einer der Bemessung zugrunde zu legenden Maximalmomentenlinie verglichen. Ein Schnittpunkt der zeichnerisch aufgetragenen Funktionen $\overline{M}$ mit der Momentenlinie zeigt an, daß die „Tragfähigkeit" für die zugrunde gelegte „Tragspannung" erschöpft ist und von dieser Stelle an ein stärkerer Querschnitt vorhanden sein muß, wenn die gewählte Grenzspannung nicht überschritten werden soll. Auf diese Weise werden die sog. „theoretischen Längen" der Gurtplatten oder anderer Verstärkungen, die der stärkere Querschnitt gegenüber dem Grundquerschnitt aufweist, gewonnen (Bild 1). Zu beachten bleiben noch Überlegungen über eine notwendige Verlängerung der Platten über den theoretischen Endpunkt hinaus, d. h. die Zugabe einer Vorbindung, wofür Regeln in den Vorschriften für genietete und geschweißte Konstruktionen jeweils gegeben sind, die aber hier nicht Gegenstand der Betrachtung sein sollen.

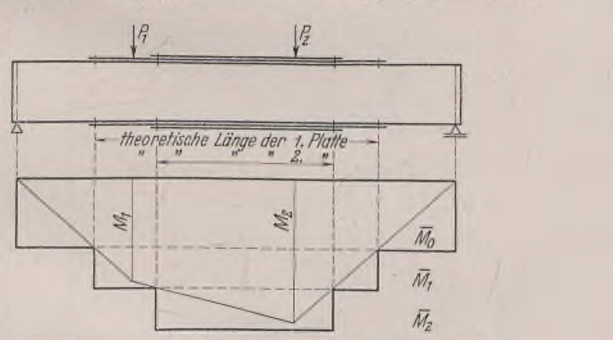


Bild 1. Ablängung nach dem Tragmomentenverfahren.

Bogenbrücken, Versteifungsträgern von Hängebrücken und Stabbogen, weiter bei Rahmenkonstruktionen mit abgesetzten Querschnitten und veränderlicher Konstruktionshöhe der Stabquerschnitte. Bei allen diesen Tragwerken ist es bei der Aufstellung der Festigkeitsberechnung notwendig, die größten Randspannungen außer an den Systemteilpunkten auch an den theoretischen Enden der Gurtplatten zu ermitteln, etwa bei genieteten Trägern an der Stelle des zweiten Nietpaares, um sicher zu gehen, daß die zulässige Spannung nirgends überschritten ist.

Das hier empfohlene Verfahren stellt nun nichts anderes dar, als eine systematische Anwendung eines allgemeinen Spannungsnachweises verbunden mit einer der üblichen Tragmomentenkonstruktion entsprechenden zeichnerischen Lösung der Aufgabe mittels der Spannungslinien.

Es wird hierbei vorgesehen, an allen Teilpunkten, z. B. den Querträgeranschlußpunkten bei einer Brücke, die Randspannungen zu ermitteln

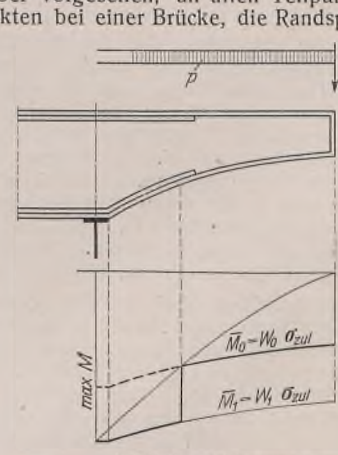


Bild 2. Ablängung bei gekrümmten Gurtungen.

Das bekannte Verfahren ist auch anwendbar bei Querschnitten mit veränderlicher Höhe. Die Tragmomente stellen sich dann als Veränderliche in Abhängigkeit von der Querschnittshöhe dar und ergeben bei zeichnerischer Auftragung geneigte oder gekrümmte Linienzüge oder aber bei Ermittlung in nur einzelnen Teilpunkten in genügender Annäherung gebrochene Linienzüge (Bild 2).

Eine Verallgemeinerung des Verfahrens auf Querschnitte, die außer durch reine Biegung noch durch Normalkräfte beansprucht sind, ist jedoch nicht möglich. Dabei ist es aber auch in diesen Fällen oft notwendig oder von großem Nutzen, hinsichtlich einer klaren Anschauung der zusammengesetzten Beanspruchungen unterworfenen Tragglieder über eine entsprechende zeichnerische Darstellungsweise zu verfügen, um mit ihrer Hilfe die theoretischen Längen, d. h. die Ausführung mit knappstem Materialverbrauch, zu ermitteln. Dieser Fall liegt häufig genug vor bei unter Zugrundelegung aller in Betracht kommenden Querschnittsabstufungen.

Hierdurch wird z. B. die Randspannung oben σ_0 gewonnen für 1. den Grundquerschnitt, 2. den Querschnitt mit einer Verstärkungsplatte, 3. mit zwei Verstärkungsplatten usw., zunächst ohne Rücksicht auf Ausnutzung oder Spannungsüberschreitung gegenüber σ_{zul}. Werden nun die so errechneten Spannungen unter den entsprechenden Teilpunkten zeichnerisch aufgetragen und die zu einem Querschnitt gehörigen zu einem Linienzug verbunden, so erhält man mehrere Spannungslinien, die jeweils den Spannungsverlauf in der Konstruktion bei Anwendung nur e i n e s zugrunde gelegten Querschnitts angeben.

Wird nun weiter in die Figur die Spannung σ_{zul} als Parallele zur Basis eingetragen, so ergibt sich ohne weiteres als Resultat der Vergleich

der Spannungen mit σ_{zul} und die Konstruktion der theoretischen Gurtplattenenden. Die Schnittpunkte der Spannungslinien mit der Horizontalen σ_{zul} geben die Stellen an, an denen $\sigma > \sigma_{zul}$ wird. Soweit die Spannungsordinaten größer sind als σ_{zul}, kommen die betreffenden Querschnitte als zu schwach nicht in Frage, und es ist ab dieser Stelle der nächststärkere zu wählen. Die Schnittpunkte sind die theoretischen Endpunkte der Platten.

Die Ablängung kann in einfachster Weise für jede beliebige Bezugsspannung ausgeführt werden, z. B. können in dasselbe Spannungslinienbild die Bezugsspannungen $\sigma_{zul} = 1400$ kg/cm² für St 37 und $\sigma_{zul} = 2100$ kg/cm² für St 52 eingetragen werden, und die beiden entsprechenden Dimensionierungen mit Ablängung der Deckplatten sind für beide Fälle sofort ersichtlich. Weiter kann auch entsprechend der Forderung der „Berechnungsgrundlagen für stählerne Eisenbahnbrücken" (BE), § 40, 1, als Bezugsspannung (statt σ_{zul}) σ_{max} genommen werden, wobei aus der Forderung gleicher Sicherheit die einmal als größte Spannung festgestellte auch für die Bemessung des ganzen Traggliedes zugrunde gelegt wird. Bild 3 zeigt für den einfachsten Fall, denselben wie in Bild 1, die Ablängung eines Blechträgers mit zwei Deckplatten, einmal für die zulässige Spannung von 1400 kg/cm² und weiter für $\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_2} = 1370$ kg/cm².

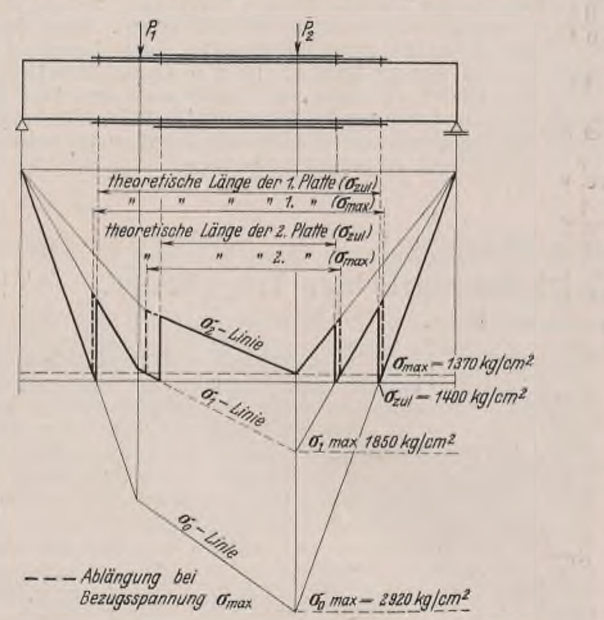


Bild 3. Ablängung mittels Spannungslinien.

Aus dem Beispiel ist ersichtlich, daß für die einfachen Fälle bei reiner Biegung die zeichnerische Arbeit dieses Verfahrens mehr Arbeit erfordert als bei der Tragmomentenkonstruktion wegen der Auftragung mehrerer gebrochener Linienzüge, so daß man wohl für diese einfachsten Fälle die übliche Konstruktion bevorzugen wird. Ist der Querschnitt jedoch von veränderlicher Höhe, so sind auch schon die Tragmomentenlinien gekrümmt und der Vorsprung dieser Darstellung nicht mehr wesentlich, um so mehr, als man in der praktischen Rechnung sieht, wie weit man spannungsmäßig einen Querschnitt zu verfolgen braucht. Es genügt dann nämlich, nur das in Frage kommende Stück der betreffenden Spannungslinie (in der Nähe von σ_{zul}) zu ermitteln (siehe auch Bild 4).

Als Vorteil ist die Anschaulichkeit der Darstellung hinsichtlich des Aufzeigens des gesamten Spannungsverlaufs zu werten. Dieser Umstand ist besonders bei Bemessung von geschweißten Trägern von Nutzen, wenn man sich über die günstigste Lage von Stößen und Beanspruchungen von Schweißnähten, für die herabgesetzte zulässige Spannungen vorgeschrieben sind, schlüssig zu werden hat. Die Randbeanspruchungen können hierbei direkt aus der Abbildung entnommen werden.

Bei Untersuchung eines Traggliedes, das außer durch reine Biegung noch durch Normalkräfte, gleichgültig ob Zug oder Druck, beansprucht wird, ergibt sich nun durch dieselbe Anwendung des vorher beschriebenen Vorgangs, nämlich Ermittlung der Randspannungen, Auftragung der Spannungslinien, Auftragung der Bezugsspannung, ohne weiteres dieselbe Konstruktion der theoretischen Gurtplattenenden verbunden mit einer anschaulichen Darstellung des Gesamtspannungsverlaufs als allgemeiner zeichnerischer Spannungsnachweis.

Als Beispiel werde die Spannungsdarstellung eines Versteifungsträgers einer Stabbogenbrücke nach Bild 4 gebracht. Die verschiedenen Spannungen wurden in üblicher Weise mit Hilfe von Kernpunktsmomentenlinien ermittelt. Die der dann wirklich ausgeführten Dimensionierung entsprechenden Spannungslinienabschnitte für die obere und untere Randspannung sind dicker ausgezogen und geben den Verlauf der Maximalrandspannungen wieder.

Ein weiteres Beispiel zeigt Bild 5, die Spannungsfigur einer vollwandigen Kranbahnstütze. Der Querschnitt ist einmal abgesetzt. Der Spannungsabfall beim Übergang zum verstärkten Querschnitt ist entsprechend der Anschlußlänge und der Nietanordnung abgetreppt genauer dargestellt.

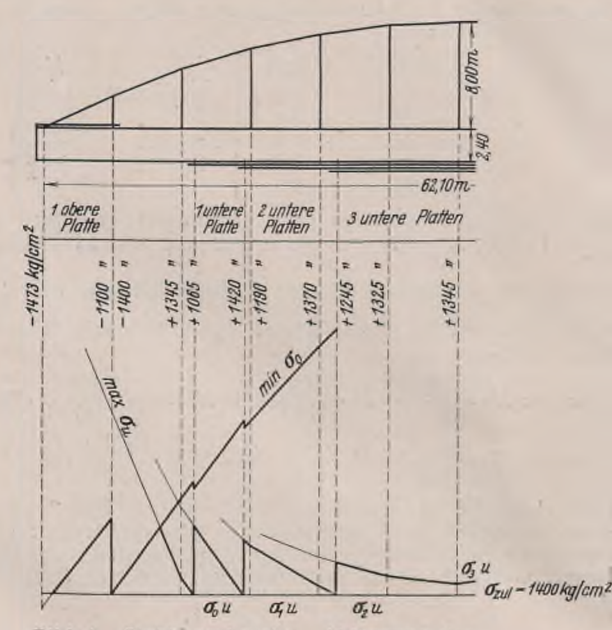


Bild 4. Stabbogenbrücke. Ablängung der Deckplatten des Versteifungsträgers.

Der angegebene Weg eignet sich für zusammengesetzte Belastungsfälle bei beliebiger Querschnittsveränderlichkeit und liefert eine anschauliche Darstellung für genaue Spannungsnachweise. Es kann sinngemäß eine Maximalspannungslinie oder auch ein einzelner Spannungszustand der Konstruktion der Ablängung der Verstärkungsplatten zugrunde gelegt werden, als Resultat wird ein aufschlußreicher zeichnerischer Gesamtspannungsnachweis verbunden mit einer theoretisch knappsten Bemessung gewonnen.

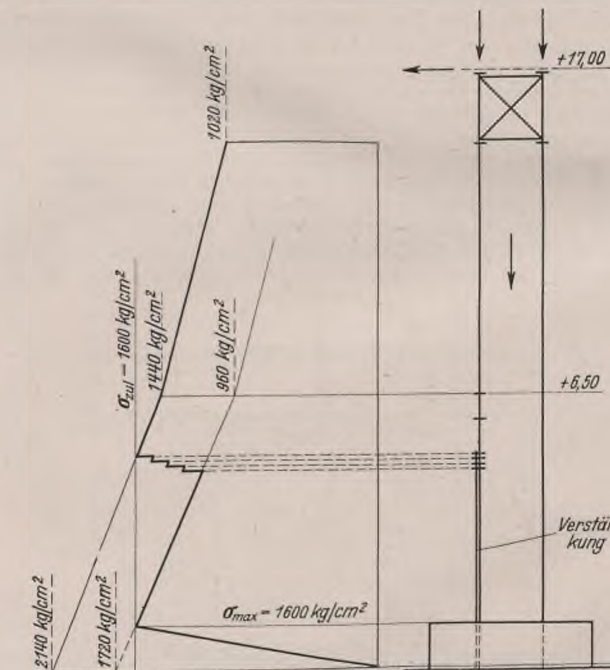


Bild 5. Vollwandige Kranbahnstütze.

Die vielfache Anwendungsmöglichkeit rechtfertigt den hier gebrachten Hinweis trotz bekannter, einfachster statischer Zusammenhänge.

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt.
Verlag: Wilhelm Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W 9.
Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

Ende des Jahrgangs 1940.